微分積分学 2 ノート

平成 25 年 11 月 6 日 佐治健太郎

本ノートは 2013 年度後期微分積分学 2 の準備ノートである.

シラバス

- 科目名：微分積分学 II
- 担当者：佐治健太郎 (理学研究科数学専攻)
- 内　容：積分
- 進め方：主に講義
- 教科書：吹田・神保「理工系の微分積分学」
- 成　績：中間テストと定期テストとたまにやる演習プリント

講義と演習の進め方と単位

成績は中間テストと定期テストとたまにやる演習プリントで決める. 中間テストと定期テストで 80% ～ 90% 決まる. 中間テストの範囲は定期テストの範囲から除く.

講義の最後に演習プリントを配ることがある. これを提出すると添削し, 点数をつける. これが上記の演習プリントの点数.

1　原始関数

1.1　原始関数と基本公式

定義 1.1. $f(x)$ を関数とする. 関数 $F(x)$ が

$$F'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

をみたすとき, $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という.

式 (1.1) は

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

とも書かれる. ある関数の原始関数を求めることをその関数を**積分する**という. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき, C を定数として, $F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である. 関数の原始関数は一意的ではなく, 定数を足すという不定性がある. この定数 C を**積分定数**という. 以下では特に意味のある場合を除き, 積分定数は省略する. 微分の結果を知っているので, いくつかの関数の原始関数は分かっている.

例 1.2.

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha\,dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \\
\int x^{-1}\,dx &= \log|x| \\
\int e^x\,dx &= e^x \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x \\
\int \cos x\,dx &= \sin x
\end{aligned}$$

また, 微分の公式から, 次の公式を得る.

補題 1.3. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\int af(x)+bg(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx && (\text{積分の線形性}) \\
&\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx && (\text{部分積分}) \\
&\int f(x)\,dx = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx && (\text{置換積分})
\end{aligned}$$

$x=\phi(t)$ と書けば, 最後の式は

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

と表される. この形で覚えると覚えやすい. また, $dx/dt = \phi'(x)$ の形から, $dx = \phi'(x)\,dt$ のように形式的に変形して, 積分の dx の部分にこの式を形式的に代入したと覚えてもよい.

1.2　基本的な積分

積分の基本公式からいくつかの関数の原始関数が求められる.

例題 1.4. 次の関数を積分せよ (原始関数を求めよ).

$$(1)\ \log|x|, \quad (2)\ a^x(a>0,\ a\neq 1), \quad (3)\ \tan x,$$

略解例　高校でやっているがここだけ少し書いておこう.

(1) $\log|x|\cdot 1$ とみなして部分積分を考える.

$$\int \log|x|\,1\,dx = \log|x|\,x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\log|x| - x.$$

(2) $a^x = e^t$ とおいてみよう. 両辺の対数をとると, $t = x\log a$ をえる. つまり, $t = x\log a$ のとき, $a^x = e^t$ となる. つまり, 置換積分が使える.

$t = x\log a$ とすると, $dt/dx = \log a$ より,

$$\int a^x\,dx = \int e^t \frac{1}{\log a}\,dt = \frac{1}{\log a}\int e^t\,dt = \frac{1}{\log a}\,e^t = \frac{1}{\log a}\,e^{x\log a} = \frac{a^x}{\log a}.$$

(3) 置換積分より,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$$

がわかる. よって,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \log|\cos x|.$$

1.3　積分の基本テクニック

例題 1.5. 次の関数を積分せよ.

$$(1)\ \sin x\cos^3 x, \quad (2)\ xe^x, \quad (3)\ \frac{1}{x^2-a^2}, \quad (4)\ \frac{1}{x^2+a^2}, \quad (5)\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad (6)\ \frac{1}{ax+b},$$

高校の時にやっているので解答は省略. (4), (5) は習った記号 arcsin や arctan を使おう.

例題 1.6. 次の関数を積分せよ.

$$(1)\ \sin^2 x, \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}, \quad (3)\ \sqrt{x^2+a}, \quad (4)\ \frac{\log x}{x}, \quad (5)\ \arcsin x.$$

略解例 高校でやっているので, 詳しくは書かない. (1) は半角の公式. (2) は $t = x + \sqrt{x^2+a}$ とおくと $dt/dx = 1 + x/\sqrt{x^2+a}$ より,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{t-x}\,\frac{1}{1+x/\sqrt{x^2+a}}\,dt = \int \frac{1}{t-x}\,\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dt$$
$$= \int \frac{1}{t-x}\,\frac{t-x}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.$$

(3) も $t = x + \sqrt{x^2+a}$ とおくと $dt/dx = 1 + x/\sqrt{x^2+a}$ より,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int (t-x)\,\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dt = \int \frac{(t-x)^2}{t}\,dt = \int \frac{x^2+a}{t}\,dt.$$

ここで, $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a$ から, $x = (1/2t)(t^2-a)$ なので, $x^2 = (1/4t^2)(t^4 - 2at^2 + a^2)$ となる. これを代入して, 上の式は

$$\int \frac{t^4 - 2at^2 + a^2 + a}{4t^3}\,dt. = \int \frac{t}{4} - \frac{a}{2t} + \frac{a^2}{4t^3} + \frac{a}{4t^3}\,dt. = \frac{t^2}{8} - \frac{a}{2}\log|t| - \frac{a^2}{8t^2} - \frac{a}{8t^2}$$

となる. これに t を代入して答えを得る.

(4) は $x > 0$ に注意して部分積分すると,

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \log x \log x - \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

から, 答えは $\log x^2/2$.

(5) $\arcsin x$ の微分は $1/\sqrt{1-x^2}$ であるので, 部分積分すると,

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

例題 1.7. 次の関数を積分せよ.

$$(1)\ e^x \sin x, \quad (2)\ \frac{1}{(x^2+a)^n}\ (a \neq 0, n \neq 1)$$

略解例 (1) は高校でよくやっているだろう. (2) も同じ考えでできる.

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx$$

とおく. 分子を $(x^2+a-x^2)/a$ の形にして

$$I_n = \frac{1}{a}\int \frac{x^2+a-x^2}{(x^2+a)^n}\,dx = \frac{1}{a}I_{n-1} - \frac{1}{2a}\int x\frac{2x}{(x^2+a)^n}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}I_{n-1} - \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{n+1}x\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}} - \frac{1}{n+1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{a}I_{n-1} - \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{-n+1}x\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}} - \frac{1}{-n+1}I_{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2a(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right)$$

を得る. I_1 はわかるのでこれで求められる.

1.4　積分のテクニック

微分と違い, 積分は難しい. どんな関数も積分できるというような万能の方法はない. 各々の関数に対してアイデアをひらめいて積分していくしかない. ただし, 幾つかのパターンがないことはない. ここではそれらを紹介しよう. これらを覚えることはあまり意味が無いと思われる. 「こんな形の積分ってあそこを見ればやり方が書いてあるな.」と思えれば十分. また, 積分の答えが合っているかどうかは微分すればすぐに確かめることができる. 従って, 問題を解いたときは微分してみれば検算ができる.

1.4.1　有理式

多項式分の多項式という形を有理式という. この形の積分を考えよう. $f(x)$ を $A(x), B(x)$ を多項式として,

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

とする. 多項式は多項式で割ることができる. つまり, $A(x)$ を $B(x)$ で割ると, 多項式 $Q(x)$ と $R(x)$ が存在して

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

とかける. $R(x)$ の次数は $B(x)$ のそれよりも小さい. ゆえに $f(x)$ は

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

の形になる. $Q(x)$ の部分は容易に積分できるので, 問題は $R(x)/B(x)$ のみとなる. 多項式はかならず有限個の二次式または一次式の積で書ける. これを部分分数分解すると, 積分は

$$\frac{1}{(x+a)^n}, \quad \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}\ (a^2-4b<0)$$

が計算できればよい. 前者はすぐにできる. 後者は

$$\frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n} = \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} + \left(d - \frac{ac}{2}\right)\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}$$

と分解する. 後者を平方完成すれば例題 1.7 の (2) を用いて積分できる.

1.4.2　三角関数

三角関数のみからなる有理式は

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

と置換すれば,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり, t の有理式になる. 高校でやっているので以降は省略.

1.4.3 無理式

無理式はかなり厳しい. 積分できる例を二つ挙げるに留める. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ が入っている式は $a>0$ ならば, $t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ とおく. $a<0$ ならば, ルートの中身はどこかで正になる必要があるため, $ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 つの実数解 $\alpha<\beta$ をもつ. このとき,

$$t = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

と置換する.

$$\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$

が入っている式はこれを t と置換する.

1.5 積分のテクニックまとめ

テクニック 1.8.

(1) **分数式**は分子の次数を減らして分母を因数分解し, 部分分数分解.

(2) **三角関数の式**は $\tan(x/2)=t$ と置換する. (三角関数の二乗のみからなる式は $\tan x = t$ とすると楽.)

(3) **ルートのある式**で形が $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ $(ad-bc\neq 0)$ のとき, $t=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置換する. これは $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-1}$ 等でも適用可能.

(4) **ルートのある式で中身が二次式**のとき, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の形で $a>0$ ならば $t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ と置換する. $a<0$ ならば中身 $=0$ の 2 つの解を α,β $(\alpha<\beta)$ として, $t=\sqrt{-\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ と置換する.

(5) **よく分からなければ部分積分**も視野に入れる.

1.6 初等関数

多項式, 三角関数, 指数関数, およびそれらの逆関数, およびそれらの有限個の加減乗除, 有限回の合成で得られる関数を**初等関数**という．今まで扱ってきた関数は (たぶん) すべて初等関数である．初等関数の微分は初等関数になるが, 積分はそうとは限らない．たとえば,

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

は初等関数ではない.

2 定積分と面積

2.1 リーマン和と定積分

$I=[a,b]$ とし, I 上の関数 $f: I \to \mathbb{R}$ を考える．I 上に n 個の点 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ととる．このように点をとることを I の分割という．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ をひとつとる．k 番目の区間を $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ と書き, I_k の幅を Δ_k とかく．Δ_k の最大値を分割 Δ の幅といい, $|\Delta|$ とかく．各 I_k から点を適当にひとつづつ $t_k \in I_k$ ととる．このとき, 底辺を Δ_k, 高さを $f(t_k)$ とする長方形の面積 $f(t_k)\Delta_k$ をすべて足したもの

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k$$

を**分割 Δ ととった点 $\{t_1, \ldots, t_k\}$ に関するリーマン和**という．Δ の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき, すべての Δ の取り方と各 t_k の取り方に対してリーマン和の極限値

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k$$

がある一定の値 J に近づくとき, f は $[a,b]$ **上で積分可能**といい, J を **f の $[a,b]$ 上の定積分**といい,

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

とかく．定積分に関して高校でやったように線形性や区間加法性が成り立つ．また, 置換積分, 部分積分の公式も成り立つ.

2.2 定積分可能の条件

$I=[a,b]$ とし, I 上の関数 $f:I\to\mathbb{R}$ を考える. Δ を分割とし, 各 I_k における f の最大値 (上限) を M_k, 最小値 (下限) を m_k とかき, M_k-m_k を I_k における f の**振動量**という. このとき, f が $[a,b]$ 上で定積分可能であるための必要十分条件は

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta_k=0$$

である. これから次が得られる.

定理 2.1. f が $[a,b]$ 上で単調増加 (非減少) または減少 (非増加) ならば $[a,b]$ 上で積分可能.

証明. 単調増加 (単調非減少) として示す. $M_k-m_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta_k &\le \sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))|\Delta|\\ &=|\Delta|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta=|\Delta|(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

となる. これは $|\Delta|\to 0$ のとき 0 へいく. □

また, 次も得られる.

定理 2.2. f が $[a,b]$ 上で連続ならば $[a,b]$ 上で積分可能.

証明. $[a,b]$ 上の連続関数は一様連続なので, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して任意の $|x-x'|<\delta$ をみたす x,x' に対して

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ. ゆえに適当な $\varepsilon>0$ に対して $|\Delta|<\delta$ となるような分割 Δ に対して $M_k-m_k<\varepsilon$ なので,

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta_k\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta_k=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

となり, 任意の $\varepsilon>0$ 以下にできるので $|\Delta|\to 0$ のとき $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta_k\to 0$ となる. □

関数 f が $[a,b]$ **上で区分的連続である**とは, 有限個の点以外の点で連続となるときをいう. 定理 2.2 から, f が有界で区分的連続ならば積分可能である. 応用上はこれくらいで十分であろう.

2.3　定積分の平均値の定理

高校でやったであろう.

定理 2.3. f が $[a,b]$ 上で連続ならばある定数 λ が存在

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$

が成り立つ. さらに f が連続ならば $\lambda = f(c)$, $c \in [a,b]$ と書け,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad (c \in [a,b])$$

が成り立つ.

2.4　定積分と原始関数

原始関数のときに, 慣れから積分, 積分と言ってきたが, 本来原始関数と定積分とは全くことなる概念である. 定積分は定義から求めることは非常に難しい. 次の定理は定積分と微分の逆操作である原始関数を結びつけるもので極めて重要である.

定理 2.4. [微分積分学の基本定理] f が $I = [a,b]$ 上で積分可能で, $[a,b]$ 上で原始関数 $F(x)$ をもつならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)(= [F(x)]_a^b).$$

証明. Δ を I の n 等分とする. F に微分に関する平均値の定理を適用して各 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ で

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(t_k)\Delta_k$$

となる $t_k \in I_k$ が存在する. ゆえに

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k$$

となる. f は定積分可能なので最後の項は $n \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ である. □

定積分は一つの数である. 定積分を a からある部分 x まで考えてそれを x の関数と思うことができる. それを不定積分という. つまり,

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

を x の関数と思うのである. これを $f(x)$ の**不定積分**という. 関数 $f(x)$ が連続であれば不定積分は微分可能であり, 原始関数となるが, 連続でなければ原始関数は存在せず, 不定積分と原始関数は同じではない. 原始関数のときに慣れから積分・積分と言ったが, 本来は別のものである. ただしこれらのことはあまり気にしなくてよいであろう.

3　積分の計算

3.1　積分の計算 1

演習 3.1. 次の積分を計算せよ．

$$(1)\ \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx, \quad (2)\ \int \frac{x^3+4x^2}{(x-1)(x+2)}\,dx,$$

$$(3)\ \int \frac{2x^2+5x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx, \quad (4)\ \int \frac{5x^2-2x}{x^3-1}\,dx, \quad (5)\ \int \frac{x(3x^2-4x+3)}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx,$$

$$(6)\ \int \frac{4x^2+3x-3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx, \quad (7)\ \int \frac{2x(2x^2-x+1)}{x^4-1}\,dx, \quad (8)\ \int \frac{2x^4+4x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

略解例　(1), (2) のように分子の次数のほうが高い場合は割り算をし, 分子の次数を低くする．その後部分分数分解する．(3) 以降はもともと分子の次数のほうが低いのでそのまま部分分数分解する．(1) x^4 を x^2+1 で割ると $x^4=(x^2-1)(x^2+1)+1$ がわかるので,

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1}\,dx = \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x.$$

最右辺が答え．(2) x^3+4x^2 を分母 x^2+x-2 で割ると $(x+3)(x^2+x-2)-x+6$ がわかるので,

$$\int \frac{x^3+4x^2}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{-x+6}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

となる．二項目が積分できればよい．分母の微分に近い形が分子にあるが, 部分分数分解したほうがはやいであろう．

$$\frac{-x+6}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

とすると, $a=5/3$, $b=-8/3$ となるので,

$$\frac{-x+6}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{x-1} - \frac{8}{x+2}\right)$$

となる．ゆえに

$$\int \frac{-x+6}{(x-1)(x+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(5\frac{1}{x-1} - 8\frac{1}{x+2}\right)\,dx = \frac{1}{3}\left(5\log|x-1| - 8\log|x+2|\right)$$

となる．ゆえに答えは

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{3}\left(5\log|x-1| - 8\log|x+2|\right).$$

(3)

$$\frac{2x^2+5x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

なので答えは $\log|x-1| + 2\log|x+1| - \log|x+2|$.

(4) 分母は $(x-1)(x^2+x+1)$ と因数分解できる．ゆえに部分分数分解して,

$$\frac{5x^2-2x}{x^3-1} = \frac{4x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2(2x+1)-1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-1}$$

より, 問題の積分は

$$\int \frac{4x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{dx}{x-1} = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{dx}{x-1}$$

となる. あとは第二項が積分できればよい. 分母を平方完成して $x^2+x+1=(x+(1/2))^2+3/4$ となる. $t=x+(1/2)$ とおけば $dt=dx$ なので,

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dt}{t^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

となる. ゆえに答えは

$$2\log|x^2+x+1| - \sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \log|x-1|.$$

(5)

$$\frac{x(3x^2-4x+3)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

より, 答えは $\log|x^2+1| + \log|x-1| - (x-1)^{-1}$.

(6)

$$\frac{4x^2+3x-3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

より, 答えは $\log|x-1| + 3\log|x+1| - (x+1)^{-1}$.

(7) 分母は $(x-1)(1+x)(1+x^2)$ と因数分解できる. ゆえに部分分数分解して,

$$\frac{2x\left(2x^2-x+1\right)}{x^4-1} = \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

となるので答えは $\dfrac{1}{2}\log|x^2+1| - \arctan x + 2\log|x+1| + \log|x-1|$.

(8)

$$\frac{2x^4+4x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

となる. 最後の項以外は積分できる.

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

となる. 第二項の積分が問題.

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

とおく. これは次のように考えて部分積分するのであった:

$$\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}x$$

より,

$$\begin{aligned} I &= \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}x\,dx = \arctan x - \frac{1}{2}\left(-(x^2+1)^{-1}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) \\ &= \arctan x - \frac{1}{2}\left(-(x^2+1)^{-1}x + \arctan x\right) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

ゆえに答えは

$$\log|x| + \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

演習 3.2. 次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \quad (2)\ \int \frac{1-\cos x}{1+\sin x}\,dx, \quad (3)\ \int \frac{1}{1+\cos x}\,dx,$$

略解例 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換する. こう置換すると

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となる. (1) 置換と計算により,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt$$

となる. これは有理式で, 分母の次数が分子より大きいため, 部分分数分解する.

$$\frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{(1+t)^2} + \frac{dt+e}{1+t^2}$$

とおくと, $a=0, b=0, c=-2, d=0, e=2$ となるので,

$$\frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)} = -\frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t^2}$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}\int \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt &= \int \left(-\frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t^2}\right)dt = -2\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= 2(1+t)^{-1} + 2\arctan t = 2\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^{-1} + 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = 2\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^{-1} + x\end{aligned}$$

となる. 最後の式が答え. (2) 置換と計算により,

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{4t^2}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt$$

となる. これは有理式で, 分母の次数が分子より大きいため, 部分分数分解する.

$$\begin{aligned}\int \frac{4t^2}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt + 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \log\left|t^2+1\right| - 2\log|t+1| - 2\,(t+1)^{-1} \\ &= \log\left|\tan^2\frac{x}{2}+1\right| - 2\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| - 2\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^{-1}\end{aligned}$$

となる. 最後の式が答え. (3) 置換と計算により,

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int dt = t = \tan\frac{x}{2}.$$

演習 3.3. 次の積分を計算せよ.

$$(1)\ \int x\sqrt{x+1}\,dx,\quad (2)\ -\frac{1}{4}\int\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}\,dx,\quad (3)\ \int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}},$$

$$(4)\ \int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{-x^2+3x-2}},\quad (5)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},\quad (6)\ \int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

略解例 ルートを積分する際のテクニックを使う. (1) このようなルートの中が一次式の場合は $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ の, $c=0, d=1$ の場合と解釈する. $t=\sqrt{x+1}$ と置換すると, $x=t^2-1$ となり, $dx=2t\,dt$ となるので,

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int 2t^2(t^2-1)\,dt=\int 2t^4-2t^2\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3.$$

最右辺が答え. (2) $t=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x+1}}$ と置換すると, $x=\dfrac{-t^2+1}{t^2+1}$, $dx=\dfrac{-4t}{(t^2+1)^2}$ となるので,

$$-\frac{1}{4}\int\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}\,dx=\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

となる. これは部分積分する.

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt&=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}t\,dt=\frac{1}{2}\left(-(t^2+1)^{-1}t+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-(t^2+1)^{-1}t+\arctan t\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}^2+1\right)^{-1}\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}+\arctan\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{x+1}{2}\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}+\arctan\sqrt{\frac{-x+1}{x+1}}\right)\end{aligned}$$

(3) ルートの中身は二次式で x^2 の係数は負なので, ルートの中身 $=0$ の二つの解を求めると $x=1,2$ となる. ゆえに $t=\sqrt{-\dfrac{x-1}{x-2}}$ と置換する. このとき,

$$x=\frac{2t^2+1}{t^2+1},\quad dx=\frac{6t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

より, 問題の積分は

$$\int\frac{2}{t^2}\,dt=-2\frac{1}{t}=-2\sqrt{-\frac{x-2}{x-1}}$$

となる. 最右辺が答え. (4) も (3) と同様に置換すると問題の積分は

$$2\int\frac{1+t^2}{t^4}\,dt=2\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)\,dt=-2\left(\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}\right)=-2\left(\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{x-2}{x-1}}^3+\sqrt{-\frac{x-2}{x-1}}\right)$$

となる. 最右辺が答え. (5) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換する. このとき,

$$x=\frac{t^2-1}{2t},\quad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

となる．ゆえに問題の積分は

$$\int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right)\,dt = \log|t-1| + \log|t+1|$$
$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+1}-1\right| - \log\left|x+\sqrt{x^2+1}+1\right|$$

となる．最右辺が答え．(6) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ と置換する．このとき,

$$x = \frac{t^2+1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2-1}{2t^2}\,dt$$

となる．ゆえに問題の積分は

$$\int \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

となる．最右辺が答え．

3.2 積分の計算 2

演習 3.4. 次の積分を計算せよ．

$$(1)\ \int \arctan x\,dx, \quad (2)\ \int \sin(\log x)\,dx, \quad (3)\ \int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

略解例 見たことのない形なので部分積分を考えてみる．(1) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ なので, $\arctan x$ を $1\cdot\arctan x$ と見て部分積分する．

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log|1+x^2|$$

となり, 最右辺が答え．(2) も, 問題の式の微分はできるため, 部分積分を考えてみる．問題の積分を I とおく．$\sin(\log x)' = \dfrac{\cos(\log x)}{x}$ より,

$$I = x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx$$

となる．もう一度部分積分をすれば I が出てくる．

$$I = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) + \int -\sin(\log x)\,dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - I$$

ゆえに

$$I = \frac{x\sin(\log x) - x\cos(\log x)}{2}.$$

(3) はちょっと戸惑うが,

$$\frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^3\cdot x^4}{\sqrt{1-x^4}}$$

とみれば, 下の式の微分が上に出ていると思える. ゆえに問題の積分は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,x^4\,dx &= -\frac{1}{4}\int (1-x^4)'(1-x^4)^{-1/2}\,x^4\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\left(2(1-x^4)^{1/2}\,x^4 - \int 2(1-x^4)^{1/2}4x^3\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(2(1-x^4)^{1/2}\,x^4 + 2\int (-4x^3)(1-x^4)^{1/2}\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(2(1-x^4)^{1/2}\,x^4 + 2\frac{2}{3}(1-x^4)^{3/2}\right)
\end{aligned}$$

となる. 最右辺が答え. 計算してもよいがこのままでもよい.

4　広義積分

無限に広がっていくような部分でも面積が有限の場合はある. そのような場合の積分を考えよう.

4.1　広義積分 (有界開区間の場合)

$I=[a,b)$ 上の連続関数 f の $[a,b]$ 上の定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

で定める. このような積分を広義積分といい, この極限が存在するとき, 広義積分は**収束する**とか, 広義積分の**値が存在する**という. a のほうが定義されていない場合も同様.

I 上に定義されていないところが複数ある場合はそれぞれ区切って極限をとる. その際, 各区切りには定義されていない部分がひとつだけであるようにとり, 極限はそれぞれ別にとる. すべての極限が存在するとき, その広義積分は収束する, 値が存在するという.

例 4.1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

例 4.2.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x(x-2)} + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_1^{2-\varepsilon'} \frac{dx}{x(x-2)}$$

であって

$$\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x(x-2)} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x(x-2)}$$

ではない.

4.2 広義積分 (無限区間の場合)

区間が無限区間の場合も同様に極限で定義する. $I = [a, \infty)$ 上の連続関数 f の $[a, \infty)$ 上の定積分を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

で定める. b が $-\infty$ の場合も同様. 両方が無限区間である場合や, 片方が無限区間で, 他に定義されていない点があるような場合は区切って定義する. もちろん極限は別々にとる.

例 4.3.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} + \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2}.$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 e^{-x^2}\,dx + \lim_{M'\to\infty} \int_0^{M'} e^{-x^2}\,dx.$$

ここで, 区切るところを 0 や 1 ととっているが, これらは関数が定義されている部分であればどこをとってもよい.

4.3 広義積分の計算

広義積分では次の 2 点が問題となる. まず, 広義積分が収束しているか. 次に収束していた場合, 値を求められるか.

広義積分に対して, 拡張された定義域を込めて原始関数がある場合はなにも難しくない. そのまま極限をとればよい.

例題 4.4. 次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (2)\ \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad (3)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x}, \quad (4)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}, \quad (5)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

略解例 まず, 広義積分であることの認識から始める.

(1) $x = 0$ のとき, 非積分関数の分母 $= 0$ となるので広義積分である. 他は問題ない.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[2x^{1/2}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-\varepsilon^{1/2}) = 2.$$

ゆえにこの広義積分は収束し, 値は 2.

(2) $x = 0$ のとき, 非積分関数の分母 $= 0$ となるので広義積分である. 他は問題ない.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} [\log|x|]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} (\log 1 - \log\varepsilon) = \infty.$$

ゆえにこの広義積分は収束しない.

(3) 区間が無限に行っているので広義積分である．他は問題ない．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}(\log M - \log 1) = \infty.$$

ゆえにこの広義積分は収束しない．

(4) 区間が無限に行っているので広義積分である．他は問題ない．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right) = 1.$$

ゆえにこの広義積分は収束し, 値は 1.

(5) 区間が無限に行っているので広義積分である．さらに $x=0$ で分母 $=0$ となるので, ここも広義積分である．他は問題ない．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} + \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 + \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M$$

となり, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1$ の項に極限が存在しないためにこの広義積分は収束しない． 定義されていない点 (近づき方) が複数ある場合はそれぞれ独立に極限をとる必要がある．

例題 4.5. 次の積分を求めよ．

$$(1)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}, \quad (2)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

略解例 まず, 広義積分であることの認識から始める．両方 $x=0$ が中身の分母 $=0$ となる．区間は -1 から 1 までなので, 右からと左から, 独立に極限をとる必要がある．独立にとらないと, 答えが違ってしまう場合もある．

(1) **(誤答例 1)**

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{-1}^1 = \log|1| - \log|-1| = \log 1 - \log 1 = 0.$$

ゆえに答えは 0. (これは $x=0$ で中身の分母が 0 になっているので広義積分であり, 極限を考えなければいけない．そうしていないので論外の誤答.)

(誤答例 2)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\varepsilon}^\varepsilon \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}[\log|x|]_{-\varepsilon}^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}(\log|\varepsilon| - \log|\varepsilon|) = \lim_{\varepsilon\to+0} 0 = 0.$$

ゆえに答えは 0. (これは $x=0$ での極限を共通の $\varepsilon\to 0$ でとっているので, いけない．極限は独立にとる．このように極限を一緒にとった場合の広義積分の値も考ないことはなく, コーシーの主値と呼ばれるが, 広義積分としては誤り.)

(正答例)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}[\log|x|]_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(\log|\varepsilon| - \log|\varepsilon'|\right).$$

となり, 最後の極限は存在しないので, この広義積分は収束しない.

(2) も同じような誤答をしてしまうと答えがでるが正答は以下. **(正答例)**

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon'}=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right).$$

となり, 最後の極限は存在しないので, この広義積分は収束しない.

例題 4.6. 次の積分を求めよ (以下この文言は「次の広義積分の値が存在するならそれを求めよ」を意味する).

$$(1)\ \int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}},\quad (2)\ \int_0^\infty xe^{-x}\,dx,\quad (3)\ \int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

略解例 (1) これは $x=0,2$ で分母がゼロになるため, 広義積分である. そのため,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

を計算する. 積分は原始関数を求められる形なので原始関数を求める. (これは不定積分のところでやっているので省略する.)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\arctan\sqrt{\frac{-x}{x-2}}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left[2\arctan\sqrt{\frac{-x}{x-2}}\right]_{\varepsilon}^{2-\varepsilon'}\\ &= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(\arctan\sqrt{\frac{-2+\varepsilon'}{-\varepsilon'}}-\arctan\sqrt{\frac{-\varepsilon}{\varepsilon-2}}\right)\\ &= \pi\end{aligned}$$

となる. (2) 区間が ∞ なので広義積分である. 他にやばいところはない. ゆえに

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}\,dx$$

を計算する.

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^M=1$$

となる. (3) $x=1$ で分母がゼロとなるので広義積分である. 他にやばいところはない. ゆえに,

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-x+1}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

と分ける.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-x+1}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}}\left(\left[-\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon}+\left[\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon'}^{2}\right)=4.$$

となる. 以降は $\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^M$ 等をそのまま $[-e^{-x}(x+1)]_0^\infty$ などとかく.

演習 4.7. 次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},\quad (2)\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}},\quad (3)\ \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)},$$
$$(4)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}, (5)\ \int_0^\infty \frac{x^5}{(1+x^3)^3}\,dx,\quad (6)\ \int_0^\infty e^{-x}\,dx,$$

略解例 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}$ より, 答えは 2. (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}$ より, 答えは 2. (3) $\int \frac{dx}{x(1-x)} = \log|x| - \log|1-x|$ より, この広義積分は収束しない. (4) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1)$ より, 答えは $\lim_{M\to\infty} \arctan M - \arctan 1 = \pi/4$. (5) $\int \frac{x^5}{(1+x^3)^3}\,dx = \int \frac{x^2}{(1+x^3)^3} x^3\,dx = \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{(1+x^3)^2} - \frac{1}{1+x^3}\right)$ より, 答えは 1/6. (6) $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$ より, 答えは 1.

演習 4.8. 次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad (2)\ \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx,\quad (3)\ \int_0^2 \log x\,dx.$$

略解例 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ より, 答えは π. (2) $t = \sqrt{x}$ とする. x が $0 \sim 1$ と動くとき t も $0 \sim 1$ と動く. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int_0^1 \log t\,dt = 4\,[t\log t - t]_0^1 = -4$ となる. 最後はロピタルの定理を使って

$$\lim_{t\to+0}(t\log t - t) = \lim_{t\to+0} \frac{\log t - 1}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

と求めた. (3) 前問と同様で, 答えは $2\log 2 - 2$.

演習 4.9. 次の積分を求めよ.

$$(1)\ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx,\quad (2)\ \int_0^1 x\log x\,dx,\quad (3)\ \int_0^1 x(\log x)^2\,dx.$$

略解例 (1) 普通に積分してもよいが,

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\left(\frac{\cos s}{\sin x}\right)'$$

に気づけば楽. $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{\cos s}{\sin x} + \frac{1}{x} = \frac{x\cos x + \sin x}{x\sin x}$ となる. $x \to 0$ の極限はロピタルの定理を使おう.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cos x - 3\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

なので答えは $2/\pi$. (2) 部分積分して $\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$ となる. $\lim_{x\to+0} x^2\log x$ が求まればよい. ロピタルの定理を使ってもよいがここでは別のやり方を示しておこう. $x = e^t$ とする

と, $x \to +0$ は $t \to -\infty$ なので, $\lim_{x \to +0} x^2 \log x = \lim_{t \to -\infty} te^{2t} = 0$. ゆえに, 求める広義積分は $-1/4$.

(3) 二回部分積分して $\int x(\log x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}$ となる. 前問と同様に極限を計算して, 答えは 1/4.

4.4 広義積分可能の条件, ガンマ関数・ベーター関数

原始関数がわからなくても, 広義積分の収束性が示せる場合がある. まず次を確認しておこう.

補題 4.10.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & (\alpha < 1) \\ \text{収束しない} & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\beta + 1} & (\beta < -1) \\ \text{収束しない} & (\beta \geq -1) \end{cases}$$

証明は容易. 図 4.4, 4.4 を見てそれぞれの関数が収束していそうな様子を感じ取れ.

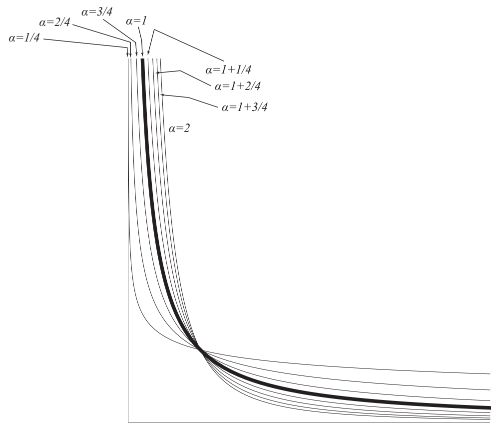

図 1: $\frac{1}{x^\alpha}$ のグラフの $x = 0$ の近く

次が成り立つ.

定理 4.11. 関数 f と g は区間 I 上で $|f| < g$ であり, $\int_I g\,dx$ が収束しているとする. このとき $\int_I f\,dx$ も収束する.

また, 次も成り立つ.

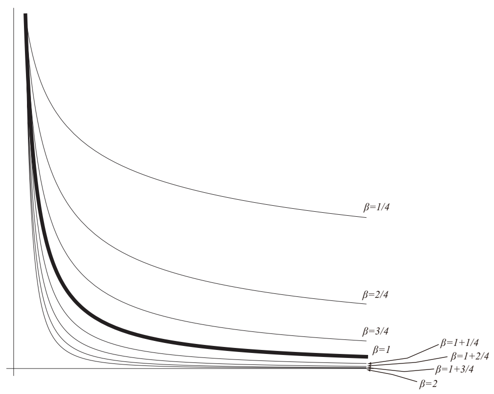

図 2: $\dfrac{1}{x^\beta}$ のグラフの x が大きいところ

定理 4.12. 関数 f は区間 $(a,b]$ 上で連続で,

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon_2} f(x)\,dx = 0$$

ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束している. また, 区間 $[a,\infty)$ 上で連続で,

$$\lim_{\substack{M_1\to\infty\\ M_2\to\infty}}\int_{M_1}^{M_2} f(x)\,dx = 0$$

ならば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する.

証明には極限の厳密な取り扱いを必要とする. 興味のある人は教科書をみよ. 次は応用上非常に有用である.

定理 4.13. 関数 f は区間 $(a,b]$ 上で連続であるとする. ある $\lambda<1$ が存在して

$$(x-a)^\lambda f(x)$$

が (a,b) 上で有界 (ある数 M より小さい) ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する. また, 関数 f は区間 $[a,b)$ 上で連続であるとする. ある $\lambda<1$ が存在して $(b-x)^\lambda f(x)$ が (a,b) 上で有界ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.

関数 f は区間 $[a,\infty)$ 上で連続であるとする. ある $\lambda>1$ が存在して

$$x^\lambda f(x)$$

が (a,∞) 上で有界ならば

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

は収束する.

例題 4.14. 次の積分は収束するか.

$$(1)\ \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx, \quad (2)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

略解例 (1) ∞ のところだけが問題. $x>0$ のとき, $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ となり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は収束するので, 問題の積分は収束する. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ より, $x=0$ のところは広義積分でない普通の積分.

$$\begin{aligned}\left|\int_{M_1}^{M_2}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| &= \left|\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{M_1}^{M_2} - \int_{M_1}^{M_2}\frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \\ &\le \frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\left|\int_{M_1}^{M_2}\frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le \frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\int_{M_1}^{M_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{M_1}.\end{aligned}$$

となる. これは $M_1\to\infty$ のとき 0 に収束するので, 問題の積分は収束する.

例題 4.15. 次の積分はいつ収束するか.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^a}.$$

略解例 $x=\infty$ 以外は問題ない. $t=\log x$ と置換すると,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^a} = \int_{\log 2}^\infty t^a\,dt$$

となる. ゆえに $a>1$ で収束. 広義積分の収束判定は全ての場合に適用出来る万能の方法はない. テイラー展開をして適当なところで切って積分が収束する関数を見つけるというくらいか.

例題 4.16. 次の積分が収束することを示せ.

$$(1)\ \Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-s}\,dx, \quad (2)\ B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

略解例 定理 4.13 をつかう. それぞれガンマ関数, ベーター関数という. 両方初等関数ではない. これらはこの先物理学や工学を学ぶ上で欠かせない. 積分で表されているので, とっつきにくいが, $\sin,\cos$ のようなものとして, 慣れてほしい. ガンマ関数の被積分関数のグラフをかくと, 図 4.4 のようになる. 全ての s で広義積分が収束しているように見えることを感じてほしい. ガンマ関数のグラフは 図 **??** のようになる.

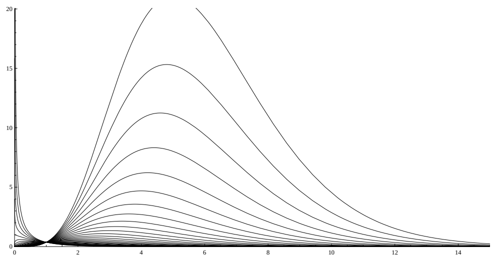

図 3: ガンマ関数の被積分関数 ($x > 1$ の部分の下から $s = 1/5, 2/5, \ldots, 5 + 4/5, 6$)

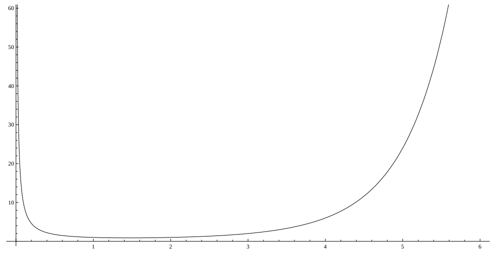

図 4: ガンマ関数のグラフ

例題 4.17. 次を示せ.

$$(1)\ \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (2)\ n \text{ が自然数ならば } \Gamma(n+1) = n!$$

略解例 部分積分.

例題 4.18. 次を示せ.

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t\ \cos^{2q-1} t\, dt.$$

略解例 $x = \sin^2 t$ と置換.

5 重積分

5.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

この用語を容易する必要がある. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ を n **次元ユークリッド空間**という. 特に $n = 2$ のとき, ユークリッド平面, 座標平面といい, $n = 3$ のとき, 座標空間という. $n = 2, 3$ のとき, 添字を使わずに $(x, y), (x, y, z)$ と書くこともある. 以降表記の簡略化のため $n = 2$ で説明することが多いが, すべて一般の n で同様の考察ができる.

定義 5.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 U が

- **閉集合**であるとは, U 内の点列 $a_n \in U$, $n = 1, 2, \ldots$ が ($\mathbb{R}^n$ に) 極限 a を持つならば $a \in U$ となるときをいう.
- **開集合**であるとは, 補集合が閉集合であるときをいう.
- **有界**であるとは, ある長方形 K が存在して $U \subset K$ となるときをいう.

例えば, $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ は閉集合, $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ は開集合, $\{(x, y) \,|\, 0 < x < 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ は閉集合でも開集合でもない.

例 5.2. 有限個の連続関数 $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\{(x, y) \,|\, f_1(x, y) \leq 0, \ldots, f_m(x, y) \leq 0\}$$

とあらわすことができる集合は閉集合であり,

$$\{(x, y) \,|\, f_1(x, y) < 0, \ldots, f_m(x, y) < 0\}$$

とあらわすことができる集合は開集合である.

この微分積分学の授業では, 上記の例だけで十分である.

5.2 重積分の定義

長方形 R 上の関数の積分をまず定義する. 一変数のときと同じようにリーマン和が収束するとき積分という. 一般の形の領域 D 上の積分は特性関数を考える. 集合 D 上の特性関数が積分可能のとき, D は面積確定といい, その積分値を D の面積という (後で絵と共に加筆).

線形性・領域の加法性が成り立つ.

5.3 累次積分

重積分の値を定義通り計算することは困難である. 重積分を一変数関数の積分を繰り返して計算する方法を累次積分という.

定理 5.3 (累次積分)**.** $[a, b]$ 上の連続関数 ϕ_1, ϕ_2 は, $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ をみたすとする. このとき,

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の有界集合で, 面積確定であり, D 上の連続関数 f に対して

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

証明. 絵を書くのがメンドイ. □

また, D が $[c,d]$ 上の連続関数 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ を用いて

$$D = \{(x,y) \,|\, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\}$$

ともあらわされているとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

も同様に成り立つ. このような積分の仕方を**累次積分**という. 累次積分では, $F(x)dx = dxF(x)$ の記法を用いて

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

のように書いたほうが問題を解く場面では便利なことが多い. 積分の順序が違うだけで積分の難易度が全然違うことがあるので, いろいろな順序を試してみるとよい.

例題 5.4. $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ の面積を求めよ.

略解例

$$\int_D 1dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\left[\frac{\sin 2x}{2} + x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

積分の順序を逆にして

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \pi.$$

とやってもよい.