

曲面と円柱の接触と曲面の輪郭線

長谷川 大 (岩手医科大学教養教育センター)*

1. 序

R. Thom は [23] において, D_4 特異点の幾何的性質と \mathbb{R}^3 内の正則曲面の臍点 (umbilic) との類似性を指摘した. その後, I. R. Porteous ([16], [17]) は, 曲面のいくつかの微分幾何的性質が距離 2 乗関数の特異点の観点から記述できることを示し, 距離 2 乗関数の A_3 特異点に対応する峰点 (ridge) とよばれる新しい概念を導入した. また, J. Montaldi ([15]) は, 2つの多様体間の接触の概念を定義し, J. Mather ([13]) が導入した \mathcal{K} -同値との関係の特異点論の言葉による特徴付けた. このことから, 距離 2 乗関数の特異点を調べることで曲面と球面の接触が測ることができ, 臍点や峰点では曲面は球面と退化した接触を所以说える. 曲面と球面の接触の場合と同様に, 曲面と平面との接触は高さ関数で測ることができ, 放物点では曲面は平面と退化した接触をしている. 高さ関数の特異点と曲面の微分幾何的性質の関連性は [3] 等にまとめられている.

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の homogeneous surface は, 群 $O(3) \times \mathbb{R}^3$ のある部分群の軌道であり, 平面, 球, および円柱の3つであることが知られている ([22]). 特異点論の観点からの曲面と平面および球面との接触による曲面の微分幾何的性質の研究は数多くなされ (例えば, [2], [8], [9], [14]), 最近では特異点を持つ曲面と平面および球面との接触の研究もされている (例えば, [6], [21]). したがって, 残された homogeneous surface である円柱と曲面の接触を考えることは自然である. 本稿第2節では, 曲面と平面および球面との接触を通して曲面の微分幾何的性質を復習し, 曲面と円柱との接触をその微分幾何的性質で記述する.

曲面と平面の A_1 -接触の kernel field は双曲的領域の漸近方向を定め, その積分曲線である漸近曲線の特異点は分類されている ([1]). また, 曲面と球面の A_2 -接触の kernel field は臍点以外の点での主方向を定め, その積分曲線である曲率線の特異点も分類されている ([4]). 曲面と円柱との接触では, A_3 -接触の kernel field が定める方向が考えられる. その方向を円柱方向 (cylindrical direction) とよぶ. 第3節では, 円柱方向の積分曲線の特異点を紹介する.

曲面の輪郭線 (apparent contour または profile) は曲面の正射影の特異値集合であることから, \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像の特異点と深く関係している. また, 曲面の輪郭線は曲面と円柱との接触にも深く関係している. 実際に, 点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ を通り $\mathbf{v} \in S^2$ に平行な直線を軸とし, 半径が r であるような円柱 $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$ は

$$|\mathbf{q} - \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - \mathbf{a}|^2 = r^2 \quad (\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0, r > 0) \quad (1.1)$$

を満たす点 $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ で表されることからわかる. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^3 の標準的な内積である. 可微分写像芽 $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ の特異点については, T. Gaffney ([5]) や J. H. Rieger ([18]) による分類や佐治氏 ([19]) や加葉田氏 ([10]) による判定法など様々な研究がなされているが, その特異値集合についての幾何学的な観点からの研究は (筆者の知る限り) ほとんど行われていない. 第4節では, 円柱方向を応用して得られた曲面の輪郭線の微分幾何的性質について述べる.

* 〒028-3694 岩手県紫波郡矢巾町西徳田 2-1-1 岩手医科大学 教養教育センター情報科学科
e-mail: mhase@iwate-med.ac.jp

第2節および第3節の内容は埼玉大学の福井敏純氏と中川幸一氏との共同研究 [7] に基づき、第4節の内容はサンパウロ大学の M. Salarinoghabi 氏との共同研究 [20] に基づく。

2. 曲面と円柱の接触

2.1. 接触

X_i, Y_i ($i = 1, 2$) を \mathbb{R}^n 内の部分多様体で $\dim X_1 = \dim X_2$ かつ $\dim Y_1 = \dim Y_2$ を満たしているものとする。このとき、 X_1 と Y_1 の x_1 における接触が X_2 と Y_2 の x_2 における接触と同じであるとは、微分同相写像芽 $\Phi : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_2)$ で $\Phi(X_1) = X_2$ かつ $\Phi(Y_1) = Y_2$ を満たすものが存在することである。

J. Montaldi は次のように特異点論の言葉で特徴付けた：

定理 2.1 ([15]). $g_i : (U_i, u_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_i)$ ($i = 1, 2$) をはめ込みで $X_i = g_i(U_i)$, $f_i : (\mathbb{R}^n, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を沈めこみで $Y_i = f_i^{-1}(0)$ となるものとする。このとき、 X_1 と Y_1 の x_1 における接触が X_2 と Y_2 の x_2 における接触と同じであるための必要十分条件は $f_1 \circ g_1$ と $f_2 \circ g_2$ が \mathcal{K} -同値であることである。

ここで、可微分写像芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ が \mathcal{K} -同値であるとは、微分同相芽 $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ と写像芽 $A : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$ が存在して $g \circ \varphi(x) = A(x)f(x)$ を満たすことである。特に本稿では、次の $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の \mathcal{K} -同値のクラスに対応する接触のタイプについて考える：

$$A_k^\pm : x^2 \pm y^{k+1}, \quad D_k^\pm : xy^2 \pm x^{k-1} \quad (k \geq 4).$$

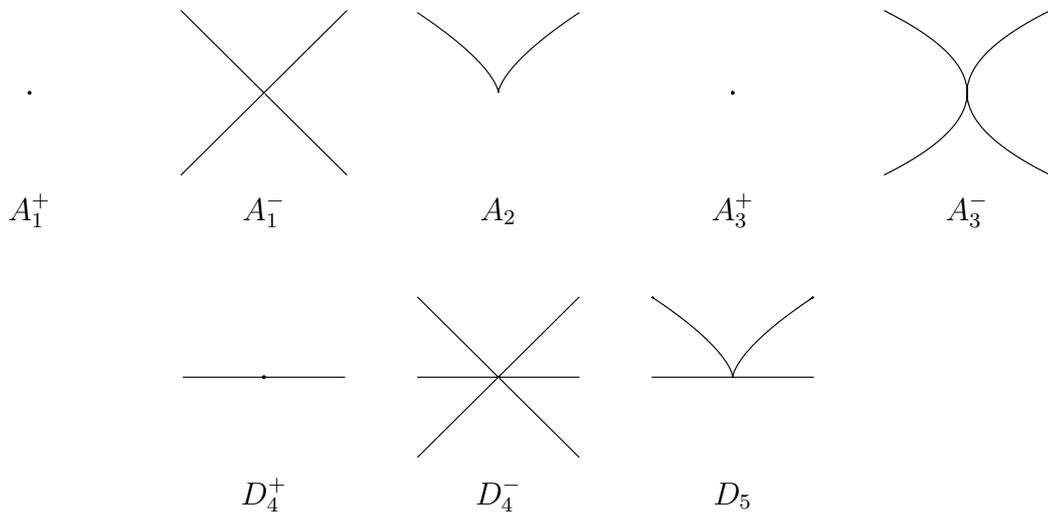


図 1: $A_{\leq 3}, D_{\leq 5}$ -特異点の零点集合.

2.2. 平面との接触

\mathbb{R}^3 内の平面は

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle = d \quad (\mathbf{v} \in S^2) \quad (2.2)$$

を満たす $\mathbf{q} = (x, y, z)$ によって定まる。したがって、平面のモジュライ空間は3次元となり、曲面と平面のジェネリックな接触は、 A_1, A_2, A_3 -接触が考えられる。

事実 2.2. \mathbb{R}^3 内の正則曲面 S と (2.2) で定まる平面 $\pi_{v,d}$ との点 $\mathbf{p} \in S \cap \pi_{v,d}$ での接触は次のようになる。

- (1) $A_{\geq 1}$ -接触である必要十分条件は $\mathbf{v} = \pm \mathbf{n}(\mathbf{p})$ である。ここで、 $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ は点 \mathbf{p} における S の単位法ベクトルである。
- (2) $A_{\geq 2}$ -接触である必要十分条件は $\mathbf{v} = \pm \mathbf{n}(\mathbf{p})$ かつ点 \mathbf{p} が放物点 (parabolic point) (i.e., ガウス曲率 $K(\mathbf{p}) = 0$) であることである。
- (3) $A_{\geq 3}$ -接触である必要十分条件は $\mathbf{v} = \pm \mathbf{n}(\mathbf{p})$ かつ点 \mathbf{p} が cusp of Gauss であることである。ここで、点 \mathbf{p} が cusp of Gauss であるとは、 $\kappa_i(\mathbf{p}) = 0$, $\kappa_j(\mathbf{p}) \neq 0$, $\mathbf{v}_i \kappa_i(\mathbf{p}) = 0$ であるときを言う。 $\kappa_i(\mathbf{p})$ は点 \mathbf{p} における主曲率で $\mathbf{v}_i \kappa_i(\mathbf{p})$ は点 \mathbf{p} における κ_i の主方向 \mathbf{v}_i に沿う方向微分係数である。また、 $\mathbf{v}_i \kappa_i(\mathbf{p}) = 0$ であるとき、点 \mathbf{p} は主方向 \mathbf{v}_i に関する峰点 (ridge point または単に ridge) であるという。

2.3. 球面との接触

\mathbb{R}^3 内の球面は

$$|\mathbf{q} - \mathbf{a}|^2 = r^2 \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, r > 0) \quad (2.3)$$

を満たす $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ によって定まる。したがって、球面のモジュライ空間は4次元となり、曲面と球面とのジェネリックな接触は、 A_1, A_2, A_3, A_4, D_4 -接触が考えられる。

事実 2.3. \mathbb{R}^3 内の正則曲面 S と (2.3) で定まる球面 $S_{a,r}$ との点 $\mathbf{p} \in S \cap S_{a,r}$ での接触は次のようになる。

- (1) $A_{\geq 1}$ -接触である必要十分条件は、点 \mathbf{a} が点 \mathbf{p} の法線上にあることである。
- (2) $A_{\geq 2}$ -接触である必要十分条件は、点 \mathbf{a} が点 \mathbf{p} における κ_i に関する焦点 (focal point) (i.e., $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{n}(\mathbf{p})/\kappa_i(\mathbf{p})$) であることである。
- (3) $A_{\geq 3}$ -接触である必要十分条件は、点 \mathbf{a} が点 \mathbf{p} における κ_i に関する焦点で \mathbf{p} が \mathbf{v}_i に関する峰点であることである。
- (4) $A_{\geq 4}$ -接触である必要十分条件は、点 \mathbf{a} が点 \mathbf{p} における κ_i に関する焦点で \mathbf{p} が \mathbf{v}_i に関する2次以上の峰点 (i.e., $\mathbf{v}_i \kappa_i(\mathbf{p}) = \mathbf{v}_i^2 \kappa_i(\mathbf{p}) = 0$) であることである。
- (5) $D_{\geq 4}$ -接触である必要十分条件は、点 \mathbf{p} が臍点 (umbilic) (i.e., $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p})$) であり、点 \mathbf{a} が点 \mathbf{p} における焦点であることである。

2.4. 円柱との接触

\mathbb{R}^3 内の円柱は (1.1) を満たす点 $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ によって定まる。したがって、円柱のモジュライ空間は5次元となり、曲面と円柱とのジェネリックな接触は $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D_4, D_5$ -接触が考えられる。

S を \mathbb{R}^3 内の正則曲面、 $C_{v,a,r}$ を (1.1) で定まる円柱とする。 $\mathbf{p} \in S \cap C_{v,a,r}$ での S と $C_{v,a,r}$ の接触に関して以下が成り立つ。

定理 2.4 ([7]). (1) $A_{\geq 1}$ -接触する必要十分条件は, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ かつ

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{p})$$

となるような $\lambda \neq 0$ が存在することである.

(2) $A_{\geq 2}$ -接触をする必要十分条件は上の条件と次のいずれかが成り立つことである:

(I) 点 \mathbf{p} は放物点ではなく, \mathbf{v} は点 \mathbf{p} における漸近方向ではなく, $\lambda = 1/\kappa_c$ となることである. ここで, κ_c は \mathbf{v} 方向から見たときの S の輪郭線の \mathbf{p} に対応する点での曲率である.

(II) 点 \mathbf{p} は臍点ではない放物点, すなわち $\kappa_i(\mathbf{p}) = 0$ かつ $\kappa_j(\mathbf{p}) \neq 0$ で, \mathbf{v} は S の点 \mathbf{p} における漸近方向 (i.e., 点 \mathbf{p} における \mathbf{v} 方向の法曲率 $\kappa_n(\mathbf{v}) = 0$ となる方向) で, $\lambda \neq 1/\kappa_j(\mathbf{p})$ となることである.

(III) 点 \mathbf{p} は平坦臍点 (i.e., $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$) である.

定理 2.4(2) の (I) が成り立つとき, S と $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$ の接触は, \mathbf{v} 方向から見たときの S の輪郭線の幾何で記述できる.

定理 2.5. ([7]) 定理 2.4(2) の (I) が成り立っているとす. このとき, S と $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$ が点 \mathbf{p} で A_k -接触 ($k \geq 3$) する必要十分条件は \mathbf{v} 方向から見たときの S の輪郭線が \mathbf{p} に対応する点で $(k-2)$ 次の頂点 (vertex) を持つことである. ここで, 平面曲線 $\gamma = \gamma(t)$ が点 $\gamma(t_0)$ で n 次の頂点を持つとは, γ の曲率を $\kappa(t)$ とするとき,

$$\kappa(t_0) \neq 0, \quad \kappa^{(i)}(t_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad \kappa^{(n+1)}(t_0) \neq 0$$

が成り立つときを言う.

定理 2.4(2) の (II) または (III) が成り立つ場合の $A_{\geq 3}$ -接触の必要十分条件は複雑であることと, 本稿第 3 節以降の内容には関係ないことから, ここでは省略する. 同様に, D_4, D_5 -接触の必要十分条件もここでは省略する. 詳細は [7] を参照されたい.

3. 円柱方向

2 つの方向 (dx_1, dy_1) と (dx_2, dy_2) が曲面 S の点 \mathbf{p} において互いに共役 (conjugate) であるとは, 点 \mathbf{p} で

$$L dx_1 dx_2 + M (dx_1 dy_2 + dx_2 dy_1) + N dy_1 dy_2 = 0$$

を満たすときを言う. ここで, L, M, N は S の第二基本形式の係数である.

S が Monge 標準形

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)) \quad f(x, y) = \sum_{i+j=2}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j + o(n) \quad (3.4)$$

で与えられているとす. 原点が放物点でないとする. S と $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$ が原点で $A_{\geq 3}$ -接触をするとき, (dx, dy) の共役方向 $(a_{11}dx + a_{02}dy, -a_{20}dx - a_{11}dy)$ は f の 3 次の項 $f_3(x, y)$ の根である. すなわち, $f_3(a_{11}dx + a_{02}dy, -a_{20}dx - a_{11}dy) = 0$ である. このとき, (dx, dy) は原点における S の円柱方向 (cylindrical direction) であると言う.

定義より，円柱方向はジェネリックに1つまたは3つある． f_3 の判別集合を Δ とすると， $\Delta = 0$ となる点では円柱方向は2つあり(1つは f_3 の重根に対応している)，円柱方向場はそこで特異点を持つ．円柱方向の積分曲線の特異点は図2のように分類される．太線は $\Delta = 0$ である．詳細な条件は[7]を参照されたい．

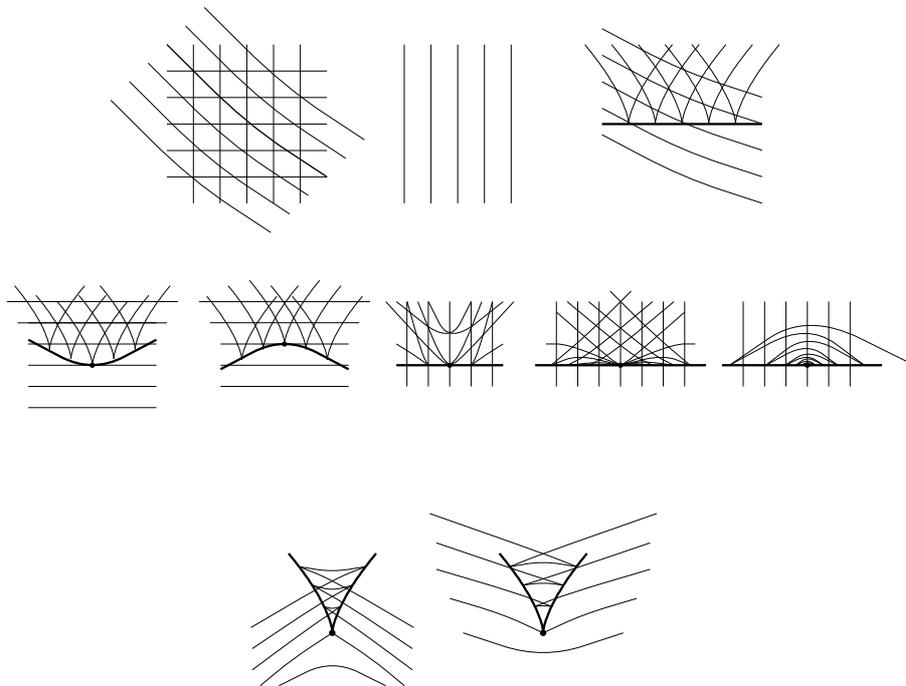


図 2: 円柱方向の積分曲線の特異点.

4. 円柱方向の曲面の輪郭線への応用

2つの可微分写像芽 $f, g : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ が \mathcal{A} -同値であるとは，可微分同相写像芽 $\sigma : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0, \tau : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ が存在し， $g = \tau \circ f \circ \sigma$ が成り立つときを言う．

\mathbb{R}^3 内の正則曲面の正射影の \mathcal{A} -同値によって分類されたジェネリックな特異点は表1で与えられている．

表 1: 曲面の正射影のジェネリックな特異点.

Name	Normal form
Fold	(x, y^2)
Cusp	$(x, xy + y^3)$
Lips/Beaks	$(x, y^3 \pm x^2y)$
Goose	$(x, y^3 + x^3y)$
Swallowtail	$(x, xy + y^4)$
Butterfly	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$
Gulls	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$

講演者は [20] において、正射影がジェネリックな特異点を持つときの射影方向の変化による輪郭線の変形に現れる変曲点 (inflection), カスパ (cusp) および頂点について精査した。

曲面を方向 \mathbf{v} から見たときの輪郭線は、 \mathbf{v} 方向の正射影の特異点集合である。正射影の特異点が fold, cusp, swallowtail, butterfly の場合は、正射影の特異点集合は非特異であり、そのパラメータ表示を求めることができる。したがって、そのパラメータ表示から輪郭線のパラメータ表示を求めることができ、輪郭線の変曲点、カスパおよび頂点を調べることができる。一方、正射影の特異点が lips/beaks, goose, gulls の場合は、正射影の特異点集合は特異点を持つために輪郭線のパラメータ表示を求めることができない。本節では、特に正射影の特異点が beaks の場合の輪郭線の変形に現れる変曲点、カスパおよび頂点について述べる。

\mathbb{R}^3 内の正則曲面 S の局所的なパラメータ表示を $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とし、 S の正射影の族を

$$P : U \times S^2 \rightarrow TS^2, \quad P(x, y, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \langle \varphi(x, y), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v})$$

とする。このとき、 P の第 2 成分を P_v で表す。 P_v は S の \mathbf{v} 方向の正射影である。

φ として Monge 標準形 (3.4) を考える。また、 $\mathbf{v}_0 \in T_p S$ とし、必要ならば座標軸を回転させることにより $\mathbf{v}_0 = (0, 1, 0)$ であるとすると、

$$P_{\mathbf{v}_0} = (x, f(x, y))$$

と書ける。 \mathbf{v}_0 の近くの方法 \mathbf{v} を $\mathbf{v} = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v))$ と表す。 S の正射影の族 P は、 (u, v) に関する座標変換 ψ と \mathbb{R}^3 の回転で

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y, u, v) &= R \circ P(x, y, \psi(u, v)) \\ &= (\cos(u)x + \sin(v)y, 0, \cos(u) \sin(v)y - \sin(u) \sin(v)x + \cos(v)f(x, y)) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $P_{\mathbf{v}_0} = \tilde{P}(x, y, 0, 0)$ である。今、 $P_{\mathbf{v}_0}$ の特異点が beaks であると仮定する。すなわち、 $P_{\mathbf{v}_0}$ は beaks の normal form と \mathcal{A} -同値である。このとき、 $P_{\mathbf{v}_0}$ の特異点集合 $\Sigma(P_{\mathbf{v}_0})$ は交差する 2 つの正則曲線となる。さらに、 \tilde{P}_v の特異点集合 $\Sigma(\tilde{P}_v)$ の変形は図 3 の右のようになり、 u の変化に対して安定である。したがって、

$$F(x, y, v) = \tilde{P}(x, y, 0, v)$$

として、 F を考える。

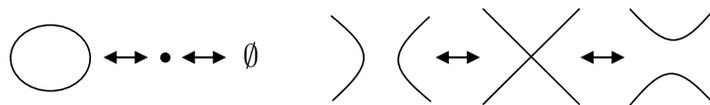


図 3: lips (左) と beaks (右) の特異点集合の変形のモデル。

輪郭線の変形に現れる変曲点、カスパおよび頂点を調べるために定義域において、 F の特異点集合 $\Sigma(F)$ と、ある性質をもつ点の軌跡との交点を考える。まずは変曲点について考察する。J. J. Koenderink は $\kappa_n(\mathbf{v}) \neq 0$ のとき、 $K = \kappa_n(\mathbf{v}) \kappa_c$ が成り立つことを

示した ([11], [12]). したがって, $\kappa_n(\mathbf{v}) \neq 0$ のとき, $K = 0$ と $\kappa_c = 0$ は同値である. ここで,

$$I(x, y) = L(x, y)N(x, y) - M(x, y)^2$$

とすると¹, $\Sigma(F)$ と $I(x, y) = 0$ の交点は $\kappa_c = 0$ となる点, すなわち輪郭線の変曲点に対応している.

次にカスプについて考察する. $\kappa_n(\mathbf{v}) = 0$ となる方向は漸近方向で, その方向に正射影したときの輪郭線はカスプを持つ. ここで, S の接ベクトル $\mathbf{v} = a\varphi_x + b\varphi_y$ に対し,

$$C(x, y) = a^2L(x, y) + 2abM(x, y) + b^2N(x, y)$$

とすると, $C(x, y) = 0$ は \mathbf{v} が漸近方向となる点の軌跡である. したがって, $\Sigma(F)$ と $C(x, y) = 0$ の交点は, 輪郭線のカスプに対応している.

最後に頂点について考察する. 今, (a, b) と $\mathbf{v} = a\varphi_x + b\varphi_y$ を同一視して考える. 定理 2.5 と原点における円柱方向の定義より, \mathbf{v} が円柱方向ならば, \mathbf{v} 方向から見たときの輪郭線は原点に対応する点で頂点を持つ. このことから, 原点以外に円柱方向を拡張して, 「 \mathbf{v} が円柱方向であるような点の軌跡」を考えると, 変曲点やカスプと同様に輪郭線の頂点が見える. そこで, 次のように円柱方向を原点以外にも拡張する. 今, 正則曲面 S の原点におけるパラメータ表示 φ は Monge 標準形 (3.4) で与えられている. 点 $(x, y, f(x, y))$ における Monge 標準形は次のようになる².

$$\tilde{\varphi}(s, t) = (s, t, \tilde{f}(s, t)), \quad \tilde{f}(s, t) = \sum_{i+j=2}^n \frac{A_{ij}(x, y)}{i!j!} + o(n)$$

例えば,

$$\begin{aligned} A_{20}(x, y) &= a_{20} + a_{30}x + a_{21}y + o(1), \\ A_{11}(x, y) &= a_{11} + a_{21}x + a_{12}y + o(1), \\ A_{02}(x, y) &= a_{02} + a_{12}x + a_{03}y + o(1) \end{aligned}$$

である. 構成法の詳細は [20] を参照されたい. したがって, 原点 $\tilde{\varphi}(0, 0)$, すなわち点 $(x, y, f(x, y))$ における $\mathbf{v} = a\tilde{\varphi}_s + b\tilde{\varphi}_t$ の共役方向は

$$(aA_{11}(x, y) + bA_{20}(x, y))\tilde{\varphi}_s + (-aA_{20}(x, y) - bA_{11}(x, y))\tilde{\varphi}_t$$

であるから, $\mathbf{v} = a\tilde{\varphi}_s + b\tilde{\varphi}_t$ が円柱方向である必要十分条件は

$$V(x, y) = \tilde{f}_3(aA_{11}(x, y) + bA_{20}(x, y), -aA_{20}(x, y) - bA_{11}(x, y)) = 0$$

である. ここで, \tilde{f}_3 は \tilde{f} の 3 次の項である. したがって, $\Sigma(F)$ と $V(x, y) = 0$ の交点は, 輪郭線の頂点に対応している.

今考えている \mathbf{v} を $C(x, y)$ と $V(x, y)$ に代入すると, $C(x, y) = 0$ は $I(x, y) = 0$ と原点で接し, $V(x, y) = 0$ はジェネリックに D_4 特異点を持ち, D_4^+ のときは 1 本の曲線で, D_4^- のときは交差する 3 本の正則曲線になる. ここで, $V(x, y) = 0$ が D_4^+ 特異点を持つ

¹ $I = 0$ と $K = 0$ は同値であるが, 役割をわかりやすくするために I とおいた.

² 円柱方向の積分曲線を考察するときも同様の原点以外での Monge 標準形を構成する.

beaks を D_4^+ -beaks とよび, D_4^- 特異点を持つ beaks を D_4^- -beaks と呼ぶ. D_4^+ -beaks と D_4^- -beaks の $\Sigma(F)$, $I(x, y) = 0$, $C(x, y) = 0$ および $V(x, y) = 0$ の配置は, それぞれ図4の左と右のようになる. よって, D_4^+ -beaks と D_4^- -beaks の変形における $\Sigma(F)$ 上での輪郭線の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点は, それぞれ図5と図6のようになる. したがって, 次が成り立つ.

定理 4.1. ([20]) \mathbb{R}^3 内の曲面の \mathbf{v} 方向の正射影の beaks 特異点はジェネリックに2つのタイプに分類される. 1つは D_4^+ -beaks で, \mathbf{v} 方向から見た曲面の輪郭線の変形は図7となる. もう1つは D_4^- -beaks で, \mathbf{v} 方向から見た曲面の輪郭線の変形は図8となる.

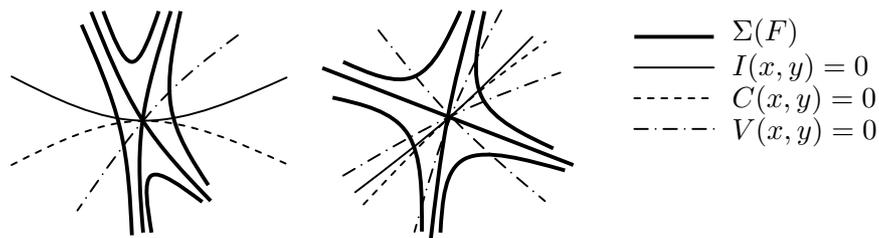


図 4: D_4^+ -beaks (左) と D_4^- -beaks (右) の $\Sigma(F)$, $I(x, y) = 0$, $C(x, y) = 0$ および $V(x, y) = 0$ の配置.

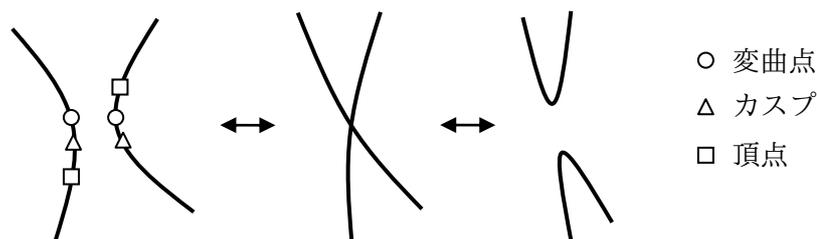


図 5: D_4^+ -beaks の $\Sigma(F)$ 上の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点.

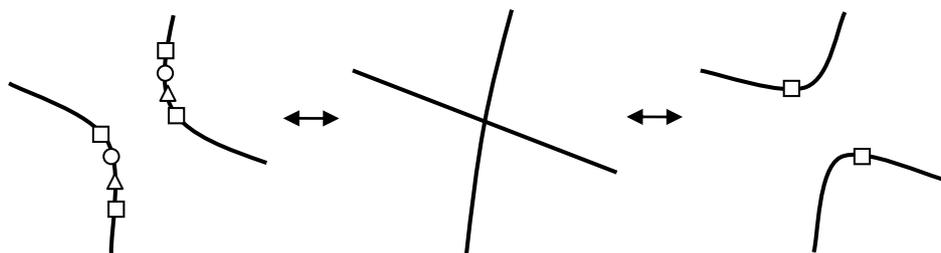


図 6: D_4^- -beaks の $\Sigma(F)$ 上の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点.



図 7: D_4^+ -beaks における輪郭線の変形.



図 8: D_4^- -beaks における輪郭線の変形

参考文献

- [1] T. Banchoff, T. Gaffney, and C. McCrory, Cusps of Gauss maps, Research Notes in Mathematics 55, Pitman, 1982.
- [2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, Curves and Singularities, Cambridge University Press, 1984. Second Edition, 1992.
- [3] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and F. Tari, Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals, in “Real and Complex Singularities”, Ed. W. L. Marar, Pitman Research Notes in Math. 333 (1995).
- [4] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV, Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [5] T. Gaffney, The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, Height functions on Whitney umbrellas, Kôkyûroku Bessatsu, **B38** (2013), 153–168.
- [7] T. Fukui, M. Hasegawa, and K. Nakagawa, Contact of a regular surface in Euclidean 3-space with cylinders and cubic binary differential equations, to appear J. Math. Soc. Japan.
- [8] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster and M. A. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3029–3043.
- [9] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. Ruas, and F. Tari, Differential geometry from singularity theory viewpoint, World Scientific Pub Co Inc (2015/1/30).
- [10] Y. Kabata, Recognition of plane-to-plane map-germs, Topology and its Applications, **202** (2016), 216–238.
- [11] J. J. Koenderink, *What does the occluding contour tell us about solid shape?*, Procection, **13** (1984), 321–330.
- [12] J. J. Koenderink, *Solid shape*, MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [13] J. Mather, Stability of mappings, III. Finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1969), 127–156.
- [14] D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster, and M. A. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. Geometriae Dedicata **54** (1995), 323–332.
- [15] J. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. **33** (1986), 195–199.
- [16] I. R. Porteous, The normal singularities of a submanifolds, J. Differential Geometry **5** (1971) 543–564.
- [17] I. R. Porteous, The normal singularities of surfaces in \mathbb{R}^3 , Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 379–393, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [18] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), 351–369.
- [19] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.

- [20] M. Salarinoghabi and M. Hasegawa, On the geometry of the profiles of surfaces in \mathbb{R}^3 , preprint.
- [21] R. Oset-Shinha and F. Tari, Projections of surfaces in \mathbb{R}^4 to \mathbb{R}^3 and the geometry of their singular images, *Revista Matematica Iberoamericana*, **31** (2015), 33–50.
- [22] T. Takahashi, Homogeneous hypersurfaces in space of constant curvature, *J. Math. Soc. Japan* **22**, (1970), 395–410.
- [23] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Benjamin Paris, 1972.