多様体の三角形分割の組合せ論と代数

村井　聡（大阪大学大学院情報科学研究科）

1. 序文

本稿では多様体の三角形分割の頂点や面の個数の研究に関する最近の話題について紹介する. 以下, 多様体 M の三角形分割と言った時には, 有限単体的複体であってその幾何学的実現が M と同相であるものを指すこととする. また, 多様体は常に連結で有限三角形分割可能なもののみを考える.

単体的複体の面の個数を調べることは組合せ論の分野における重要な研究テーマの一つである. わかりやすい問題を一つ紹介しよう.

問: M を多様体とする. M を三角形分割する為には頂点は幾つ必要か?

例えば, 実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ には 6 頂点, 2 次元トーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ には 7 頂点の三角形分割が存在する (図 1 参照). 実は, これより少ない頂点数の三角形分割は存在しないので, 求めたかった値は $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の場合にはそれぞれ 6, 7 である. こういった値を色々な多様体について求めよう, というのが問題である.

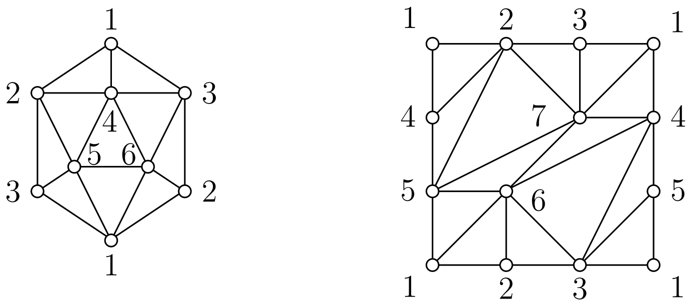


図 1: $\mathbb{R}P^2$ の 6 頂点分割と $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の 7 頂点分割

なんだか簡単そうな問題に思えるが, 実は上の問題は非常に難しい. 実際, 19 世紀の間には閉曲面やごく一部の低次元の多様体の場合にしか必要な頂点数の最小値はわかっていなかった. また, 現在でも 4 次元射影空間 $\mathbb{R}P^4$ や 3 次元トーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の場合でさえ問題は解決していない.

上では頂点数に関する問題を紹介したが, 一般には i 次元面の個数の上限や下限に興味が持たれる. 実は, 多様体の三角形分割の面の個数に関する研究はここ 10 年程で大きく研究が進んでいる. その要因の一つに h'' 列と呼ばれる数を考えることで多様体の三角形分割の面の個数を組合せ論的・代数的に綺麗に扱えるようになったことが挙げられる. 本稿ではこの h'' 列に関する理論を紹介することを主な目的としたい.

本稿の前半では先ず組合せ論的な動機を理解して貰う為, 上で述べた多様体の三角形分割の頂点数に関する問題について少し詳しく紹介する. その後, h'' 列の理論について解説し, h'' 列が頂点数の問題にどう応用されるのか簡単に紹介する.

ところで, 多様体の三角形分割の面の個数に関する研究は, 上記の頂点数の問題も含めて, 結局の所 '**大したことはわかっていない**' というのが現状である. 今から新規参入してトポロジー的な立場から何か問題に貢献できる余地は大いにあるのでは無いかと思う.

2. 多様体の三角形分割の最小頂点数

単体的複体は有限抽象単体的複体を指すこととする (但し, 位相的な性質を考える際はその幾何学的実現の性質を考える). 単体的複体 Δ に対し, その i 次元面の個数を $f_i(\Delta)$ で表す. $f_0(\Delta)$ は頂点の個数, $f_1(\Delta)$ は辺の個数である. また, $\beta_i(\Delta;\mathbb{F})$ で体 $\mathbb{F}$ を係数とする被約ホモロジー群 $\tilde{H}_i(\Delta;\mathbb{F})$ のベクトル空間としての次元を表すとする. (有限三角形分割可能な位相) 多様体 M に対し

$$f_0^{\min}(M) = \min\{f_0(\Delta) : \Delta \text{ は } M \text{ の三角形分割 }\}$$

と定める. ここで考える問題は次の問題である.

問題 2.1. 与えられた閉多様体 M に対し, $f_0^{\min}(M)$ を求めよ.

2.1. 閉曲面の場合.

最初に閉曲面の場合を考え, 感じを掴んで貰おう. 一般論は後回しにして, まずは図 1 の $\mathbb{R}P^2$ と $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ の三角形分割が何故最小の頂点数を持つか説明する. 示さなくてはならないのは, $\mathbb{R}P^2$ の三角形分割が必ず 6 個以上の頂点を持つ事, 及び $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ の三角形分割が必ず 7 個以上の頂点を持つ事, である. この事は, Heawood の不等式と呼ばれる次の簡単な結果から確認できる.

定理 2.2 (Heawood の不等式 [He])**.** Δ が閉曲面 M の v 頂点三角形分割なら,

$$\binom{v-3}{2} \geq 3(2-\chi(M)) \tag{1}$$

が成り立つ. 但し, $\chi(M)$ は M のオイラー数とする.

証明. 簡単なので証明も紹介しよう. Δ の面の個数について次の 2 つの等式が成り立つ

$$v - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(\Delta),\ 2f_1(\Delta) = 3f_2(\Delta).$$

最初の等式はオイラー関係式である. 二つ目の式は, Δ の各辺が丁度 2 つの 2 次元面に含まれ, かつ Δ の各 2 次元面が丁度 3 本の辺を含むことから従う. 一方, 明らかに $f_1(\Delta) \leq \binom{n}{2}$ であるので, 上の二つの等式を用いて $f_2(\Delta)$ を消去して

$$v - \chi(M) = \frac{1}{3}f_1(\Delta) \leq \frac{1}{3}\binom{v}{2}$$

を得る. 上で得られる不等式 $v-\chi(M) \leq \frac{1}{3}\binom{v}{2}$ を少し変形すると, 求める不等式 $\binom{v-3}{2} \geq 3(2-\chi(M))$ が得られる. □

Heawood の不等式を $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ に適応してみよう. $\chi(\mathbb{R}P^2)=1$, $\chi(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)=2$ であるから, 次のように欲しかった不等式が得られる.

- $\binom{f_0^{\min}(\mathbb{R}P^2)-3}{2} \geq 3$, 即ち $f_0^{\min}(\mathbb{R}P^2) \geq 6$.
- $\binom{f_0^{\min}(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)-3}{2} \geq 6$, 即ち $f_0^{\min}(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1) \geq 7$.

今度は一般の閉曲面について考えてみよう. 閉曲面は種数と向きによって完全に分類がされているので, それぞれの曲面に対して $f_0^{\min}$ を求めてやればよい. $S_g = (\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)^{\#g}$ を向き付可能な種数 g の閉曲面, $N_g = (\mathbb{R}P^2)^{\#g}$ を向き付不可能な種数 g の閉曲面とする, 但し, $M^{\#g}$ で M の g 個の連結和を表す. 実は, 一般の場合も Heawood の不等式からほぼ最小頂点数が決まることが証明されている.

定理 2.3 (Jungerman and Ringel [Ri, JR] 1955, 1980)**.** M が S_2, N_2, N_3 以外の連結な閉曲面である時, (1) を満たす任意の v に対し M の v 頂点三角形分割が存在する.

先の定理を示すには, M の三角形分割を具体的に構成すればよいのであるが, 頂点数の小さい三角形分割を具体的に構成するのは難しい問題であり, 定理 2.3 の証明も易しくない. 尚, 上の定理は向き付け不可能な場合が 1955 年に Ringel によって示され, 向き付け可能な場合が 1980 年に Jungerman と Ringel の二人によって示された.

さて, Heawood の不等式と Jungerman–Ringel の定理を纏めると, 次の結果が得られ, 閉曲面の場合に三角形分割に必要な頂点数の最小値が求まる[1].

系 2.4. M が S_2, N_2, N_3 以外の連結な閉曲面である時,

$$f_0^{\min}(M) = \min\left\{v \in \mathbb{N} : \binom{v-3}{2} \geq 3(2-\chi(M))\right\}.$$

尚, 3 つの例外 S_2, N_2, N_3 については, $f_0^{\min}(S_2) = 10$, $f_0^{\min}(N_2) = 8$, $f_0^{\min}(B_3) = 9$ となる (系 2.4 の右辺より一つ大きい値).

2.2. 一般次元の閉多様体の場合 (古い結果).

ここからは一般次元の多様体の三角形分割の場合の話に移る. 始めに断わっておきたいのは, 序文にも述べたとおり, 一般次元の場合にはほとんど何もわかっていないというのが現状であるから, 先ほどの系 2.4 のような一般的な美しい結果に出会えることは期待しないで欲しい.

話を始める前に, どういうことを調べなくてはならないのかを明確にしておく. 閉多様体 M が与えられた時, その $f_0^{\min}(M)$ を求めるには次の二つことが必要である.

- (♠) $f_0^{\min}(M)$ の下限を与える (頂点数の下限を求める).
- (♡) $f_0^{\min}(M)$ の上眼を与える (頂点数の少ない三角形分割を実際に構成する).

上の問題 (♠), (♡) はどちらも難しい. 特に, 具体的に三角形分割を構成しなくてはならない (♡) は閉曲面の場合でも簡単でなく, ある意味職人芸の領域である. 本稿でも (♡) については触れないことにして主に (♠) の問題について解説する. 閉曲面の場合には問題 (♠) は Heawood の不等式で殆ど全てが説明できるので, 次元が 3 以上の場合が問題となる.

問題 (♠) に関する基礎的な結果は 1987 年に Brehm と Kühnel [BK1] によって示された. この節では主に彼らの結果を紹介する. 球面 $\mathbb{S}^n$ の場合 $f_0^{\min}(\mathbb{S}^n) = n+2$ となることはほぼ明らかであるが, 球面でないとわかっている時, 必要な頂点数はどれくらいだろうか? 次の定理がこの問題に良い解答を与える.

定理 2.5 (Brehm–Kühnel 1987)**.** Δ が球面でない閉 n 多様体の組合せ三角形分割[2]なら $f_0(\Delta) \geq \lceil \frac{3}{2}n \rceil + 3$. 等号成立の時, Δ は $\mathbb{R}P^2, \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2, \mathbb{O}P^2$ の何れかと同じホモロジー群を持つ[3].

例 2.6. 先の定理で等号が成立する三角形分割について少し補足しておく. 定理 2.5 より, その時の次元は $n = 2, 4, 8, 16$ である. (以下 $f_0^{\min}$ が決まる時には ★ を用いる).

- ★ $n = 2$ の時, そのような分割は一意的で $\mathbb{R}P^2$ の 6 頂点三角形分割しかない.
- ★ $n = 4$ の時, やはり分割は一意的で, $\mathbb{C}P^2$ の 9 頂点三角形分割 [KB] しかない.

---

[1]定理 2.2 や 2.4 は 4 色問題の閉曲面への一般化の研究の過程で得られたものであり, 三角形分割の頂点数の最小値を求めることが主目的だったわけではないことを注意しておく.

[2]組合せ三角形分割とは各頂点の link が単体の境界と PL 同相となる三角形分割の事. 三角形分割の話は PL の世界で考えることが多いのでこの仮定は自然な仮定である.

[3]実際にはもう少し強く, [EK] で述べられている combinatorial manifold になる.

★ $n=8$ の時, 15 頂点の球面でない 8 次元閉多様体の三角形分割は 3 種類知られているが, これらの中に $\mathbb{H}P^2$ の三角形分割があるかは未解決問題である[4].

- 16 次元閉多様体の三角形分割で 27 頂点の球面のものがあるかは未解決問題.

Brehm と Kühnel はホモロジー群と頂点数の関係についても考察し, 次の定理を得ている.

定理 2.7 (Brehm–Kühnel 1987)**.** M が閉 n 多様体で, ある $i<\frac{n}{2}$ に対して $H_i(M)\neq 0$ であるなら, $f_0^{\min}(M)\geq 2n+4-i$ である.

注 2.8. 上の定理は $i=\frac{n}{2}$ の時もほぼ成り立つ. というのは, n が偶数で $i=\frac{n}{2}$ の時は上の下限の右辺は $\frac{3}{2}n+4$ となるが, 頂点数 $\frac{3}{2}n+3$ 以下の三角形分割を持つ多様体は定理 2.5 にある射影平面のようなものしかないからである.

例 2.9. 定理 2.7 により頂点数の最小値が決まりそうな多様体は球面の直積 $\mathbb{S}^i\times\mathbb{S}^j$ である. 定理から $f_0^{\min}(\mathbb{S}^i\times\mathbb{S}^j)\geq 2i+j+4$ (但し, $i\geq j$ とする) であるが, このことと三角形分割の具体的な構成から次が決まる.

★ $f_0^{\min}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^2)=12$.
★ $f_0^{\min}(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)=13$.
★ $f_0^{\min}(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)=11$.
★ $f_0^{\min}(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^1)$ は d が偶数なら $2d+3$, d が奇数なら $2d+4$ に一致する.
★ $f_0^{\min}(\mathbb{S}^{d-1}\underline{\times}\mathbb{S}^1)$ は d が奇数なら $2d+3$, d が偶数数なら $2d+4$ に一致する.

但し, $\mathbb{S}^{d-1}\underline{\times}\mathbb{S}^1$ は向き付け不可能な $\mathbb{S}^1$ 上の $\mathbb{S}^{d-1}$ 束を表す[5]. $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ の場合は $i+2j+4$ と異なる値が出ているが, これは 10 頂点の $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ の三角形分割の非存在性 [KL] から最小頂点数が 11 であることが決まる. 尚, $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^{d-1}\underline{\times}\mathbb{S}^1$ に関する結果は (驚くべきことに) 比較的最近の結果である [BD, CSS].

上記以外の (i,j) に対して, $f_0^{\min}(\mathbb{S}^i\times\mathbb{S}^j)$ の値は未解決である. ([KN] にある球面の直積の三角形分割の構成から, $2i+2j+4$ 以下であることはわかっている.)

さて, 定理 2.5 や 2.7 は「球面でない」とか「ホモロジー群が消えていない」などのかなり限定的な状況を考えているが, 4 次元の場合には次のような Heawood の不等式の類似が知られている. (後述の定理 2.10 の方が良い下限を与える.)

定理 2.10 (Kühnel [Kü2] 1990)**.** Δ が閉 4 多様体 M の v 頂点三角形分割なら

$$\binom{v-4}{3}\geq 10(\chi(M)-2).$$

例 2.11. 先の定理により, 二つの多様体の最小頂点数が決まる. $(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)^{\#2}$ には 12 頂点の, $K3$ 曲面には 16 頂点の三角形分割の存在することと, $\chi((\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)^{\#2})=6, \chi(K3)=24$ であることから次のことがわかる.

★ $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)^{\#2})=12$.
★ $f_0^{\min}(K3)=24$.

---

[4] 3 つの内の一つが $\mathbb{H}P^2$ の三角形分割になることが予想されている. 具体的な三角形分割が与えられているが, 位相型が決まらないという不思議な問題である. Pontrjagin 類を計算すれば良いらしいのだか計算機の力で何とかならないのだろうか?

[5] $\mathbb{S}^1$ 上の $\mathbb{S}^{d-1}$ 束は向付け可能なものと不可能なものの 2 種類しかない [Ste].

2.3. 一般次元の閉多様体の場合 (新しい結果).

最近得られたの結果について二つ紹介しておこう. 最近の結果のポイントは, 定理 2.7 のような「ホモロジーが消えていないとき」に関する定理が「ホモロジー群が大きいときに頂点数も大きい」という定理に拡張できるようになったことである. どういう道具を使って証明するのかの解説は後回しにしてここでは結果だけ紹介する. 以下, $\mathbb{F}$ は任意の体とする.

定理 2.12 (Novik–Swartz [NS3], M [Mu2][6])**.** Δ が $2k$ 次元閉多様体 M の v 頂点三角形分割なら

$$\binom{v-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1}\beta_k(M;\mathbb{F}).$$

上の定理は, $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ としてやれば, $k=1$ の時は Heawood の定理に一致し, $k=2$ の時は Kühnel の定理を含む定理になる. 但し, 残念ながら上の定理から $f_0^{\min}$ が新しく決まった例はまだ知られていない.

次の定理も最近分かった重要な結果である.

定理 2.13 (Novik–Swartz [NS1], Bagchi [Ba], Datta-M [DM], M [Mu2][7])**.** $n \geq 3$ とする. Δ が n 次元閉多様体 M の v 頂点三角形分割なら

$$\binom{v-n-1}{2} \geq \binom{n+2}{2}\beta_1(M;\mathbb{F}).$$

等号が成立する時 M は $(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1)^{\#\beta_1(\Delta)}$ か $(\mathbb{S}^{n-1}\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#\beta_1(\Delta)}$ のどちらかに同相.

上の定理から, $H_1(M) \neq 0$ ならば $f_0^{\min}(M) \geq 2d+3$ であることがわかるので, これは定理 2.7 の $i=1$ の場合の一般化になっている.

例 2.14. 上の定理から色々な場合で, $\mathbb{S}^1$ 上の $\mathbb{S}^{n-1}$ 束の連結和について三角形分割する為に必要な頂点数の最小値が求まる. 例えば, Lutz–Slanke–Swartz [LSS] において以下の場合に $f_0^{\min}(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1)^{\#b}$ と $f_0^{\min}(\mathbb{S}^2\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#b}$ の値が決められている.

★ $b = 2,\ldots,8,10,11,14$ (向き付けに依らない値となる. [LSS, Table 12] 参照.)

定理 2.13 の不等式で等号が成立する三角形分割は tight な三角形分割と呼ばれ, 具体的な三角形分割の構成法の研究が進んでおり, 次が示されている.

★ [DS] $f_0^{\min}((\mathbb{S}^{n-1}\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#n^2+5n+6}) = n^2+5n+5$ (d:奇数).
★ [DS] $f_0^{\min}((\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1)^{\#n^2+5n+6}) = n^2+5n+5$ (d:偶数).
★ [BDSS] $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#99}) = 49$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#208}) = 69$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#357}) = 89$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#546}) = 109$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1)^{\#143}) = 71$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1)^{\#342}) = 101$, $f_0^{\min}((\mathbb{S}^4\mathbin{\underline{\times}}\mathbb{S}^1)^{\#390}) = 97$.

面白い問題として, n が奇数 (偶数) の時に定理 2.13 で等号成立する様な三角形分割で向き付け可能 (不可能) なものがあるかは未解決である（簡単に見つかりそうな気がするのだが不思議である）.

定理 2.13 の $i \neq 1$ の場合の一般化については次が予想されているが未解決

予想 2.15 (Kühnel)**.** $1 \leq r < \frac{n}{2}$. Δ が n 次元閉多様体 M の v 頂点三角形分割なら,

$$\binom{v-n-2+r}{r+1} \geq \binom{n+2}{r+1}\beta_r(M;\mathbb{F}).$$

---

[6] 基本的には [NS3] の結果. 向き付け不可能で正標数以外の場合のみ [Mu2] の結果.

[7] 基本的には [NS1] の結果. 3 次元の等号の場合が [Ba, DM], 向き付不可能で正標数の場合が [Mu2].

最後に. 最小頂点数問題については Lutz [Lu] に詳しく述べられているのでそちらも参照して欲しい. 本稿で省いた射影空間[8] やトーラス[9] などの話も述べられている

3. h'' 列と面の個数の双対性

前のセクションにある定理 2.12 や定理 2.13 は多様体の三角形分割の一般次元の面の個数の研究, 特に, h'' 列と呼ばれるものの組合せ論的・代数的な研究から導かれた定理である. h'' 列は非常に良い対称性をもち, かつスタンレー・ライスナー環と呼ばれる環の代数的な双対性と深く関係する. この章では h'' 列の理論について, その双対性の話を中心に, どのような理論なのか解説しよう.

3.1. 面の個数の対称性.

n 次元単体的複体に対し, その面の個数を並べてできる数列

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_n(\Delta))$$

を Δ の **f 列**と呼ぶ. 単体的複体の面の個数を調べるという事は, その f 列の性質を調べる事と思うことができる. 多様体の三角形分割の場合には f 列に Dehn–Sommerville 等式と呼ばれる対称性が存在する. まずはそれを見て貰う事にする.

最初に閉曲面の場合を考えよう. Δ が閉曲面 M の三角形分割であるとすると, 明らかに

- $f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(M)$
- $3f_1(\Delta) = 2f_2(\Delta)$

が成り立つ. (二つ目の等式は全ての辺が丁度二つの三角形に含まれるという事実から従う). 上の二式から f_1, f_2 は f_0 のみを使って表せることがわかり, 結局

$$f(\Delta) = \big(f_0(\Delta), 3(f_0(\Delta) - \chi(M)), 2(f_0(\Delta) - \chi(M))\big)$$

となる. 特に, **$f(\Delta)$ は頂点の数のみから決まる**ことがわかる.

次に 3 次元閉多様体の三角形分割について考えよう. Δ を 3 次元閉多様体の三角形分割とする. この時, $f(\Delta)$ は $f_0(\Delta), f_1(\Delta), f_2(\Delta), f_3(\Delta)$ の 4 つ整数からなるが, 閉曲面の場合と同様に

- $f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) - f_3(\Delta) = 0$
- $2f_2(\Delta) = 4f_3(\Delta)$

の等式が成り立つので, 結局

$$f(\Delta) = \big(f_0(\Delta), f_1(\Delta), 2f_1(\Delta) - 2f_0(\Delta), 2f_1(\Delta)\big)$$

となり, **$f(\Delta)$ は頂点の個数 f_0 と辺の個数 f_1 から決まる**.

さて, 上で 2 次元, 3 次元の場合を見てきたが, 一般次元では何が起こるのだろう? 上の例から f 列を知るためには, 大体 f 列の最初の半分位の値がわかれば良さそうだ, というのがなんとなく推察できるのではないだろうか. このことは実際に正しいのだが, きちんと説明する為には h 列と呼ばれる数を導入するのが便利である. $(n-1)$ 次元単体的複体 Δ に対し, その h 列 $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_n(\Delta)) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ を

$$h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\Delta)$$

(但し $f_{-1}(\Delta) = 1$ とする) で定義する. この時, $f_{i-1}(\Delta) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} h_j(\Delta)$ であり, $f(\Delta)$ を知ることと $h(\Delta)$ を知ることは同値であることに注意して欲しい.

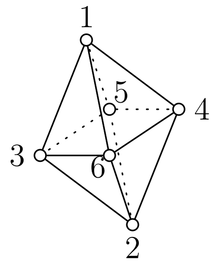
[8] $f_0^{\min}(\mathbb{R}P^3) = 11, f_0^{\min}(\mathbb{R}P^4) = 16$ だが $f_0^{\min}(RP^5)$ が未解決. 22 以上 24 以下であることが既知.
[9] $f_0^{\min}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ が 15 であることが予想されているが未解決. 15 以下であることは既知.

さて, 上記の**『閉多様体の三角形分割の f 列を知るには, f 列の最初の半分の値がわかればよさそう』**というのは, 次の綺麗な等式で説明される.

定理 3.1 (Dehn–Sommerville 等式 [Kl])**.** Δ が閉 $(n-1)$ 次元多様体の三角形分割である時, 次が成り立つ.

$$h_i(\Delta) = h_{n-i}(\Delta) + \binom{n}{i}(-1)^{n-i}(\chi(\Delta) - \chi(\mathbb{S}^{n-1})) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

例 3.2. Δ が右の八面体の境界複体となっている場合を考えてみよう. この時 Δ は球面 $\mathbb{S}^2$ に同相で,



$$f(\Delta) = (6, 12, 8)$$

である. h 列を定義通りに計算すると

$$h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$$

となり $h_i(\Delta) = h_{3-i}(\Delta)$ が成り立っていることがわかる.

3.2. **スタンレー・ライスナー環の双対性.**

Dehn–Sommerville 等式はスタンレー・ライスナー環における代数的なポアンカレ双対性から来る対称性として説明することができる. このことは球面の場合は良く知られていたことであるが, 多様体の場合にも同様のことが成り立つことが最近証明された.

始めにスタンレー・ライスナー環について説明する. 以下 $\mathbb{F}$ は無限体, Δ を頂点集合を V とする単体的複体とし, 多項式環 $S = \mathbb{F}[x_v : v \in V]$ を考える. 但し, 多項式環には各変数の次数を 1 とする次数を入れる. この時, イデアル I_Δ を

$$I_\Delta = (x_{v_1}x_{v_2}\cdots x_{v_k} : \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V,\ \{v_1, \ldots, v_k\} \notin \Delta) \subset S$$

で定義する. 環 $\mathbb{F}[\Delta] = S/I_\Delta$ を (体 $\mathbb{F}$ 上の)Δ の**スタンレー・ライスナー環**と呼ぶ. Δ が $(n-1)$ 次元である時, 環 $\mathbb{F}[\Delta]$ の Krull 次元は n である. このことは, $\mathbb{F}$ が無限体の時は, 上手く n 個の一次式 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を選ぶと, $\mathbb{F}[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)\mathbb{F}[\Delta]$ がアルチン環 (クルル次元 0 の環のこと) になることを意味する. このような $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を $\mathbb{F}[\Delta]$ の**線形な巴系 (linear system of parameters)** と呼ぶ.

例 3.3. 例 3.2 の八面体の場合を考えると, スタンレー・ライスナー環は

$$\mathbb{F}[\Delta] = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_6]/(x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6).$$

である. このとき $x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6$ は $\mathbb{F}[\Delta]$ の線形な巴系となる. 実際,

$$\mathbb{F}[\Delta]/(x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6) \cong \mathbb{F}[x_1, x_3, x_5]/(x_1^2, x_3^2, x_5^2)$$

である. (上の右辺に現れる環を R とすると, $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ で, $\dim_{\mathbb{F}} R_0 = 1, \dim_{\mathbb{F}} R_1 = 3, \dim_{\mathbb{F}} R_2 = 3, \dim_{\mathbb{F}} R_3 = 1$ となっていることに注意して欲しい.)

先ず, 比較的昔から良く知られていた球面の場合の双対性について説明しよう. Δ が n 球面 $\mathbb{S}^n$ の三角形分割である時, Dehn–Sommerville 等式は $h_i(\Delta) = h_{n-i}(\Delta)$ という単純な対称性を与えることに注意しよう. 有限次元次数付代数[10] $R = \bigoplus_{i=0}^{s} R_i$ が (次数 s の) **ポアンカレ双対代数 (Poincaré duality algebra)** であるとは, $R_s \cong \mathbb{F}$ であり, かつ掛け算写像

$$R_i \times R_{s-i} \to R_s$$

が全ての $i = 0, 1, \ldots, s$ に対して perfect pairing[11] を与える時にいう, 但し R_i は R の次数 i の斉次成分とする. R がポアンカレ双対代数なら明らかに $R_i \cong R_{s-i}$ が成り立つ.

[10] 有限次元代数とは多項式環を斉次イデアルで割ったものでベクトル空間として有限次元なもの

[11] 掛け算から誘導される写像 $R_i \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(R_{s-i}, R_s)$ が同型になるという意味

次の定理から, Dehn–Sommerville 等式は球面三角形分割の場合にはポアンカレ双対性からくる対称性と思うことができる ([Sta] 等を見よ).

定理 3.4 (スタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性 (球面の場合))**.** Δ をホモロジー $(n-1)$ 球面の三角形分割とし, $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ を $\mathbb{F}[\Delta]$ の線形な巴系とする. この時次が成り立つ.

(1) $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\Delta]/\Theta\mathbb{F}[\Delta])_k = h_k(\Delta)$ for $k = 0, 1, \ldots, n$.
(2) $\mathbb{F}[\Delta]/\Theta\mathbb{F}[\Delta]$ は次数 n のポアンカレ双対代数である.

次に, 上の定理が一般の多様体の三角形分割へ一般化されることを紹介する. 定理 3.4 は, ホモロジー球面のスタンレー・ライスナー環は Cohen-Macaulay である, という代数的な事実に基づいており, そのままでは多様体の三角形分割に一般化できない. 上を一般化する為, 二つ定義を与える.

$(n-1)$ 次元単体的複体 Δ に対し, その h''**-列** $h''(\Delta) = (h''_0(\Delta), h''_1(\Delta), \ldots, h''_n(\Delta))$ を次で定義する[12].

$$h''_i(\Delta) = \begin{cases} h_i(\Delta) - \binom{n}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} \beta_{j-1}(\Delta;\mathbb{F})\right), & (i \neq n \text{ の時}) \\ h_n(\Delta) - \binom{n}{i}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \beta_{j-1}(\Delta;\mathbb{F})\right), & (i = n \text{ の時}). \end{cases}$$

(尚, $h''_n(\Delta) = \beta_n(\Delta;\mathbb{F})$ である) なんだかよくわからない定義だと思うので, 少し例を挙げよう.

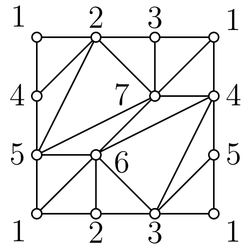
例 3.5. 右ののトーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の 7 頂点三角形分割 Δ を考えると

$$f(\Delta) = (7, 21, 14)$$

であり, $h(\Delta) = (1, 4, 10, -1)$. $\beta_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 2$ であるから

$$h''(\Delta) = h(\Delta) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 4, 4, 1)$$

となる. (対称な数列が出て来たことに注意!)



次の等式が成り立つ事が知られている (本質的には定理 3.1 と同じもの).

定理 3.6 (h''-列に対する Dehn–Sommerville 等式 [No])**.** Δ が向き付け可能な閉 $(n-1)$ 多様体の三角形分割である時, 次が成り立つ.

$$h''_i(\Delta) = h''_{n-i}(\Delta) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Krull 次元 n の有限生成次数付 S-加群 W とその線形な巴系 $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ に対し, W の部分加群 $\Sigma(\Theta; W)$ を次で定義する[13].

$$\Sigma(\Theta; W) = \Theta W + \sum_{i=1}^{n} (\theta_1, \ldots, \hat{\theta}_i, \ldots, \theta_n) W :_W \theta_i.$$

但し, W の部分加群 W' と S の元 f に対し,

$$W' :_W f = \{m \in W : fm \in W'\}$$

である. 上の加群は Buchsbaum 環と呼ばれる環の研究の中で後藤 [Go] により考案された. こちらも, なんだかよくわからない定義だと思うが, 要は定理 3.4 における $\Theta\mathbb{F}[\Delta]$ を $\Sigma(\Theta, \mathbb{F}[\Delta])$ に変えれば上手くいく, というのが最近分かったことである.

---

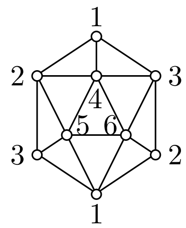
[12] h' 列と呼ばれるものもある. $h'_i = h''_i + \binom{n}{i}\beta_{i-1}$ $(i \neq n)$, $h'_n = h''_n$ で定義される.

[13] "$\Theta W+$" の所は $n \geq 2$ の時は不要.

定理 3.7 (スタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性 (多様体の場合) [NS1, NS2])**.** Δ を $(n-1)$ 多様体 M の三角形分割, $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ を $\mathbb{F}[\Delta]$ の線形な巴系とする.

(1) $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{F}[\Delta]))_k = h''_k(\Delta)$ for $k = 0, 1, \ldots, n$.
(2) M が向き付け可能または $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ なら $(\mathbb{F}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{F}[\Delta]))$ は次数 n のポアンカレ双対代数.

例 3.8. 余り良い例はないのだが, 具体例を挙げておこう. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし, 右の射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の 6 頂点三角形分割 Δ を考える. この時



$$I_\Delta = \left(\begin{array}{l} x_1x_2x_3, x_1x_2x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_5, x_1x_4x_6 \\ x_2x_3x_4, x_2x_4x_6, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_5x_6 \end{array} \right)$$

であり,

$$\Theta = (x_1 + x_3 + x_5, x_2 + x_3 + x_5, x_4 + x_5 + x_6)$$

は $\mathbb{F}[\Delta]$ の線形な巴系. $\Sigma(\Theta, R)$ は I_Δ と Θ に加え, 次の三つの元を生成元に持つ

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_1x_4 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_6 + x_5x_6 \end{array} \right\}.$$

定理 3.7 で与えられるポアンカレ双対代数は (不要な変数を消すと)

$$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_6]/(I_\Delta + (\Theta) + (X)) \cong \mathbb{F}[x, y, z]/(x^2 + xy + yz, y^2 + xz + yz, z^2 + xy + xz)$$

という代数になる.

3.3. 境界のある多様体の三角形分割.

定理 3.7 は境界を持つ多様体の場合にも拡張できる. Δ が境界を持つ多様体 M の三角形分割なら, Δ の面で境界部分にあるもの全体の集合 $\partial\Delta$ は ∂M の三角形分割になることに注意する. 単体的複体のペア $\Gamma \subseteq \Delta$ に対し, $f_i(\Delta, \Gamma)$ を Δ に属するが Γ に属さない i 次元面の個数とし, $\beta_i(\Delta, \Gamma; \mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \Gamma; \mathbb{F})$ とする. この時, $h(\Delta, \Gamma), h''(\Delta, \Gamma)$ を通常の単体的複体の場合と同様に定義すると次の形の等式が成り立つ.

定理 3.9 (Dehn–Sommerville 等式 [MN] (essentially [Gr]))**.** Δ が向き付け可能な $(n-1)$ 次元多様体の三角形分割なら

$$h''_i(\Delta) = h''_{n-i}(\Delta, \partial\Delta) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

また, ペア $\Gamma \subseteq \Delta$ の**スタンレー・ライスナー加群** $\mathbb{F}[\Delta, \Gamma]$ を

$$\mathbb{F}[\Delta, \Gamma] = I_\Gamma / I_\Delta$$

で定義すると次が成り立つ.

定理 3.10 ([MNY])**.** Δ を可能な $(n-1)$ 多様体の三角形分割, $R = \mathbb{F}[\Delta]$, $W = \mathbb{F}[\Delta, \partial\Delta]$, $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n$ を R の線形な巴系とする. M が向付け可能もしくは $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ の時, 次が成り立つ.

(1) $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta; R))_k = h''_k(\Delta)$ for $k = 0, 1, \ldots, n$.
(2) $\dim_{\mathbb{F}}(W/\Sigma(\Theta; W))_k = h''_k(\Delta, \partial\Delta)$ for $k = 0, 1, \ldots, n$.
(3) Δ が向き付可能である時, 積写像

$$(R/\Sigma(\Theta; R))_i \times (W/\Sigma(\Theta; W))_{n-i} \to (W/\Sigma(\Theta; W))_n$$

は perfect pairing である.

注 3.11. 定理 3.10 は細かい所を端折ったが, $(W/\Sigma(\Theta;W))_n \cong \mathbb{F}$ であることや, 積写像 $R/\Sigma(\Theta;R) \times W/\Sigma(\Theta;W) \to W/\Sigma(\Theta;W)$ の well-defined 性などは [MNY] を参照して欲しい.

3.4. どうやって頂点数問題へ応用するか?

今まで述べてきた話は一般的過ぎて, セクション 2 で述べたような具体的な問題にどう応用するかはちょっとわかりにくい. 実際, 具体的な問題に応用するときは少しテクニカルで泥臭い議論が必要になる.

雰囲気を見てもらうために定理 2.12 の証明の概要を紹介しておこう.

定理 2.12 の証明の概要. 簡単の為 M は向き付け可能な閉 $2k$ 多様体とする. Δ を M の v 頂点三角形分割とし, $\binom{v-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1}\beta_k(M;\mathbb{F})$ を示す. $R = \mathbb{F}[\Delta]$ とし, Θ を R の線形な巴系とすると, 実は次のことが知られている.

(1) $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_i - \dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta,R))_i = \binom{2k+1}{i}\beta_{i-1}(M;\mathbb{F})$,

(2) 任意の多項式 f に対し $f \cdot \Sigma(\Theta,R) = 0$.

ここで, $R/\Theta R$ においてゼロでない一次式 w をとると, (2) より $(R/(\Theta,w)R)_{k+1}$ のベクトル空間のとしての次元は $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_{k+1} - \dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta,R))_k$ より大きいのだが, $(R/\Sigma(\Theta,R))_k \cong (R/\Sigma(\Theta,R))_{k+1}$ なのでこれは (1) の右辺に一致する. 一方, $\mathbb{F}[\Delta]$ は n 変数多項式環を割った環で, Θ, w は $\mathbb{F}$ 上一時独立な $2k+2$ 個の一次式からなるので次が得られる

$$\binom{n-k-2}{k+1} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_{n-2k-2}])_{k+1} \leq \dim_{\mathbb{F}}(R/(\Theta,w)R)_{k+1} \leq \binom{2k+1}{k+1}\beta_k(M;\mathbb{F}).$$

(定理 2.12 の不等式の左辺を多項式間の $k+1$ 次の $\mathbb{F}$-次元とみるのがポイント.) □

定理 2.13 の方も簡単に説明しておこう. こちらの定理は, 実は辺の個数に関する以下の結果から従う.

定理 3.12 ([NS1, Ba, DM, Mu2])**.** $n \geq 3$ とする. Δ を閉 n 多様体 M の v 頂点三角形分割とすると, 次が成り立つ.

$$f_1(\Delta) \geq (n+1)v + \binom{n+2}{2}(\beta_1(M;\mathbb{F}) - 1).$$

等号成立の時, M は $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\#\beta_1(\Delta)}$ か $(\mathbb{S}^{n-1} \times\!\!\!\!\!\times\ \mathbb{S}^1)^{\#\beta_1(\Delta)}$ のどちらかに同相.

上の定理は一番目のホモロジー群の次元が大きくなると, それに依存して辺の数もそれなりに大きくならないといけないと言っている. 実は, これは頂点数に関する下限も与えていて, 実際, 頂点数 $f_1(\Delta)$ に関する自明な上限 $f_1(\Delta) \leq \binom{v}{2}$ を定理 3.12 に代入すると定理 2.13 を得る.

定理 3.12 の証明の概要. 簡単の為, M は向き付け可能とする. $R = \mathbb{F}[\Delta]$ とする. 実は線形な巴系 $\Theta = \theta_1,\ldots,\theta_{n+1}$ と一次式 w を上手く取ると積写像 $\times w : (R/\Theta R)_{n-2} \to (R/\Theta R)_{n-1}$ が全射になることがわかっている [Sw2]. このことと, 先の証明の (1), (2) から不等式

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/(\Sigma(\Theta;R)))_{n-1} + \binom{n+1}{2}\beta_{n-1}(M;\mathbb{F}) \geq \dim_{\mathbb{F}} R/(\Sigma(\Theta;R)))_{n-1}$$

がわかるのだが, 定理 3.7 と 3.6 を使うと上は h_1'' と h_2'' に関する不等式に書き直せる. 書き直したものを f 列の言葉に直したものが求める不等式となる. □

3.5. **その他.**

頂点数の話だけで結構な分量になってしまったので一般次元の面の個数について述べるスペースがなくなってしまったが, 多様体の三角形分割の面の個数に関する最近の仕事は [KN, Sw2] に良くまとまっているのでそちらを参照して欲しい. また, 3 次元多様体の三角形分割の面の個数に関しては [LSS] に良く纏められて書いてあるのでそちらも参照して欲しい[14]. また, h'' 列の理論は単体的複体を少し一般化した単体的セル複体と呼ばれるものに応用することもできる. 此方については [Mu1] を参照して欲しい.

References

[Ba] B. Bagchi, The mu vector, Morse inequalities and a generalized lower bound theorem for locally tame combinatorial manifolds, *European J. Combin.* **51** (2016), 69–83.

[BD] B. Bagchi and B. Datta, Minimal triangulations of sphere bundles over the circle, *J. Combin. Theory, Ser. A* **115** (2008), 737–752.

[BK1] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.

[BK2] U. Brehm and W. Kühnel, 15-vertex triangulations of an 8-manifold, *Math. Ann.* **294** (1992), 167–193.

[BDSS] B.A. Burton, B. Datta, N. Singh and J. Spreer, A construction principle for tight and minimal triangulations of manifolds, arXiv:1511.04500.

[CK] M. Casella and W. Kühnel, A triangulated K3 surface with the minimum number of vertices, *Topology* **40** (2001), 753–772.

[CSS] J. Chestnut, J. Sapir and E. Swartz, Enumerative properties of triangulations of spherical bundles over S^1, *European J. Combin.* **29** (2008), 662–671.

[DM] B. Datta and S. Murai, On stacked triangulated manifolds, arXiv:1407.6767.

[DS] B. Datta and N. Singh, An infinite family of tight triangulations of manifolds, *J. Combin. Theory, Ser. A* **120** (2013), 2148–2163.

[EK] J. Eells and N.H. Kuiper, Manifolds which are like projective planes, *Publ. Math. I.H.E.S.* **14** (1962), 181–222.

[Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.

[Gr] H-G. Gräbe, Generalized Dehn-Sommerville equations and an upper bound theorem, *Beiträge Algebra Geom.*, **25** (1987), 47–60.

[He] P.J. Heawood, Map-color theorem, *Quart. J. Pure Apple. Math.* (1890) **24**, 332–338.

[JR] M. Jungerman and G. Ringel, Minimal triangulations on orientable surfaces, *Acta. Math.* **145** (1980), 121–154.

[Kü1] W. Kühnel, Higher dimensional analogues of Császár's torus, *Results. Math.* **9** (1986), 95–106.

[Kü2] W. Kühnel, Triangulations of manifolds with few vertices, In: Advances in Differential Geometry and Topology (F. Tricerri, ed.), 59–114, World Scientific, 1990.

[KB] W. Kühnel and T.F. Banchoff, The 9-vertex complex projective plane. *Math. Intelligencer* **5** (1983),11–22.

[KL] W. Kühnel, and G. Lassmann, The unique 3-neighborly 4-manifold with fewvertices, *J. Combin. Theory, Series A* **35** (1983), 173–184.

[KN] S. Klee and I. Novik, Face enumeration on simplicial complexes, arXiv:1505.06380, 2015.

[Kl] V. Klee, A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem, *Canad. J. Math.* **16** (1964), 517–531

[Lu] F. Lutz, Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds, arXiv:math/0506372.

[LSS] F. Lutz, T. Sulanke and E. Swartz, f-vectors of 3-manifolds, *Electron. J. Combin.* **16** (2009), Research Paper 13, 33 pp.

[Mu1] 村井　聡, 単体的セル複体の面の数え上げの話, 第 56 回代数学シンポジウム報告集.

[Mu2] S. Murai, Tight combinatorial manifolds and graded Betti numbers, *Collect. Math.* **66** (2015), 367–386.

[14] Tight triangulation 関係の未解決問題は今は解決しているものもある.

[MN] S. Murai and I. Novik, Face numbers of manifolds with boundary, *Int. Math. Res. Not.*, to appear, arXiv:1509.05115.

[MNY] S. Murai, I. Novik and K. Yoshida, A duality in Buchsbaum rings and triangulated manifolds, arXiv:1602.06613.

[No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.

[NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

[NS2] I. Novik and E. Swartz, Gorenstein rings through face rings of manifolds, *Compos. Math.* **145** (2009), 993–1000.

[NS3] I. Novik and E. Swartz, Applications of Klee's Dehn-Sommerville relations, *Discrete Comput. Geom.* **42** (2009), 261–276.

[Ri] G. Ringel, Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann, *Math. Ann.* **130** (1955), 314–326.

[Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.

[Sta] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Ste] N.E. Steenrod, The classification of sphere bundles, *Ann. of Math.* **45** (1944). 294–311.

[Sw1] E. Swartz, Face enumeration: from spheres to manifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009), 449–485

[Sw2] E. Swartz, Thirty-five years and counting, arXiv1411.0987, 2014.

Satoshi Murai, Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka, 565-0871, Japan