可微分写像の特異点判定法とその応用

2014 年 9 月 8 日

佐治健太郎

概 要

可微分写像には一般に特異点があらわれる. 微少に摂動してもなくなることのない特異点をジェネリックな特異点と呼ぶが, ジェネリックな特異点に関してはその判定法が重要となる. 本連続講演ではジェネリックな特異点の使いやすい判定法の証明を述べる. また, 具体例をいくつか計算することにより, その使い方を紹介する. 全ての写像, 多様体は C^∞ 級微分可能とする.

1 座標と座標変換

1.1 座標と座標変換

主要参考文献は [20].

座標については本講演で非常に重要なので, 少々複雑ではあるが, 多様体論に則った定義を与える.

定義 1.1. U を (ある k 次元多様体の, または $\boldsymbol{R}^k$ の) 開集合とする. U の座標とは, $\boldsymbol{R}^k$ のある開集合 $\widetilde{U}$ への微分同相写像

$$\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \boldsymbol{R}^k$$

のことをいう. 点 $p \in U$ の座標とは $\varphi(p)$ のことをいう.

$q \in U$ に対して φ を成分であらわして, $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_k(q))$ のように書くと, $x_1, \dots, x_k$ は U 上の関数である. このことを q を省略して $\varphi = (x_1, \dots, x_k)$ のようにかく.

写像 $f : U \to V$ を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 V からへの写像とする. 座標 $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ をとり,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

を考える. $\varphi = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_m)$, $\psi = (\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n)$, とすると,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_m) = \Big(\widetilde{X}_1\big(f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{x})\big), \dots, \widetilde{X}_n\big(f \circ \varphi^{-1}(\widetilde{x})\big)\Big)$$

とかける. これを f の座標 φ, ψ による表示という. x_i, X_i を第 i 成分を対応させる関数として, とくに, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m), \psi = (X_1, \ldots, X_n)$ を座標にとると, f の表示がひとつ得られる. これが通常我々が思う写像の座標表示である. これをそのまま f とかく. $f_i = X_i \circ f$ とかいて, f を

$$f(x) = \bigl(f_1(x), \ldots, f_n(x)\bigr)$$

とかく書き方は便利でよく使う.

定義 1.2. f の座標 φ, ψ による表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ に対して新しい微分同相写像

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \overline{U}, \quad \widetilde{\psi} : \widetilde{V} \to \overline{V}$$

をとり, $\widetilde{\psi} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ を考えると, 別の表示が得られる. これを**座標変換**という. $\widetilde{\varphi}$ を**定義域の座標変換**, $\widetilde{\psi}$ を**像域**[1] **の座標変換**という.

2 写像芽

主要参考文献は [5, 10, 22]

2.1 写像芽

0 の近傍 U 上で定義された写像 $f : U \to \boldsymbol{R}^n$ と 0 の近傍 V 上で定義された写像 $f : V \to \boldsymbol{R}^n$ が 0 **において同じ写像芽を定める**とは, ある 0 の近傍 W が存在して $f|_W = g|_W$ が成り立つときをいう. これは同値関係となり, この同値類を $[f]_0$, $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, f(0))$ などとかく. またそのまま f とかくこともある. また 0 での値にさほど意味は無いので以降は $f(0) = 0$ とする. $C^\infty(m, n) = \{f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)\}$ とおく.

[1]像域とは写像の行き先の集合のこと. **終域**, **ターゲット**とも言われる. 値域と言われることもあるが, 中学校時代に「次の関数の値域を求めよ. 」という問題があったように値域だと, f の像のことを指す場合もあるのでここでは像域と呼ぶことにする.

2.2 右左同値

2 つの写像芽 $f, g : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が $\mathcal{A}$ **同値** $(\sim)$ であるとは, 定義域の座標変換 φ と像域の座標変換 ψ が存在して

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

がなりたつときをいう. 2 つの写像芽が与えられたとき, それらが $\mathcal{A}$ 同値か否か調べるのは簡単ではない. 2 つの空間の座標がからみあうからである. 我々は集合 $C^\infty(m,n)/\sim$ を手に入れたわけであるが, ここにはどのような元が入っているであろうか? 次を考えてみよう.

命題 2.1. $f \in C^\infty(m,n)$, $m \leq n$ とし, $\operatorname{rank} df_0 = m$ とする. このとき任意の定義域の座標 x に対して像域の座標 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が存在して $X_i \circ f(x) = x_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $X_i \circ f(x) = 0$ $(m+1 \leq i \leq n)$ が成り立つ. つまり, これらの座標に関する表示が $f = (x_1, \ldots, x_m, 0, \cdots, 0)$ となる.

Proof. 座標 φ に対して座標 ψ を適当にとって $\psi \circ f \circ \varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ とする. 適当に像域の座標の順番を入れ替えて

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \cdots & (f_1)_{x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \cdots & (f_m)_{x_m} \end{pmatrix} = m$$

とできる. 新しい写像 $\widetilde{\psi}$ を

$$\widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) = (f_1(x), \ldots, f_m(x), f_{m+1}(x) + X_{m+1}, \ldots, f_n(x) + X_n)$$

と定める. $\widetilde{\psi}$ のヤコビ行列の階数は n となるので $\widetilde{\psi}$ は微分同相写像であり, 単射である (ように原点の近傍をとる). このとき,

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\psi}^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \widetilde{\psi}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

であるが, $\widetilde{\psi}$ は単射なので,

$$\widetilde{\psi}^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

が成り立つ. φ, $\widetilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ を新しい座標にとれば, 結論が成り立っている. $\square$

これは参考までに次が成り立つ．

命題 2.2. $f \in C^\infty(m,n)$, $m \geq n$ とし, $\operatorname{rank} df_0 = n$ とする．このとき任意の像域の座標 X に対して定義域の座標 $x = (x_1, \ldots, x_m)$ が存在して $X_i \circ f(x) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ．つまり, これらの座標に関する表示が $f = (x_1, \ldots, x_n)$ となる．

証明は省略

つまり, $m \leq n$ のとき, $C^\infty(m,n)/\sim$ の中で $\operatorname{rank} df_0 = m$ であるものはすべて同じ点となっている．ではそうでないものはどうであろうか? これが非常に複雑なのである．以降で与える例はすべて互いに $\mathcal{A}$ 同値でない．

2.3 関数の例

以下の例で特異点の名前が τ であるものは, それと $\mathcal{A}$ 同値なものは全て τ と呼ばれる．

例 2.3. $f_1(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$ (指数 0 のモース関数), $f_2(x_1,x_2) = x_1^2-x_2^2$ (指数 1 のモース関数, サドル), $f_3(x_1,x_2) = -x_1^2-x_2^2$ (指数 2 のモース関数), $f_4(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^3$ (A_2 関数), $f_5(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^4$ (A_3 関数), $f_6(x_1,x_2) = x_1^3+x_1x_2^2$ (D_4^+ 関数), $f_7(x_1,x_2) = x_1^3-x_1x_2^2$ (D_4^- 関数).

2.4 平面曲線の例

例 2.4. $f(x) = (x^2, x^3)$ (カスプ, $(2,3)$-カスプ, $3/2$-カスプ, 通常カスプ), $f(x) = (x^2, x^5)$ ($(2,5)$-カスプ, $5/2$-カスプ, ランフォイドカスプ). $f(x) = (x^3, x^4)$ ($(3,4)$-カスプ, $4/3$-カスプ, E_6-カスプ).

2.5 平面写像の例

例 2.5. $f_f(x_1,x_2) = (x_1, x_2^2)$ (折り目, フォールド), $f_c(x_1,x_2) = (x_1, x_2^3 + x_1x_2)$ (尖点, (ホイットニー) カスプ), $f_l(x_1,x_2) = (x_1, x_2(x_1^2+x_2^2))$ (唇), $f_b(x_1,x_2) = (x_1, x_2(x_1^2-x_2^2))$ (嘴), $f_s(x_1,x_2) = (x_1, x_2^4 + x_1x_2)$ ((平面) 燕の尾, (平面) スワローテイル).

2.6 曲面の例 1

例 2.6. $f_w(x_1,x_2) = (x_1, x_2^2, x_1x_2)$ (ホイットニーの傘, 交差帽子), $f_{cmm+}(x_1,x_2) = (x_1, x_2^2, x_1(x_1^2+x_2^2))$ (+ 陳・松本・モンド), $f_{cmm-}(x_1,x_2) = (x_1, x_2(x_1^2+x_2^2))$ (− 陳・松本・モンド).

2.7 曲面の例 2

応用上重要な対象に波面的写像がある.
A C^∞-map $f : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ is called a *frontal* if there exists a vector field (*unit normal v.f.*) $\nu : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (S^2, \nu(0))$ along f s. t. $\langle df(X), \nu\rangle = 0$ for any p and $X \in T_p\boldsymbol{R}^2$. If $(f,\nu) : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}^3 \times S^2, (f,\nu)(0))$ is an imm., f is called a *front*. 波面的写像の例を与える.

例 2.7. $f_c(x_1,x_2) = (x_1, x_2^2, x_2^3)$ (カスプ辺), $f_s(x_1,x_2) = (x_1, 3x_2^4 + x_1x_2, 4x_2^3 + 2x_1x_2)$ (燕の尾, スワローテイル), $f_{cl}(x_1,x_2) = (u, 4v^3 + 2v(s+2u^2), 3v^4 + v^2(s+2u^2))$ $s = 0$ (カスプ的唇), $f_{cb}(x_1,x_2) = (u, 4v^3 + 2v(s-2u^2), 3v^4 + v^2(s+2u^2))$ $s = 0$ (カスプ的嘴), $f_{cb}(x_1,x_2) = (u, 3sv^2 + 5v^4 + 2uv, 2sv^3 + 4v^5 + v^2u - u^2)$ $s = 0$ (カスプ的蝶), $f_{D_4^+}(x_1,x_2) = (2uv, u^2+2sv+3v^2, 2u^2v+sv^2+2v^3)$ $s = 0$ (カスプ的 D_4^+), $f_{D_4^-}(x_1,x_2) = (2uv, -u^2+2sv+3v^2, -2u^2v+sv^2+2v^3)$ $s = 0$ (カスプ的 D_4^-).

2.8 モラン写像 1

[18]

$$h_{0,r} : x \mapsto \big(x_1, \ldots, x_{m-1}, h_1(x), \ldots, h_{n-m+1}(x)\big), \tag{2.1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_m)$, and

$$\begin{aligned} h_i(x) &= \sum_{j=1}^{r} x_{(i-1)r+j}x_m^j \quad (i = 1, \ldots, n-m), \\ h_{n-m+1}(x) &= \sum_{j=1}^{r-1} x_{(n-m)r+j}x_m^j + x_m^{r+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.9 モラン写像 2

[19]

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{m-n}, z) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{n-1}, q(y_1, \dots, y_{m-n}) + z^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i z^i\right).$$

ただしここで, $q(y_1, \dots, y_{m-n}) = \sum_{i=1}^{m-n} \pm y_i^2$

2.10 $\mathcal{A}_e$ 余次元

[16] $\mathcal{E}_m, \mathcal{M}_m$, $\theta(f)$.

与えられた写像に $\mathcal{A}$ 同値な写像全体の占める部分はどれくらいあるのであろうか. $f \in C^\infty(m, n)$ に対して

$$\mathcal{A}(f) = \{g \in C^\infty(m, n) \mid g \sim_{\mathcal{A}} f\}$$

とおく. f の近くでの $\mathcal{A}(f)$ はどうなっているのであろうか. ただし, $C^\infty(m, n)$ は多様体でないので接空間は考えられない. ただし, 接空間のようなものは考えられる.

$$T\mathcal{A}(f) = \left\{ \left(f(x), \frac{\partial}{\partial \lambda} t\Big(f\big(s(x, \lambda)\big), \lambda\Big)\Big|_{\lambda=0} \right) \,\middle|\, t(X, \lambda), s(x, \lambda) \text{ は微分同相写像芽の族} \right\}$$

とおく. さて, これはどこの集合の元なのであろうか. $f(x)$ の近くでの f の変形をあらわしているので, これは f に沿ったベクトル場である.

$$\begin{aligned} x =& (x_1, \dots, x_m), \\ s(x, \lambda) =& \big(s_1(x, \lambda), \dots, s_m(x, \lambda)\big), \\ f(x) =& \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big), \\ t(X, \lambda) =& \big(t_1(X, \lambda), \dots, t_n(X, \lambda)\big) \end{aligned}$$

として合成関数の微分を実行する. 以降,

$$(x_i)_{i=1}^m = (x_1, \dots, x_m)$$

のような記法をつかう.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}t\Big(f\big(s(x,\lambda)\big),\lambda\Big) &= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial t_i}{\partial X_j}\Big(f\big(s(x,\lambda)\big),\lambda\Big)\frac{\partial f_j}{\partial\lambda}\big(s(x,\lambda)\big)+\frac{\partial t_i}{\partial\lambda}\Big(f\big(s(x,\lambda)\big),\lambda\Big)\right)_{i=1}^{n}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial t_i}{\partial X_j}\Big(f\big(s(x,\lambda)\big),\lambda\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\big(s(x,\lambda)\big)\frac{\partial s_k}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial t_i}{\partial\lambda}\Big(f\big(s(x,\lambda)\big),\lambda\Big)\right)_{i=1}^{n}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

となるので, s,t が原点を原点に移すとは限らない場合,

$$T\mathcal{A}(f)=tf(\theta(m))+wf(\theta(n))$$

となる. したがって, f の変形全体の中で f と $\mathcal{A}$ 同値なものが占める部分の f に近い部分の状況を示す

$$\dim\left(\theta(f)\Big/tf(\theta(m))+wf(\theta(n))\right)$$

を $\mathcal{A}_e$ **余次元**という.

例 2.8. $f(u,v)=(u,v^2)$ で計算してみる.

$$\begin{pmatrix}a_1(u,v)\\2va_2(u,v)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1(u,v^2)\\b_2(u,v^2)\end{pmatrix}$$

が全ての関数を作ればよい.

例 2.9. $f(u,v)=(u,v^3)$ で計算してみる.

$$\begin{pmatrix}a_1(u,v)\\3v^2a_2(u,v)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1(u,v^3)\\b_2(u,v^3)\end{pmatrix}$$

はどれだけの関数をつくるか. 上の要素はよい. 下は v^2 の部分と定数項, u の関数はある. ゆえに v の項がない.

$$\theta(f)\Big/tf(\theta(m))+wf(\theta(n))=\{av\,|\,a\in\boldsymbol{R}\}$$

より $\mathcal{A}_e$ 余次元は 1.

参考までに波面の場合は普遍開折余次元のようなものをみるとよい.

$$\rho(x,u,\lambda)F(\Phi(x,u,\lambda),\varphi(u,\lambda))$$

を λ で微分して

$$\dim\left(\frac{\theta(F)}{\left\langle \dfrac{\partial F}{\partial x}, F\right\rangle_{\mathcal{E}_{x,u}} + \left\langle \dfrac{\partial F}{\partial u}\right\rangle_{\mathcal{E}_u}}\right)$$

を得る.

2.11 分類

関数 (参考文献 [5, 10, 22])

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
$x_1^2 \pm x_2^2$	0	モース関数, A_1
$x_1^2 + x_2^3$	1	A_2
$x_1^2 \pm x_2^4$	2	$A_3^{\pm}$
$x_1^2 + x_2^5$	3	A_4
$x_1^3 \pm x_1x_2^2$	3	$D_4^{\pm}$

平面曲線

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(t^2, t^3)	1	$(2,3)$-カスプ

平面写像 (参考文献 [24])

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(u, v^2)	0	折り目, フォールド
$(u, v^3 + uv)$	0	カスプ
$(u, v(u^2 \pm v^2))$	1	唇/嘴
$(u, v^4 + uv)$	1	平面スワローテイル

曲面 (参考文献 [2, 17])

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(u, v^2, uv)	0	ホイットニーの傘, 交差帽子, S_0
$(u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$	1	陳・松本・モンド ±, $S_1^{\pm}$

波面的写像 (参考文献 [1, 10])

写像	名前
(x_1, x_2^2, x_2^3)	カスプ辺, A_2
$(x_1, 3x_2^4 + x_1x_2, 4x_2^3 + 2x_1x_2)$	燕の尾, スワローテイル, A_3
$(u, 4v^3 + 2v(s + 2u^2), 3v^4 + v^2(s + 2u^2))\ s = 0$	カスプ的唇
$(u, 4v^3 + 2v(s - 2u^2), 3v^4 + v^2(s + 2u^2))\ s = 0$	カスプ的嘴
$(u, 3sv^2 + 5v^4 + 2uv, 2sv^3 + 4v^5 + v^2u - u^2)\ s = 0$	カスプ的蝶
$(2uv, u^2 + 2sv + 3v^2, 2u^2v + sv^2 + 2v^3)\ s = 0$	D_4^+
$(2uv, -u^2 + 2sv + 3v^2, -2u^2v + sv^2 + 2v^3)\ s = 0$	カスプ的 D_4^-

2.12 分類

関数

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
$x_1^2 \pm x_2^2$	0	モース関数, A_1
$x_1^2 + x_2^3$	1	A_2
$x_1^2 \pm x_2^4$	2	$A_3^{\pm}$
$x_1^2 + x_2^5$	3	A_4
$x_1^3 \pm x_1x_2^2$	3	$D_4^{\pm}$

(参考文献 [4,9,20])

平面曲線

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(t^2, t^3)	1	$(2, 3)$-カスプ

平面写像

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(u, v^2)	0	折り目, フォールド
$(u, v^3 + uv)$	0	カスプ
$(u, v(u^2 \pm v^2))$	1	唇/嘴
$(u, v^4 + uv)$	1	平面スワローテイル

(参考文献 [4,9,20], J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.)

曲面

写像	$\mathcal{A}_e$ 余次元	名前
(u, v^2, uv)	0	ホイットニーの傘, 交差帽子, S_0
$(u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$	1	陳・松本・モンド ±, $S_1^{\pm}$

(参考文献 [4,9,20], X. Chen and T. Matumoto, *On generic* 1*-parameter families of* C^∞*-maps of an* n*-manifold into a* $(2n-1)$*-manifold*, Hiroshima Math. J. **14** (1985), 547–550, D. Mond, *On the classification of germs of maps from* $\boldsymbol{R}^2$ *to* $\boldsymbol{R}^3$, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 333–369.)

波面的写像

写像	名前
(x_1, x_2^2, x_2^3)	カスプ辺, A_2
$(x_1, 3x_2^4 + x_1x_2, 4x_2^3 + 2x_1x_2)$	燕の尾, スワローテイル, A_3
$(u, 4v^3 + 2v(s + 2u^2), 3v^4 + v^2(s + 2u^2))\ s = 0$	カスプ的唇
$(u, 4v^3 + 2v(s - 2u^2), 3v^4 + v^2(s + 2u^2))\ s = 0$	カスプ的嘴
$(u, 3sv^2 + 5v^4 + 2uv, 2sv^3 + 4v^5 + v^2u - u^2)\ s = 0$	カスプ的蝶
$(2uv, u^2 + 2sv + 3v^2, 2u^2v + sv^2 + 2v^3)\ s = 0$	カスプ的 D_4^+
$(2uv, -u^2 + 2sv + 3v^2, -2u^2v + sv^2 + 2v^3)\ s = 0$	カスプ的 D_4^-

(参考文献 [1,9])

3　判定法

3.1　二変数関数

関数 f のテイラー展開を

$$f(u,v)=\sum_{i,j}\frac{1}{i!j!}a_{ij}u^i v^j$$

とする．3 次の項を $c(u,v)$ とおく: $c(u,v)=\sum_{i+j=3}\dfrac{1}{i!j!}a_{ij}u^i v^j$.

定理 3.1. f は $\det \operatorname{Hess} f(0,0)>0$ であれば u^2+v^2 に $\mathcal{A}$ 同値で, $\det \operatorname{Hess} f(0,0)>0$ であれば u^2-v^2 に $\mathcal{A}$ 同値である．

$\operatorname{rank} \operatorname{Hess} f(0,0)=1$ とすると, $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ が存在して $\operatorname{Hess} f(0,0)\eta=0$ が成り立つ．このとき, 次が成り立つ．

定理 3.2. [7] f が u^2+v^3 に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} \operatorname{Hess} f(0,0)=1$, $c(\eta_1,\eta_2)\neq 0$.

定理 3.3. [27] f が $u^3\pm uv^2$ に $\mathcal{A}$ 同値であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} \operatorname{Hess} f(0,0)=0$, $\Delta\neq 0$. ただし Δ は 3 次方程式の判別式と呼ばれているものをこの場合に適用したもので,

$$\Delta=f_{uuu}^2 f_{vvv}^2-6f_{uuu}f_{uuv}f_{uvv}f_{vvv}-3f_{uuv}^2f_{uvv}^2+4f_{uuv}^3f_{vvv}+4f_{uuu}f_{uvv}^3.$$

3.2　基本データー

[13, 32]

補題 3.4. $f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ は $\operatorname{corank} df_0=1$ とする．このとき定義域の座標変換により,

$$\begin{aligned} f(x)&=\bigl(x_1,\dots,x_{m-1},f_m(x),\dots,f_n(x)\bigr)\quad (n\geq m),\\ f(x)&=\bigl(x_1,\dots,x_{n-1},f_n(x)\bigr)\quad (n<m)\end{aligned}\tag{3.1}$$

とできる．

Proof. 陰関数定理. □

補題 3.5. $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ は $\operatorname{corank} df_0 = 1$ とする．このとき $\eta \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m, 0)$ が存在して $p \in S(f)$ ならば $\langle \eta(p) \rangle_{\boldsymbol{R}} = \ker df_p$ が成り立つ．

Proof. 仮定から (3.1) のようにすると, ∂x_m が条件をみたすもの． □

ここで存在が保証されたベクトル場を**退化ベクトル場**といい, η であらわす．

$f \in C^\infty(m, n)$ に対して $m = n$ のとき, $\det Jf$ を λ と書き, **ヤコビ行列式**という．$m = n + 1$ で f が波面的のとき, $\det(f_u, f_v, \nu)$ を λ と書き, **符号付き面積密度関数**または**波面のヤコビ行列式**という．これらは座標を取り替えると 0 でない関数倍される．

3.3 同次元間のモラン写像

$S(f)$ を f の特異点の集合とする．λ の零点は $S(f)$ である．f が 1-非退化であるとは, $d\lambda \neq 0$ のときをいう．このとき, $S(f)$ が多様体となるので, η が $S(f)$ に接するかどうかは意味をもつ．$f_1 = f|_{S(f)}$ とすると, $S(f_1)$ は η が $S(f)$ に接する点であることがわかる．η が $S(f)$ に接するとき, 2-特異という．2-特異な点全体は $\{\eta\lambda = 0\}$ であり, これを $S_2(f)$ とおくと, $d(\eta\lambda|_{S(f)}) \neq 0$ であれば $S_2(f)$ は多様体となる．f が 2-非退化であるとは, $d(\eta\lambda|_{S(f)}) \neq 0$ となるときをいう．これを続けていくと, $S_{m+1}(f)$ が点になるまで続けることができる．

定理 3.6. f が k-モラン特異点であるための必要十分条件は k-非退化であるが k-特異でないときである．

簡単に次がわかる．

系 3.7. f が k-モラン特異点であるための必要十分条件は

- $\lambda = \eta\lambda = \cdots = \eta^{k-1}\lambda = 0$, $\eta^k\lambda \neq 0$,
- $\operatorname{rank} d(\lambda, \eta\lambda, \ldots, \eta^{k-1}\lambda) = k$.

3.4 低次元へのモラン写像

[29]

定義 3.8. $f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ に対して $(\boldsymbol{R}^m,0)$ のベクトル場の組

$$(\xi,\eta)=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\eta_1,\dots,\eta_{m-n+1})$$

が adapted with respect to f であるとは, 原点において $\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\eta_1,\dots,\eta_{m-n+1}$ が $T_0\boldsymbol{R}^m$ を生成し, $p\in S(f)$ ならば $\langle\eta_1(p),\dots,\eta_{m-n+1}(p)\rangle_{\boldsymbol{R}}=\ker df_p$ となるときをいう.

$f:(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ に対して $\operatorname{rank} df=n-1$ とする. このとき, 0 の近傍で定義された adapted with respect to f なベクトル場の組が存在する.

Proof. 結論は座標に関係ないので $\operatorname{rank} df_0=n-1$ から, $x=(x_1,\dots,x_{n-1}), y=(y_1,\dots,y_{m-n+1})$ として,

$$f(x,y)=(x,h(x,y)),\quad dh_0=0$$

となるような座標をとっておく. このとき, $S(f)=\{h_{y_1}=\cdots=h_{y_{m-n+1}}=0\}$ であるので, $\partial x_1,\dots,\partial x_{n-1},\partial y_1,\dots,\partial y_{m-n+1}$ が求めるベクトル場の組である. □

定義 3.9. 0 が $f=(f_1,\dots,f_n):(\boldsymbol{R}^m,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ の**非退化特異点**であるとは $0\in S(f)$ であり, $\lambda_1,\dots,\lambda_{{}_mC_n}$ (ただし, ${}_mC_n$ は m 個の中から n 個を選ぶ選び方の数をあらわす) を df の全ての n 次小行列式とするとき,

$$\operatorname{rank} d(\lambda_1,\dots,\lambda_{{}_mC_n})_0=m-n+1$$

が成り立つときをいう.

非退化性は

- $\operatorname{rank} df_0=n-1$,
- $S(f)$ は多様体

を導く. ただし, 逆は成り立たない. 例えば $(x,y)\mapsto(x,y^3)$ が反例.

Proof. 0 の近傍において adapted with respect to f なベクトル場の組 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_{m-k})$ をとっておく. $k<n-1$ であれば, 全ての n 次小行列の中に二本以上の $\eta_i f$ という列ベクトルが入る. その小行列式の微分は必ず消えるので $k=n-1$ である. また,

$$\lambda_i=\det(\xi_1,\dots,\xi_k,\eta_i),\quad i=1,\dots,m-n+1$$

とおく．これ以外の小行列式は二本以上の $\eta_i f$ という列ベクトルが入る．ゆえにその行列式の微分は 0 で 0 である．よって, これらは $\operatorname{rank} d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{{}_mC_n})$ には影響しないので無視できる．

$$S(f) = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n+1}) = (0, \ldots, 0)\}$$

であるが, 非退化性から $\operatorname{rank} d(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n+1})_0 = m - n + 1$ であるので 0 は写像 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n+1})$ の正則値である．ゆえに $S(f)$ は多様体である． $\square$

$f = (f_1, \ldots, f_n) : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ に対して 0 は非退化特異点とする．$S(f)$ は多様体であるので, $g = f|_{S(f)}$ を考える．$S(f)$ 上で $\operatorname{rank} df = n - 1$ より, adapted with respect to f なベクトル場の組 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{m-k})$ をとっておく．

$$\lambda_i = \det(\xi_1 f, \ldots, \xi_{n-1} f, \eta_i f), \quad i = 1, \ldots, m - n + 1$$

とおき,

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n+1})$$

とすると $S(f) = \{\Lambda = 0\}$ である．さて, 行列 $\mathcal{H}_\eta$ を

$$\mathcal{H}_\eta = \Big(\eta_j \lambda_i\Big)_{1 \le i,j \le m-n+1} = \begin{pmatrix} \eta_1 \lambda_1 & \ldots & \eta_1 \lambda_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{m-n+1} \lambda_1 & \ldots & \eta_{m-n+1} \lambda_{m-n+1} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

とする．ここで $\mathcal{H}_\eta$ は (定義域の) $S(f)$ 上で対称行列であることに注意しておく．実際, $[\eta_j, \eta_i](p) \in T_p \boldsymbol{R}^m$ であり,

$$[\eta_j, \eta_i](p) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi_i(p) + \sum_{j=1}^{m-n+1} \beta_j \eta_j(p)$$

と書かれる．$p \in S(f)$ ならば $\eta_j f(p) = 0$ より, $S(f)$ 上で

$$\eta_j \lambda_i = \det(\xi_1 f, \ldots, \xi_{n-1} f, \eta_j \eta_i f) = \det(\xi_1 f, \ldots, \xi_{n-1} f, \eta_i \eta_j f) = \eta_i \lambda_j$$

となる．

補題 3.10. 0 は $f = (f_1, \ldots, f_n) : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ の非退化特異点とする．$S(f)$ 上の行列値関数 $\mathcal{H}_\eta$ は, *adapted with respect to* f なベクトル場の組を取り替えると, 零でない関数倍される．とくに, $\operatorname{rank} \mathcal{H}_\eta$ は *adapted with respect to* f なベクトル場の組の取り方によらない．

Proof. adapted with respect to f なベクトル場の組 $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\eta_1,\dots,\eta_{m-n+1})$ に対して新しい adapted with respect to f なベクトル場の組 $(\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_{n-1},\bar{\eta}_1,\dots,\bar{\eta}_{m-n+1})$ を

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_{n-1} \\ \bar{\eta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\eta}_{m-n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{m-n+1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline B^1 & B^2 \end{array}\right) \\
&:= \left(\begin{array}{ccc|ccc}
a^1_{1,1} & \cdots & a^1_{1,n-1} & a^2_{1,1} & \cdots & a^2_{1,m-n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a^1_{n-1,1} & \cdots & a^1_{n-1,n-1} & a^2_{n-1,1} & \cdots & a^2_{n-1,m-n+1} \\ \hline
b^1_{1,1} & \cdots & b^1_{1,n-1} & b^2_{1,1} & \cdots & b^2_{1,m-n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b^1_{m-n+1,1} & \cdots & b^1_{m-n+1,n-1} & b^2_{m-n+11} & \cdots & b^2_{m-n+1,m-n+1}
\end{array}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

とする. 条件より, $S(f)$ 上で $B^1 = O$, $\det A^1 \neq 0$, $\det B^2 \neq 0$ である.

$$
\bar{\lambda}_i = \det(\bar{\xi}_1 f,\dots,\bar{\xi}_{n-1} f, \bar{\eta}_i f), \quad \mathcal{H}_{\bar{\eta}} = \left(\bar{\eta}_j \bar{\lambda}_i\right)_{1\le i,j\le m-n+1}
$$

とおく. このとき $S(f)$ 上で η_i, $\bar{\eta}_i$ $i=1,\dots,m-n+1$ は df の核方向であることに注意して $S(f)$ 上で以下のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}_j \bar{\lambda}_i &= \bar{\eta}_j \det(\bar{\xi}_1 f,\dots,\bar{\xi}_{n-1} f, \bar{\eta}_i f) \\
&= \left\langle \bar{\xi}_1 f \times \cdots \times \bar{\xi}_{n-1} f, \bar{\eta}_j \bar{\eta}_i f \right\rangle \\
&= \det A^1 \left\langle \xi_1 f \times \cdots \times \xi_{n-1} f, \bar{\eta}_j \bar{\eta}_i f \right\rangle \\
&= \det A^1 \left\langle \xi_1 f \times \cdots \times \xi_{n-1} f, \sum_{k,l} \eta_l b^1_{i,k}\, \xi_l f + \sum_{k,l} b^2_{jl} b^2_{ik} \eta_l \eta_k f \right\rangle \\
&= \det A^1 \sum_{k,l} b^2_{jl} b^2_{ik} \left\langle \xi_1 f \times \cdots \times \xi_{n-1} f, \eta_l \eta_k f \right\rangle \\
&= \det A^1 \sum_{k,l} b^2_{jl} b^2_{ik}\, \eta_l \lambda_k.
\end{aligned}
$$

ゆえに $S(f)$ 上で

$$\mathcal{H}_{\bar{\eta}} = (\det A^1)^{m-n+1}(\det B)^2\mathcal{H}_\eta \tag{3.4}$$

が成り立つ. ゆえに補題の主張が成り立つ. □

補題 3.11. 非退化ならば,

$$S(f|_S) = S(g) = \{p \in S(f) \mid \det \mathcal{H}_\eta(p) = 0\}.$$

さらに, $\ker dg_p = \ker \mathcal{H}_\eta(p)$.

Proof. 仮定と結論は定義域と像域の座標によらないため, $\operatorname{rank} df_0 = n-1$ の仮定から, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $y = (y_1, \dots, y_{m-n+1})$ として,

$$f(x,y) = (x, h(x,y)), \quad dh_0 = 0$$

となるような座標をとっておく. $\operatorname{rank} \operatorname{Hess}_0 h(0,y) = k$ とする. パラメーターつきモースの補題から,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= q(\tilde{y}) + \tilde{h}(x, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_{m-n+1}), \\ q(\tilde{y}) &= \sum_{i=1}^{k} e_i \tilde{y}_i^2, \quad \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k), \quad e_i = \pm 1 \end{aligned}$$

となるような座標 $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{m-n+1})$ と $\tilde{h}$ が存在する. 座標 (y,z) を改めて

$$y = \tilde{y},\ z = (z_1, \dots, z_{k'}) = (\tilde{y}_{k+1}, \dots, y_{m-n+1}),\ l = m-n+1-k$$

とおくことにより, $f(x,y,z) = (x, g(x,y,z))$ は,

$$g(x,y,z) = q(y) + h(x,z), \quad q(y) = \sum_{i=1}^{k} e_i y_i^2, \quad \operatorname{Hess} h(0,z)(0) = 0$$

の形としてよい. さらに, 補題 3.10 によれば, 仮定と結論はベクトル場の取り方によらないため, adapted with respect to f なベクトル場の組 $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, $\eta_1, \dots, \eta_{m-n+1}$ を

$$\xi_i = \partial x_i\ (i = 1, \dots, n-1),\ \eta_j = \partial y_j\ (j = 1, \dots, k),\ \eta_{k+j} = \partial z_j\ (j = 1, \dots, l)$$

ととる. このとき $\langle \eta_{k+1}, \dots, \eta_{k+l} \rangle_{\boldsymbol{R}} = \ker \mathcal{H}_\eta$ である.

$$\lambda_j = \det(\xi_1 f, \dots, \xi_{n-1} f, \eta_j f), \quad j = 1, \dots, m-n+1, \quad \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n+1})$$

とすると,

$$\Lambda = (2e_1 y_1, \dots, 2e_k y_k, h_{z_1}(x,z), \dots, h_{z_l}(x,z))$$

であり, $S(f)=\{\Lambda=0\}$ である. 非退化性より $d\lambda_0\neq 0$ であるが, $d\lambda_0$ をあらわす行列は

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
g_{y_1x_1} & \cdots & g_{y_1x_{n-1}} & g_{y_1y_1} & \cdots & g_{y_1y_k} & g_{y_1z_1} & \cdots & g_{y_1z_l} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{y_kx_1} & \cdots & g_{y_kx_{n-1}} & g_{y_ky_1} & \cdots & g_{y_ky_k} & g_{y_kz_1} & \cdots & g_{y_kz_l} \\
\hline
g_{z_1x_1} & \cdots & g_{z_1x_{n-1}} & g_{z_1y_1} & \cdots & g_{z_1y_k} & g_{z_1z_1} & \cdots & g_{z_1z_l} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{z_lx_1} & \cdots & g_{z_lx_{n-1}} & g_{z_ly_1} & \cdots & g_{z_ly_k} & g_{z_lz_1} & \cdots & g_{z_lz_l}
\end{array}\right)
$$

となるが, これは

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
 & * & & & * & & \mathrm{Hess}\, q(y) & & O & \\
\hline
h_{z_1x_1} & \cdots & h_{z_1x_l} & h_{z_1x_{l+1}} & \cdots & h_{z_1x_{n-1}} & & h_{z_1x_1} & \cdots & h_{z_1x_{n-1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & O & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{z_1z_l} & \cdots & h_{z_1z_l} & h_{z_1x_{l+1}} & \cdots & h_{z_1x_{n-1}} & & h_{z_lz_1} & \cdots & h_{z_lz_l}
\end{array}\right) \\
&=: \left(\begin{array}{c|c|c|c}
* & * & \mathrm{Hess}\, q(y) & O \\
\hline
M_1 & M_2 & O & M_3
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

となる. $M_3(0)=O$ より, 必要なら順番を入れ替えて, M_1 が正則であるとする. このとき陰関数定理より, 関数

$$
x_i(x_{l+1},\ldots,x_{n-1},z) \quad (i=1,\ldots,l), \quad z=(z_1,\ldots,z_l)
$$

が存在して

$$
h_{z_j}(x_1(x_{\overrightarrow{l+1}},z),\ldots,x_l(x_{\overrightarrow{l+1}},z),x_{\overrightarrow{l+1}},z)=0 \quad (j=1,\ldots,l), \quad x_{\overrightarrow{l+1}}=(x_{l+1},\ldots,x_{n-1}) \tag{3.5}
$$

が成り立つ. このとき, $g:=f|_{S(f)}$ は

$$
g(x_{l+1},z)=f(x_1(x_{\overrightarrow{l+1}}),\ldots,x_l(x_{\overrightarrow{l+1}}),x_{\overrightarrow{l+1}},0,z)
$$

とパラメーター表示される. ゆえに $d(f|_{S(f)})$ をあらわす行列の転置行列は

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
(x_1)_{x_{l+1}} & \cdots & (x_l)_{x_{l+1}} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & E & * \\
(x_1)_{x_{n-1}} & \cdots & (x_l)_{x_{n-1}} & & \\
\hline
(x_1)_{z_1} & \cdots & (x_l)_{z_1} & & \sum_{i=1}^{l} h_{x_i}(x_i)_{z_1}+h_{z_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & O & \vdots \\
(x_1)_{z_l} & \cdots & (x_l)_{z_l} & & \sum_{i=1}^{l} h_{x_i}(x_i)_{z_l}+h_{z_l}
\end{array}\right)
=: \left(\begin{array}{c|c|c}
* & E & * \\
\hline
N_1 & O & v
\end{array}\right)
$$

となる. ここで, $h_{z_1},\ldots,h_{z_l}$ は $\partial z_1,\ldots,\partial z_l$ が退化方向であることから $S(f)$ 上では 0 であることから,

$$
v=N_1\begin{pmatrix} h_{x_1} \\ \vdots \\ h_{x_l} \end{pmatrix}
$$

より, 列基本変形により, $d(f|_{S(f)})$ をあらわす行列の転置行列は

$$\left(\begin{array}{c|c|c} * & E & * \\ \hline N_1 & O & O \end{array}\right) \tag{3.6}$$

となる．ゆえに $(x,0,z) \in S(f|_{S(f)})$ の必要十分条件は $\det N_1(x,0,z) = 0$ となる．(3.5) を微分して

$$N_1{}^t M_1 = -\begin{pmatrix} h_{z_1 z_1} & \cdots & h_{z_1 z_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{z_1 z_l} & \cdots & h_{z_l z_l} \end{pmatrix}$$

を得る．M_1 は正則なので $(x,0,z) \in S(f|_{S(f)})$ の必要十分条件は $\det \mathrm{Hess}\, h(0,0,z) = 0$ となる．ここで, $S(f)$ 上で $\eta_j \lambda_i = \partial z_j \partial z_i h$ より, $\det \mathrm{Hess}\, h(0,0,z) = \mathcal{H}_\eta$ となる．後半は (3.6) により, $\ker dg = \langle z_1, \ldots, z_l \rangle_{\boldsymbol{R}}$ がわかるので成り立つ． □

これにより次のような定義が可能となる．

$$H = \det \mathcal{H}_\eta$$

とかく．

定義 3.12. 非退化特異点が 2 **特異**であるとは, $H = 0$ となるときをいう．

$S_2(f) = \{H = 0\}$ とする．2 特異であるかどうかは η の拡張の仕方によらない．このとき, 補題 3.11 より, $S_2(f) = S(g)$ である．

定義 3.13. $f = (f_1, \ldots, f_n) : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ の 2 特異特異点 0 が 2 **非退化特異点**であるとは $\ker dH_0 \not\supset T_0 S(f)$ であるときをいう．

これは $d(H|_{S(f)})_0 \neq 0$ と同値である．2 非退化であるかどうかは η の拡張の仕方によらない．2 非退化性は $S_2(f) = S(g)$ が多様体であることを導く．さらに $\mathrm{rank}\, \mathcal{H}_\eta(0) = m-n$ を導く．

Proof. $\mathrm{rank}\, \mathcal{H}_\eta(0) < m - n$ とすると, $\mathcal{H}_\eta(0)$ の全ての $m-n-1$ 次小行列式は消える．dH_0 はこれらの小行列式で書かれるので $dH_0 = 0$ となる． □

ただしこれらの逆は成立するとは限らない．

2 特異を仮定する．さて, 2 特異であれば 原点で $H = 0$ であるため, 原点において $\mathcal{H}_\eta$ の ker 方向がある．それを θ_0 としよう．

補題 3.14. $\operatorname{rank}\mathcal{H}_\eta = m-n$ ならば $(\boldsymbol{R}^m, 0)$ 上のベクトル場 θ であって, $p \in S_2(f)(=\{H=0\})$ に対して, θ_p は $\ker\mathcal{H}_\eta(p)$ を生成する, つまり $\langle\theta_p\rangle_{\boldsymbol{R}} = \ker\mathcal{H}_\eta(p)$ をみたすものが存在する.

Proof. $\mathcal{H}_\eta$ は $S(f)$ で対称で, 原点での固有値はひとつ 0 であり, それ以外は 0 でない. よって, 絶対値が最小の固有値は原点の近傍ひとつに定まる. その固有ベクトルを θ とおけば $S_2(f)$ 上で θ は 0 固有値の固有ベクトルである. あとは θ を $(\boldsymbol{R}^m, 0)$ 上に適当に拡張すればよい. □

ここで, θ が $\mathcal{H}_\eta$ の ker 方向であることを式にしておく.

補題 3.15. $S(f)$ 上で次が成り立つ.

$$\theta \in \ker\mathcal{H}_\eta \Leftrightarrow \theta\lambda_1 = \cdots = \theta\lambda_{m-n+1} = 0$$

Proof. $\eta_1, \ldots, \eta_{m-n+1}$ を $\ker df$ を生成するベクトル場とする. $a = (a_1, \ldots, a_{m-n+1})$ が $\mathcal{H}_\eta$ の ker の元とすると, $\sum a_i\eta_j\lambda_i = 0$ $(j = 1, \ldots, m-n+1)$ となるが, $S(f)$ 上で $\eta_j\lambda_i = \eta_i\lambda_j$ より, $\sum a_i\eta_i\lambda_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m-n+1)$ となるので, $\theta = \sum a_i\eta_i$ は $S_2(f)$ 上で $\ker\mathcal{H}_\eta$ を生成するベクトル場で, $\theta\lambda_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m-n+1)$ をみたす. □

さて, 2 非退化であれば $S_2(f)$ は多様体であるので, $S_2(f)$ 上で θ が $S_2(f)$ に接するかどうかが定義可能となる. 従って次のように定義する. 以下では θ による微分を $'$ であらわす: $H' = \theta H$.

定義 3.16. 2 非退化特異点が 3 **特異**であるとは, 0 で $\theta \in T_0S_2(f)$ となることと定義する.

これは原点における θ のみによって定まるので θ の拡張の仕方によらない. $S_2(f)$ は η の拡張の仕方によらないので, η の拡張の仕方にもよらない. もちろん $H'(0) = 0$ と同値である. $S_3(f) = \{\theta_p \in T_pS_2(f)\}$ と定める. $S_3(f)$ は $S_2(f)$ 上の θ と $S_2(f)$ のみで定まるので η, θ の拡張の仕方によらない. もちろん

$$S_3(f) = \{p \in S_2(f) \mid H'(p) = 0\} = \{p \in (\boldsymbol{R}^m, 0) \mid H(p) = H'(p) = 0\}$$

である. 3 特異とは $0 \in S_3(f)$ である. さらに $S_3(f) = S(f|_{S_2(f)})$ が成り立つ.

Proof. $p \in S_2(f)$ のとき $\ker d(f|_{S(f)})_p = \langle \theta_p \rangle_{\boldsymbol{R}}$, $\dim S_2 = n-2$ より, $f|_{S(f)}$ と S_2 で制限を考える[2].

$\square$

定義 3.17. 3特異特異点が3 **非退化**であるとは, $d(H'|_{S_2(f)})_0 \neq 0$ であることと定義する.

3 非退化性は θ に関する微分は一回なので, $\widetilde{\theta}$ を θ の別の拡張とすると, $\widetilde{\theta}H|_{S_2(f)} = \theta H_{S_2(f)}$ が $S_2(f)$ 上で成り立つ. ゆえに θ の拡張の仕方によらない. また, η の拡張の仕方にもよらない.

Proof. $\widetilde{\eta}$ を別の拡張とし, $\det \mathcal{H}_{\widetilde{\eta}} = \widetilde{H}$ とする. $\widetilde{H} = \alpha H + \beta$ とかける. ただし, $\alpha|_{S(f)} \neq 0$, $\beta|_{S(f)} = 0$ である. このとき, $\widetilde{H}' = \alpha' H + \alpha H' + \beta'$ である. これを $S_2(f)$ に制限すると, $H = 0$ であり, $p \in S_2(f)$ ならば $\theta_p \in T_pS(f)$ なので, $S_2(f)$ 上で $\beta' = 0$ となる. 従って

$$\widetilde{H}'|_{S_2(f)} = \alpha H'|_{S_2(f)}$$

が成り立つ. また, 0 が 3 特異のとき, $H'(0) = 0$ より, $d(\widetilde{H}'|_{S_2(f)})_0 = \alpha d(H'|_{S_2(f)})_0$ となるので, η の拡張の仕方によらない. $\square$

3 非退化性は $\ker d(H')_0 \not\supset T_0S_2(f)$ と同値である. 3 非退化であれば, $S_3(f)$ が多様体であることが従う.

補題 3.18. 3 非退化性は $H(0) = 0$ かつ $\operatorname{rank} d(H, H')_0|_{T_0S(f)} = 2$ と同値である.

Proof. 3 非退化性からも後者の条件からも $dH \neq 0$, $H'(0) = 0$ が従うのでこれを仮定する.

---

[2] $f : M \to N$ と部分多様体 $S \subset M$, $\dim S \leq \dim N$ に対して $f|_S$ が $p \in S$ で特異点を持つことの必要十分条件は $\ker df_p \cap T_pS \neq \{0\}$ である.

Proof. $\theta_p \in \ker df_p \cap T_pS$ とする. p の近傍の M の座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を

$$S = \{x_1 = \cdots = x_i = 0\}, \theta_p = \partial x_{i+1}$$

ととっておく. $f|_S = f(0, \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ である. $d(f|_S) = (f_{x_{i+1}}, \dots, f_{x_n})(0 \dots, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ となる. $\theta_p = \partial x_{i+1} \in \ker df_p$ より, $f_{x_{i+1}} = 0$ となる. $\dim S \leq \dim N$ なので, $d(f|_S)$ は最大階数が $n - i$ なので, $f_{x_{i+1}} = 0$ であれば最大階数になり得ない. ゆえに $f|_S$ は $p \in S$ で特異点を持つ

$\ker df_p \cap T_pS = \{0\}$ とする. このとき $\dim df_p(T_pS) = \dim T_pS = \dim S$ より, $\dim S \leq \dim N$ なので, $f|_S$ は $p \in S$ で特異点でない. $\square$

S の座標 $(x_1, \dots, x_{n-2}, z)$ を $\partial z(0) = \theta_0$ となるようにとる．このとき，$dH \neq 0$, $H'(0) = 0$ から，$H_{x_1}(0) \neq 0$ とできる．この座標に関して $d(H, H')_0$ をあらわす行列の転置行列は $H_{\overrightarrow{x_2}} = (H_{x_2}, \cdots, H_{x_{n-2}}, H')$, $H'_{\overrightarrow{x_2}} = (H'_{x_2}, \cdots, H'_{x_{n-2}}, H'')$ とおくと，0 で

$$\left(\begin{array}{c|cccc} H_{x_1} & H_{x_2} & \cdots & H_{x_{n-2}} & H' \\ H'_{x_1} & H'_{x_2} & \cdots & H'_{x_{n-2}} & H'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} H_{x_1} & H_{\overrightarrow{x_2}} \\ H'_{x_1} & H'_{\overrightarrow{x_2}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} H_{x_1} & H_{\overrightarrow{x_2}} \\ 0 & -H_{\overrightarrow{x_2}} \dfrac{H'_{x_1}}{H_{x_1}} + H'_{\overrightarrow{x_2}} \end{array}\right)$$

となり，右辺の右下成分は $d(H'_\eta|_{S_2(f)})_0$ なので，補題が従う． $\Box$

定義 3.19. 3 非退化特異点が 4 **特異**であるとは，0 で $\theta \in T_0 S_3(f)$ となることと定義する．

4 特異性は $S_3(f)$ 上の θ と $S_3(f)$ のみで定義されているので η, θ の拡張の仕方によらない．$S_4(f) = \{p \in S_3(f) \,|\, \theta \in T_p S_3(f)\}$ とすると，

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \{p \in S_3(f) \,|\, H''(p) = 0\} \\ &= \{p \in (\boldsymbol{R}^m, 0) \,|\, H(p) = H'(p) = H''(p) = 0\} = S(f|_{S_3(f)}) \end{aligned}$$

となる．以降帰納的に

定義 3.20. i 非退化特異点が $(i+1)$ **特異**であるとは，$\theta \in T_0 S_i(f)$ となることと定義する．

$(i+1)$ 特異性は $S_i(f)$ 上の θ と $S_i(f)$ のみで定義されているので η, θ の拡張の仕方によらない．$S_{i+1}(f) = \{\theta_p \in T_p S_i(f)\}$ と定めるとこれも η, θ の拡張の仕方によらず，

$$S_{i+1}(f) = \{p \in (\boldsymbol{R}^m, 0) \,|\, H(p) = \cdots = H^{(i-1)}(p) = 0\}$$

となる．

定義 3.21. $i+1$ 特異特異点が $i+1$ **非退化**であるとは，$d(H^{(i-1)}|_{S_i(f)})_0 \neq 0$ であることと定義する．

補題 3.22. $i+1$ 非退化性は (1) θ の拡張の仕方，(2) η の拡張の仕方によらない．

Proof. (1) $\widetilde{\theta}$ を別のベクトル場で $\widetilde{\theta}|_{S_2(f)} = \delta\theta|_{S_2(f)}$ $(\delta \neq 0)$ となるものとしたとき，$H^{(i-1)}|_{S_i(f)} = \delta\widetilde{\theta}^{i-1} H|_{S_i(f)}$ を示せばよい．帰納法で示す．$\widetilde{\theta} = \delta\theta + \gamma$ とおく．γ は

ベクトル場で $\gamma|_{S_2(f)} = 0$ となるようなものとする．$i = 2$ のときは成立．$(H^{(i-2)} - \delta\widetilde{\theta}^{i-2}H)|_{S_{i-1}(f)} = 0$ を仮定する．

$$\widetilde{\theta}^{i-1}H|_{S_2(f)} = \widetilde{\theta}\,\widetilde{\theta}^{i-2}H|_{S_2(f)} = (\delta\theta+\gamma)\widetilde{\theta}^{i-2}H|_{S_2(f)} = \delta\theta\,\widetilde{\theta}^{i-2}H|_{S_2(f)}$$

より,

$$(H^{(i-1)} - \widetilde{\theta}^{i-1}H)|_{S_2(f)} = \Big(\theta(H^{(i-2)} - \delta\widetilde{\theta}^{i-2}H)\Big)\Big|_{S_2(f)}$$

となる．帰納法の仮定から $(H^{(i-2)} - \delta\widetilde{\theta}^{i-2}H)|_{S_{i-1}(f)} = 0$ である．$S_i(f)$ 上で $\theta \in TS_{i-1}(f)$ が成り立つので,

$$\Big(\theta(H^{(i-2)} - \delta\widetilde{\theta}^{i-2}H)\Big)\Big|_{S_i(f)} = 0$$

が従う．

(2) η を取り替えて得られる H を $\widetilde{H}$ とかく．$\widetilde{H} = \alpha H + \beta$ となる．ただし, $\alpha|_{S(f)} \neq 0$, $\beta|_{S(f)} = 0$ である．このとき, $H^{(i-1)}|_{S_i(f)} = \alpha\widetilde{H}^{(i-1)}|_{S_i(f)}$ を示せばよい．$i = 2$ のときは成立．$H^{(i-2)}|_{S_{i-1}(f)} = \alpha\widetilde{H}^{(i-2)}|_{S_{i-1}(f)}$ を仮定する．

$$H^{(i-1)} - \alpha\widetilde{H}^{(i-1)} = \big(H^{(i-2)} - \alpha\widetilde{H}^{(i-2)}\big)' + \alpha'\widetilde{H}^{(i-2)}$$

が成り立つ．$p \in S_i(f)$ ならば $\theta \in T_pS_{i-1}(f)$ であり, $S_i(f) = \{p \in S_{i-1}(f) \mid H^{(i-2)}(p) = 0\}$ より, $(H^{(i-1)} - \alpha\widetilde{H}^{(i-1)})|_{S_i(f)} = 0$. □

$i+1$ 非退化性は, $\ker d(H^{(i-1)})_0 \not\supset T_0S_i$ と同値である．

これは $S_i(f)$ が一点となるつまり $i = n$ まで続けられる．$T_0S_n = \{0\}$ より, 常に $(n+1)$-特異性は成り立たない．また, n-非退化性から $(n+1)$-非特異性が従うと言ってもよい．なぜなら, n-非退化性は定義から $d(H^{(n-2)}|_{S_{n-1}(f)})_0 \neq 0$ であるが, S_{n-1} は一次元のため, $\theta_p \in T_pS_{n-1}(f)$ であれば $\langle\theta_p\rangle_{\boldsymbol{R}} = T_pS_{n-1}(f)$ であり, $\theta(H^{(n-2)}|_{S_{n-1}(f)})(0) \neq 0$ が従うからである．

補題 3.23. $i \leq n$ とする．i 非退化性は $H(0) = H'(0) = \cdots = H^{(i-2)}(0) = 0$ かつ $\operatorname{rank} d(H, H', \cdots, H^{(i-2)})_0|_{T_0S(f)} = i-1$ と同値である．

Proof. 帰納法で示す．$i-1$ までは正しいとする．

i 非退化性からも後者の条件からも $H(0) = H'(0) = \cdots = H^{(i-2)}(0) = 0$ かつ $\operatorname{rank} d(H, H', \cdots, H^{(i-3)})_0 = i-2$ が従うので, これを仮定する．

S の座標 $(x_1, \ldots, x_{n-2}, z)$ を $\operatorname{rank} d(H, H', \cdots, H^{(i-3)})_0 = i-2$ が, $x_1, \ldots, x_{i-2}$ による微分までで正則となり, $\theta = \partial z$ となるようにとる．

この座標に関して $d(H, H', \cdots, H^{(i-2)})_0$ をあらわす行列の転置行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} K_1 & L_1 \\ \hline K_2 & L_2 \end{array}\right) := \left(\begin{array}{cccc|c} H_{x_1} & \cdots & H_{x_1}^{(i-3)} & H_{x_1}^{(i-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{x_{i-2}} & \cdots & H_{x_{i-2}}^{(i-3)} & H_{x_{i-2}}^{(i-2)} \\ \hline H_{x_{i-1}} & \cdots & H_{x_{i-1}}^{(i-3)} & H_{x_{i-1}}^{(i-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n-2} & \cdots & H_{x_{n-2}}^{(i-3)} & H_{x_{n-2}}^{(i-2)} \\ H' & \cdots & H^{(i-2)} & H^{(i-1)} \end{array}\right)$$

となる. これを基本変形すると,

$$\left(\begin{array}{c|c} K_1 & O \\ \hline K_2 & L_2 - K_2K_1^{-1}L_1 \end{array}\right)$$

となる. 陰関数定理より,

$$X := \begin{pmatrix} (x_1)_{x_{i+1}} & \cdots & (x_i)_{x_{i+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1)_{x_{n-2}} & \cdots & (x_i)_{x_{n-2}} \\ (x_1)' & \cdots & (x_i)' \end{pmatrix} = -K_2K_1^{-1}$$

が成り立つ. また,

$$\begin{pmatrix} (H^{(i-2)}|_{S_i})_{x_{i+1}} \\ \vdots \\ (H^{(i-2)}|_{S_i})_{x_{n-2}} \\ (H^{(i-2)}|_{S_i})' \end{pmatrix} = {}^t\Big(XL_1 + L_2\Big) = {}^t\Big(-K_2K_1^{-1}L_1 + L_2\Big)$$

となるので主張が示された. □

定理 3.24. 写像芽 $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が k-モラン特異点である必要十分条件は k 非退化で, $k+1$ 特異でないことである.

定理 3.25. 0 は $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ の非退化特異点とする. f at 0 が k モラン特異点 $(2 \leq k \leq n)$ であるための必要十分条件は

(1) $H = H' = \cdots = H^{(k-2)} = 0$, $H^{(k-1)} \neq 0$,

(2) $\operatorname{rank} d(H, H', \dots, H^{(k-2)})_0|_{T_0S(f)} = k-1$.

ただし, H は *adapted with respect to* f なベクトル場の組 (ξ, η) に対して $H = \det \mathcal{H}_\eta$ で $\mathcal{H}_\eta$ は (3.2) で定まるもの. $'$ は θ による微分であり, θ は $\{H = 0\}$ 上で $\ker \mathcal{H}_\eta$ の基底となるようなベクトル場.

さらに次を得る.

系 3.26. 0 は $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ の特異点とする. f *at* 0 が k モラン特異点 $(2 \le k \le n)$ であるための必要十分条件は

(a) $H = H' = \cdots = H^{(k-2)} = 0$, $H^{(k-1)} \neq 0$,

(b) $\operatorname{rank} d(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n+1}, H, H', \dots, H^{(k-2)})_0 = m - n + k$.

ただし, H は定理 3.25 と同じ.

3.5 高次元へのモラン写像

系 3.27. *Let* $f : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ *be a map-germ satisfying* $\operatorname{rank} df_0 = m - 1$. *Then* f *at* 0 *is an r-Morin singularity if and only if*

- $\eta\Lambda = \cdots = \eta^{r-1}\Lambda = 0$ *and* $\eta^r\Lambda \neq 0$ *hold at* 0, *and*
- $\operatorname{rank} d(\Lambda, \eta\Lambda, \dots, \eta^{r-1}\Lambda)_0 = r(n-m+1)$ *holds.*

Here, $f = (f_1, \dots, f_m)$ *satisfies* $d(f_1, \dots, f_{m-1}) = m-1$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m+1})$, $\lambda_i = \det(f_1, \dots, f_{m-1}, f_{m-1+i})$ *and* η *is the null vector field.*

3.6 フロント

同次元間の写像の λ を読み替えるだけ.

4 関数の形の操作

[21]

4.1 モースの補題

補題 4.1. $f(u,v):(\boldsymbol{R}^2,0)\to\boldsymbol{R}$ は $f(0)=0$ であれば関数 $g(u,v),h(u,v)$ が存在して

$$f(u,v)=ug(u,v)+vh(u,v)$$

が成り立つ.

Proof. $f(tu,tv)$ を考える. これを t で微分して積分するともとに戻るので,

$$f(tu,tv)=\int\frac{\partial}{\partial t}(f(tu,tv))\,dt.$$

これに $[\ ]_0^1$ をして

$$f(u,v)=\Big[f(tu,tv)\Big]_0^1=\int_0^1 uf_u+vf_v\,dt=u\int_0^1 f_u|_{(tu,tv)}\,dt+v\int_0^1 f_v|_{(tu,tv)}\,dt$$

より

$$g(u,v)=\int_0^1 f_u|_{(tu,tv)}\,dt,\quad h(u,v)=\int_0^1 f_v|_{(tu,tv)}\,dt$$

とおけばよい. □

系 4.2. $f(u,v):(\boldsymbol{R}^2,0)\to\boldsymbol{R}$ は $f(u,0)=0$ であれば関数 $h(u,v)$ が存在して

$$f(u,v)=vh(u,v)$$

が成り立つ.

Proof. $f(u,tv)$ を考える. これを t で微分して積分するともとに戻るので,

$$f(u,v)=f(u,v)-f(u,0)=\Big[f(u,tv)\Big]_0^1=\int_0^1 vf_v|_{(u,tv)}\,dt=v\int_0^1 f_v|_{(u,tv)}\,dt$$

□

もう少し精密化できる.

系 4.3. $f(u,v):(\boldsymbol{R}^2,0)\to\boldsymbol{R}$ は $f(0,0)=0$ であれば関数 $g(u),h(u,v)$ が存在して

$$f(u,v)=g(u)+vh(u,v)$$

が成り立つ.

Proof. $F(u,v) = f(u,v) - f(u,0)$ を考えると，$F(u,0) = 0$ なので，h が存在して $F(u,v) = vh(u,v)$. ゆえに $g(u) = f(u,0)$ とおけばよい． □

補題 4.4. $f(u,v) : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to \boldsymbol{R}$ は $df(0,0) = 0$, $\det \mathrm{Hess}\, f(0,0) \neq 0$ であれば $\sim_{\mathcal{A}}$

$$u^2 + v^2, \quad u^2 - v^2$$

Proof. 省略 □

4.2 マルグランジュの予備定理

[34, Section 3], [10, Section 4.2]

補題 4.5. $f(u,v)$ は $f(u,v) = f(u,-v)$ であれば関数 $h(u,v)$ が存在して

$$f(u,v) = h(u,v^2).$$

Proof. $g(u,v) = (u,v^2)$ を考える．$\mathcal{E}_2/g^*\mathcal{M}_2\mathcal{E}_2 = \langle 1, v\rangle_{\boldsymbol{R}}$ だから，任意の関数とくに f は $f(u,v) = h_1(u,v^2) + vh_2(u,v^2)$ とかける．条件から $h_1 = 0$. □

もっと精密なことが言えている．

系 4.6. 任意の関数 $f(u,v)$ に対して関数 $h_1, h_2(u,v)$ が存在して

$$f(u,v) = h_1(u,v^2) + vh_2(u,v^2).$$

4.3 関数の有限確定性

[22] [10, Section 5.2]

補題 4.7. 関数 f は

$$\mathcal{M}_m^k \subset \mathcal{M}_m \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_m} \right\rangle_{\mathcal{E}_m}$$

をみたすならば k-確定である．つまり，$j^k f(0) = j^k g(0)$ をみたす任意の g は f と $\mathcal{A}$ 同値である．

5　判定法の証明

5.1　関数

[21]

モースの補題の証明. $m=2$ とする. f は $df_0=0, \det \mathrm{Hess}\, f(0) \neq 0$ とする. このとき $f_{xx}(0) \neq 0$ とできる. $f_{xx}(0)=f_{yy}(0)=0$ の場合は $f_{xy}(0) \neq 0$ より, $x \pm y$ を新しい座標だと思えばよい. $\partial(x+y)^2 = 2f_{xy}$ より.

くくる補題を 2 回適用して

$$f = h_{11}(x,y)x^2 + 2h_{12}(x,y)xy + y^2 h_{22}(x,y)$$

とできる. $h_{11}(0) \neq 0$ より, 関数 $\widetilde{x}$ を $\widetilde{x} = \sqrt{|h_{11}|}(x+(h_{12}/h_{11})y,$ とする. このとき,

$$\widetilde{x}^2 = |h_{11}|\Big(x^2 + 2\frac{h_{12}}{h_{11}}xy + \frac{h_{12}^2}{h_{11}^2}y^2\Big)$$

より,

$$f = \mathrm{sgn}(h_{11})\widetilde{x}^2 + \frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{11}}y^2$$

となる. $\det \mathrm{Hess}\, f(0) \neq 0$ から y^2 の係数は 0 でない.

$$\widetilde{y} = \sqrt{\left|\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{11}}\right|}y$$

とすると,

$$f = \mathrm{sgn}(h_{11})\big(\widetilde{x}^2 + \mathrm{sgn}(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)\widetilde{y}^2\big)$$

となる. □

有限確定性を使うと h は関数でなく, 係数にできる.

福井ヌーノの定理の証明. [7] 前の証明の途中から,

$$f = x^2 + \frac{1}{6}a_{30}x^3 + \frac{1}{2}a_{21}x^2y + \frac{1}{2}a_{12}xy^2 + \frac{1}{6}a_{03}y^3 + \cdots$$

とおける. $\widetilde{x} = x - (1/2)(\frac{1}{6}a_{30}x^2 + \frac{1}{2}a_{21}xy + \frac{1}{2}a_{12}y^2$ とすると,

$$f = \widetilde{x}^2 + \frac{1}{6}a_{03}y^3 + \cdots$$

となる. $\mathrm{Hess}\, f$ の核は ∂y なので, $a_{03} \neq 0$ であるので, x^2+y^3 になる. □

5.2　ホイットニーの傘

[22, 10]

証明 1. $f=(x, yf_2(x,y), yf_3(x,y))$ まではできる.

$$f=(x, xyg_1(x)+y^2g_2(x,y), xyg_3(x)+y^2g_4(x,y))$$

とできる. $g_1(0)$ か $g_3(0)$ のどちらかは 0 でない. 0 なものがあればもう一方を加える事により $g_1(0)$ も $g_3(0)$ も 0 でないようにできる. このとき像域で $g_1(x), g_3(x)$ で割って, $f=(x, xy+y^2g_2(x,y), xy+y^2g_4(x,y))$ とできる. さらに $f=(x, xy+y^2g_2(x,y), y^2g_4(x,y))$ とできる. $g_4(0,0)\neq 0$ より, $f=(x, yg_5(x,y), y^2)$ とできる (2 個めは $xy+\cdots$ の形ではなく, y でくくった形ということに注意.). $f=(x, yg_6(x,y^2), y^2)$ とできる. さらに $f=(x, xy, y^2)$ とできる. □

次はマルグランジュの予備定理を使った証明を紹介する. 以降のモラン写像の証明はこの方法を使って行う. 次の証明の参考になるであろう.

証明 2. $f=(x, xyg_1(x)+y^2g_2(x,y), xyg_3(x)+y^2g_4(x,y))$ まではできる. $g_2(0,0)$ か $g_4(0,0)$ のどちらかは 0 でない. $g_2(0,0)\neq 0$ とする. $f_2(x,y)=xyg_1(x)+y^2g_2(x,y)$ を変形して

$$y^2=\frac{1}{g_2(x,y)}(f_2(x,y)-xyg_1(x))=\frac{1}{g_2(x,y)}(f_2(x,y)-f_1(x,y)yg_1(f_1(x,y)))$$

であり, 任意の関数 $k(x,y)$ に対して

$$k(x,y)=a_0+xk_1(x,y)+a_{01}y+y^2k_3(x,y)$$

なので

$$\mathcal{E}/(f_1,f_2)^*\mathcal{M}_2\mathcal{E}_2=\langle 1, y\rangle_{\boldsymbol{R}}$$

となる. よって, $\mathcal{E}_2$ は (f_1,f_2) を通して $1, y$ で生成される. 特に y^2 に対して関数 g_1, g_2 が存在して $y^2=g_1(f_1,f_2)+yg_2(f_1,f_2)$ が成り立つ. $\widetilde{y}=y-g_2(f_1,f_2)/2$ とすると, $\widetilde{y}=g_1(f_1,f_2)+g_2(f_1,f_2)^2/4$ となる. これを y と置き直して,

$$y^2=g_1(f_1,f_2)$$

となる. この式を y で 2 回微分すると

$$2=(g_1)_{yy}((f_2)_y)^2+(g_1)_y(f_2)_{yy}$$

となるが, $f_2(0,0)=0$ より, $(g_1)_y(0,0)\neq 0$ となる. 像域の座標変換 $(X,Y,Z)\to(X,g_1(X,Y),Z)$ により, $(x,y^2,f_3(x,y))$ となる.

ふたたび $f_3\in\mathcal{E}_2$ より, いまは $(f_1,f_2)=(x,y^2)$ より,

$$f_3(x,y)=h_1(x,y^2)+yh_2(x,y^2)$$

であるが像域の座標変換により,

$$f_3(x,y)=yh_2(x,y^2)$$

とできる. $(f_3)_{xy}(0,0)\neq 0$ より, $(h_2)_x\neq 0$. ここで, $(x,y^2,yh_2(x,y^2))$ を

$$(h_2(x,y^2),y^2,yh_2(x,y^2))$$

としておいて, $\bar{x}=h_2(x,y^2),\bar{y}=y$ とすると, $(\bar{x},\bar{y}^2,\bar{x}\bar{y})$ となる. □

5.3 モラン写像

[32] ここでは同次元間のモラン写像の判定法の証明をする. これを参考にすれば次元が高い場合の証明は難しくない.

Proof. 条件を仮定する. 補題 3.4 から

$$f(x)=\bigl(x_1,\ldots,x_{n-1},f_n(x)\bigr)$$

とできる. このとき, $\lambda=(f_n)_{x_n}$ であり, 条件から $(f_n)_{(x_n)^{k+1}}\neq 0$ である. 任意の関数 $h\in\mathcal{E}_n$ は

$$h(x)=a_0+x_1h_1(x)+\cdots+x_{n-1}h_{n-1}(x)+a_1x_n+\cdots+a_kx_n^k+x_n^{k+1}h_n(x)$$

とかけるので,

$$\mathcal{E}_n/f^*\mathcal{M}_n\mathcal{E}_n=\langle 1,x_n,\ldots,x_n^k\rangle_{\boldsymbol{R}}$$

である. ゆえに任意の $\mathcal{E}_n$ の元, 特に x_n^{k+1} に対して $h_0,h_1,\ldots,h_k$ が存在して

$$x_n^{k+1}=\sum_{i=0}^{k}x_n^ih_i(f)$$

が成り立つ.

$$\widetilde{x}_n = x_n - \frac{1}{k+1} h_k(f)$$

とおくと, はじめから

$$x_n^{k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} x_n^i h_i(f) = \sum_{i=0}^{k-1} x_n^i h_i\bigl(x_1, \dots, x_{n-1}, f_n(x)\bigr) \tag{5.1}$$

としてよい.

補題 5.1. (1) $h_0(0) = \cdots = h_{k-1}(0) = 0$.

(2) $\partial h_0 / \partial x_n(0) \neq 0$.

(3)

$$\operatorname{rank}\Bigl(dh_1, \dots, dh_{n-1}\Bigr) = k - 1.$$

Proof. (1 の証明) (5.1) において x_n の k 次以下の項は右辺にないはずなので, $h_0(0) = \cdots = h_{k-1}(0) = 0$ を得る. (2 の証明) (5.1) において $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ とおくと $f_n(0, \dots, 0, x_n) = x_n^{k+1} + \cdots$ より, $\partial h_0 / \partial x_n(0) \neq 0$. (3 の証明) (5.1) を x_n で 1 回から $k-1$ 回微分して x_i $(i = 1, \dots, n-1)$ で微分して原点での値をみると, f_n は x_n で微分したときに初めて 0 でない値があらわれるのは $k+1$ 回微分なので, それぞれ

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial x_n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1 \partial x_n^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n^2} \end{pmatrix} = -\frac{\partial h_1}{\partial x_n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_0}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^k f_n}{\partial x_1 \partial x_n^{k-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^k f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{k-1}} \end{pmatrix} =& -2\frac{\partial h_1}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1 \partial x_n^{k-2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{k-2}} \end{pmatrix} - 3!\frac{\partial h_2}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x_1 \partial x_n^{k-3}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{k-3}} \end{pmatrix} \\
&- \cdots - (k-2)!\frac{\partial h_{k-2}}{\partial x_n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \end{pmatrix} - (k-1)!\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる. ゆえに,

$$
\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1 \partial x_n^2} & \cdots & \dfrac{\partial^k f_n}{\partial x_1 \partial x_n^{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n} & \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n^2} & \cdots & \dfrac{\partial^k f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{k-1}} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}
$$

となる. □

適当に座標の順番を入れ替えて

$$
\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{k-1}} & \cdots & \dfrac{\partial h_{k-1}}{\partial x_{k-1}} \end{pmatrix} = k-1
$$

となるようにする. 定義域の座標変換

$$
\widetilde{x}_i = \begin{cases} h_i(x_1, \ldots, f_n(x)) & i = 1, \ldots, k-1 \\ x_i & i = k, \ldots, n \end{cases}
$$

と像域の座標変換このとき,

$$
\widetilde{X}_i = \begin{cases} h_i(X_1, \ldots, X_n) & i = 1, \ldots, k-1 \\ X_i & i = k, \ldots, n \end{cases}
$$

をする. 補題 5.1 からこれらは正則な座標変換である. さて, (5.1) から,

$$
h_0(f) = x_n^{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} x_n^i h_i\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_n(x)\big)
$$

となっているので, 標準形になる. □

5.4　カスプ辺

補題を使うだけ.

5.5　カスプ的ホイットニーの傘

補題を使うだけ.

6　適用例

6.1　曲面論速成コース (記号の整理)

[33, 23] $f : U \to \boldsymbol{R}^3$ 曲面 $\nu : U \to S^2$ 単位法線ベクトル $p \in f(U)$ をとる. $d\nu(X), X \in T_pf(U)$ は ν に直交しているので,

$$-d\nu : T_pf(U) \to T_pf(U)$$

という線形写像とおもったとき, 固有値を κ_1, κ_2 とかき, **主曲率**という. 対応する固有ベクトルを ξ_1, ξ_2 とかき, **主曲率ベクトル** (方向は主方向) という. $K = \kappa_1\kappa_2$ を**ガウス曲率**, $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ を**平均曲率**という.

$-d\nu$ の基底 f_u, f_v による表示

$$\nu_u = \frac{EM - GL}{EG - F^2} f_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} f_v,$$

$$\nu_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2} f_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} f_v,$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle f_u, \nu_u \rangle & -\langle f_u, \nu_v \rangle \\ -\langle f_u, \nu_v \rangle & -\langle f_v, \nu_v \rangle \end{pmatrix}$$

κ_1, κ_2 は曲面を

$$f(u, v) = (u, v, \kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2 + O(u, v)^3)$$

の形に書いたとき (2 つの主方向は直交しているのでこのようにかける.) に 2 次の項となって出てくるので, $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$ なら形はわかる. $\kappa_1\kappa_2 = 0$ のときが問題で, その点に対して次のように定義する. また, $\kappa_1 = \kappa_2$ のときも問題. $f : U \to \boldsymbol{R}^3$. 特異点のない曲面に対して, $p \in U$ が

- *(ξ_1 に関して)* 尾根点であるとは, $\xi_1\kappa_1 = 0$ であるときをいう.
  - 第一尾根点であるとは, $\xi_1\kappa_1 = 0, \xi_1\xi_1\kappa_1 \neq 0$ であるときをいう.
  - 第二尾根点であるとは, $\xi_1\kappa_1 = \xi_1\xi_1\kappa_1 = 0$, $\xi_1\xi_1\xi_1\kappa_1 \neq 0$ であるときをいう.
- *(ξ_1 に関して)* 副放物 *(sub-parabolic)* 点であるとは, $\xi_1\kappa_2 = 0$ であるときをいう.
- 臍点であるとは, $\kappa_1 = \kappa_2$ であるときをいう.
  - 楕円的臍点であるとは, $\Gamma > 0$ であるときをいう.
  - 双曲的臍点であるとは, $\Gamma < 0$ であるときをいう.

(図) ただし,

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \kappa_{1u} & 2\kappa_{1v} & \kappa_{2u} & 0 \\ 0 & \kappa_{1u} & 2\kappa_{1v} & \kappa_{2u} \\ \kappa_{1v} & 2\kappa_{2u} & \kappa_{2v} & 0 \\ 0 & \kappa_{1v} & 2\kappa_{2u} & \kappa_{2v} \end{vmatrix} \quad (\kappa_{1u} = \xi_1\kappa_1,\ \kappa_{1v} = \xi_2\kappa_1).$$

定義域のベクトル $v = (\alpha, \beta)$ をとる. $df(v), \nu$ で張られる平面で曲面を切った時の切り口の曲率は

$$\frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

となる. もし $K < 0$ だと, これをみたす方向が 2 方向あることになる. これを漸近方向という.

6.2 曲面の射影

[8] f の接ベクトル ξ_s をとり, $\xi = df(\xi_s)$ とする. π_ξ 直交射影を考えると, 特異点をもつ.

$g = \pi_v \circ f$ at 0 is cusp if and only if $I\!I(\xi_s, \xi_s) = 0$, $d\big(I\!I(\xi_s, \xi_s)\big) \neq (0, 0)$ and $\xi_s\big(I\!I(\xi_s, \xi_s)\big) \neq 0$ hold at 0.

つまり, カスプが見えているということは漸近方向から眺めている.

6.3 ガウス写像

6.4 クエンの曲面 [9, Section 19.4]

$$\Bigg(\frac{2\sin v(u\sin u+\cos u)}{u^2\sin^2 v+1}, \frac{2\sin v(\sin u-u\cos u)}{u^2\sin^2 v+1},$$
$$\frac{2\cos v}{u^2\sin^2 v+1}+\log\tan\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg)\ (-2\pi<u<2\pi,\ 0<v<\pi)$$

はガウス曲率 -1 の曲面となる (図). 特異点が見えているが,

$$\lambda = u(2-u^2+u^2\cos 2v)$$

$u=0$ ならば $\eta=\partial u$ であり, ce. それ以外ならば $\eta=\partial v$ であり,

$$\lambda_v=\sin 2v, \quad \lambda_{vv}=\cos 2v$$

より, $v=\pi/2$ では sw, それ以外は ce.

6.5 Cleave の定理の別証明 [3]

γ: $\kappa>0$ となる単位早さ空間曲線.

$$F(u,v)=\gamma(u)+ve(u)$$

を γ の接線曲面という. $S(F)=\{v=0\}$. ただし, e,n,b はフルネ枠. $\nu=b$ により, 半波面. $\tau(u)\neq 0$ なら (u,v) で波面.

基本データーは $\lambda=v\kappa\to v$, $\eta=\partial u+\partial v$ なのですぐに判定できて,

- F at (u,v) が ce $\Leftrightarrow \tau(u)\neq 0$.
- F at (u,v) が ccr $\Leftrightarrow \tau(u)=0$, $\tau(u)\neq 0$.

6.6 平行曲面 [23, Section 11.4], [7]

(この辺から黒板で出来る?)

平行曲面について, 臍点でない点の近くでは, 主方向が座標軸となるような座標 (曲率線座標) がとれて,

$$\lambda = (1 - t\kappa_1)(1 - t\kappa_2)$$

となる. 臍点ではグラフで書いておくと次がわかる.

定理 p が臍点でないとき, f の平行曲面 f_t は, $t = \kappa_1(p)$ のとき p は特異点で,

- f_t at p が ce $\Leftrightarrow$ p は f の ξ_1 に関する, 副放物点でない第一尾根点.
- f_t at p が sw $\Leftrightarrow$ p は f の ξ_1 に関する, 副放物点でない第二尾根点.

p が臍点のとき, f の平行曲面 f_t は, $t = \kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ のとき p は特異点で,

- f_t at p が D_4^- $\Leftrightarrow$ p は f の, 楕円的臍点. ($+$ ならば双曲)

6.7 漸近チェビシェフの網

[31] $\theta : U \to \boldsymbol{R}$ 関数で, $\theta_{uv} = \sin\theta$ の解とする. このとき, 波面 $f : U \to \boldsymbol{R}^3$ (S^3, H^3) であって,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $K = -1$, u-, v-曲線は共に漸近線で, その角度は θ であるようなものが存在する. 向きを適当に入れ替えて, u-, v-曲線の倍法線ベクトルが一致するようにとっておく. これは $f_u \times f_v = \sin\theta\nu$ となるので, $\lambda = \sin\theta$ となる. $S(f) = \{\theta = 0, \pi\}$. また, θ は漸近線の間の角度なので, $\theta = 0$ のところでは $f_u - f_v = 0$ から, $\eta = \partial u - \partial v$. $\theta = \pi$ のところでは $\eta = \partial u + \partial v$.

6.8 超幾何微分方程式

[30]

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps, Vol.* 1, Monogr. Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[2] X. Chen and T. Matumoto, *On generic* 1*-parameter families of* C^∞*-maps of an* n*-manifold into a* $(2n-1)$*-manifold*, Hiroshima Math. J. **14** (1985), 547–550.

[3] J. P. Cleave, *The form of the tangent-developable at points of zero torsion on space curves*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **88** (1980), 403–407.

[4] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.

[5] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math. **14**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[6] 福田拓生・西村尚史, 特異点と分岐, 共立出版, 2002.

[7] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387–408.

[8] T. Fukui, M. Hasegawa and K. Saji, *A note on Koenderink type formulas for Whitney umbrellas*, preprint.

[9] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Second edition. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.

[10] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998.

[11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.

[12] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic* 3*-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.

[13] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[14] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. **3** Tata Inst. Fund. Res. Bombay; Oxford Univ. Press, London 1967.

[15] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings. I. The division theorem*, Ann. of Math. **87** (1968), 89–104.

[16] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings. II. Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math. **89** (1969), 254-291.

[17] D. Mond, *On the classification of germs of maps from $\boldsymbol{R}^2$ to $\boldsymbol{R}^3$*, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 333–369.

[18] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662-5665.

[19] B. Morin, *Formes canoniques des singularites d'une application differentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6503-6506.

[20] 松本幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1965.

[21] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

[22] 野口廣・福田拓生, 初等カタストロフィー, 共立出版, 1976.

[23] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 351–369.

[25] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229-239.

[26] K. Saji, *Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **4** (2010), 67–81.

[27] K. Saji, *Criteria for D_4 singularities of wave fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137–147.

[28] K. Saji, *Isotopy of Morin singularities*, preprint.

[29] K. Saji, *Criteria for Morin singularities into higher dimensions*, preprint.

[30] K. Saji, T. Sasaki and M. Yoshida, *Hyperbolic Schwarz map of the confluent hypergeometric differential equation*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 559–578.

[31] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

[32] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.

[33] 梅原雅顕・山田光太郎, 曲線と曲面－微分幾何的アプローチ－, 裳華房, 2002.

[34] C. T. C. Wall, *Introduction to the preparation theorem*, Proc. Liverpool Singul. Sympos. I, Lecture Notes in Math. **192**, Springer, Berlin, 1971. 90-96.