



多様体の単体分割の 組合せ論と代数

村井 聡

(大阪大学大学院情報科学研究科)

第63回トポロジーシンポジウム

2016年7月6日 神戸大学



講演の概要

1. 組合せ論の話

多様体の最小頂点三角形分割

2. 代数（手法）の話

スタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性



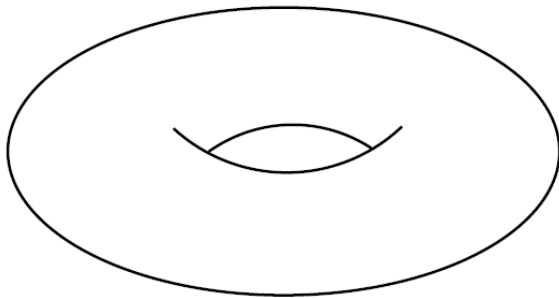
言葉の準備

- 多様体 M の **三角形分割**
= (有限) 単体的複体で M と同相なもの
- $\chi(M)$: オイラー数
- $\beta_i(M) = \beta_i(M; \mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(M; \mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$: 体)

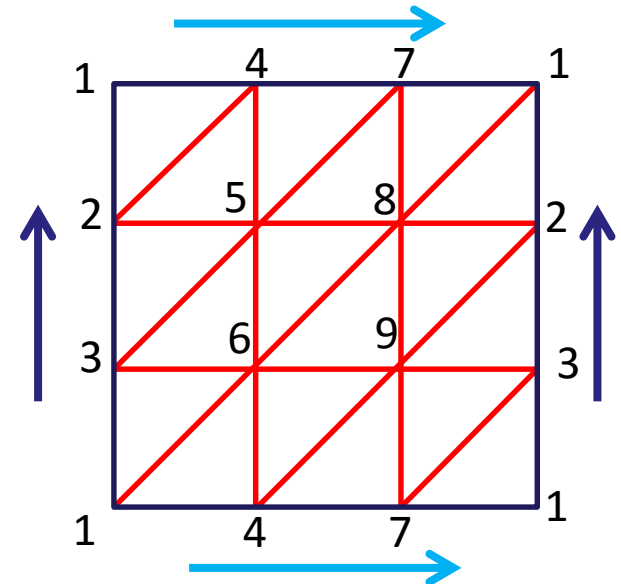
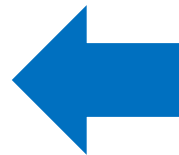
最小三角形分割問題

Question

M を (三角形分割可能な) 位相多様体とする. M を三角形分割する為に必要な頂点数の最小値は?



Torus $S^1 \times S^1$

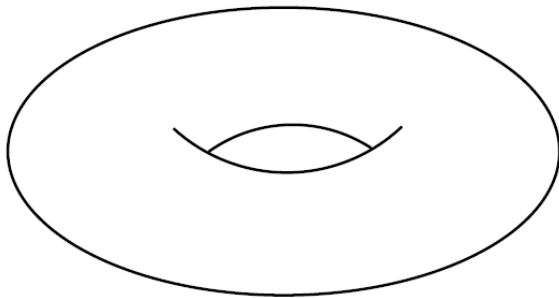


9 vertex triangulation

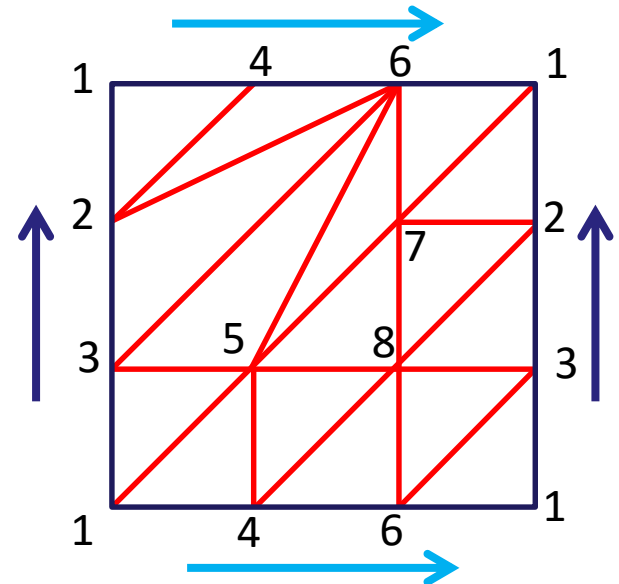
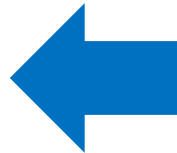
最小三角形分割問題

Question

M を (三角形分割可能な) 位相多様体とする. M を三角形分割する為に必要な頂点数の最小値は?



Torus $S^1 \times S^1$

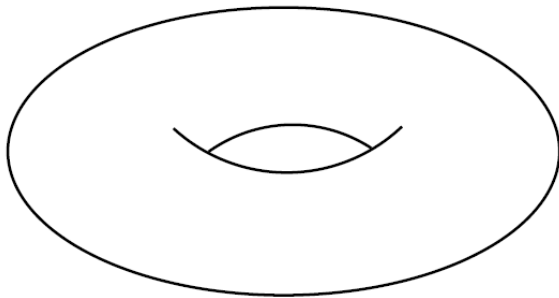


8 vertex triangulation

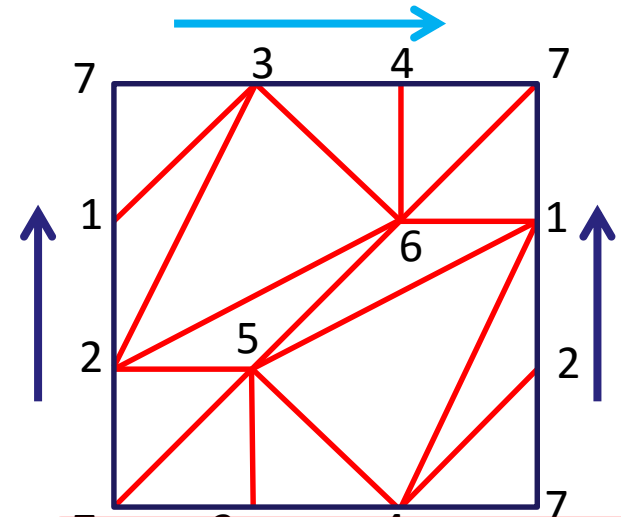
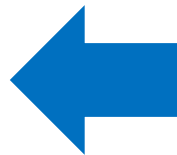
最小三角形分割問題

Question

M を (三角形分割可能な) 位相多様体とする. M を三角形分割する為に必要な頂点数の最小値は?



Torus $S^1 \times S^1$

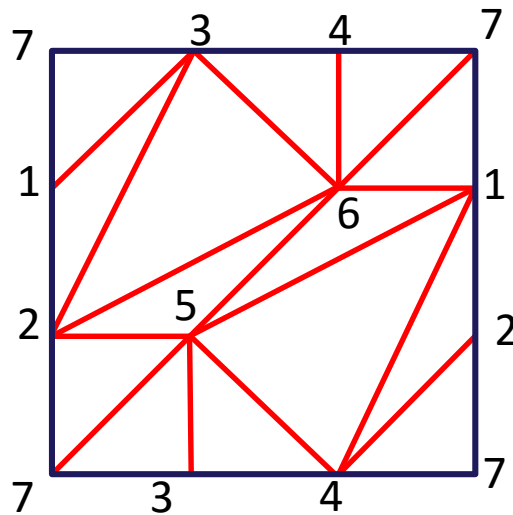


頂点数最小!

7 vertex triangulation



$S^1 \times S^1$ の最小 三角形分割



最小性をどうやって確かめる??

Heawoodの不等式

定理 (Heawood の不等式 1890)

閉曲面 M の v 頂点三角形分割が存在するなら

$$\binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M)).$$

- $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0 \Rightarrow \binom{v-3}{2} \geq 6 \Rightarrow \text{頂点数 } v \geq 7.$

Heawoodの不等式

定理 (Heawood の不等式 1890)

閉曲面 M の v 頂点三角形分割が存在するなら

$$\binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M)).$$

証明. e, f を辺・面の数とすると, 次が成り立つ

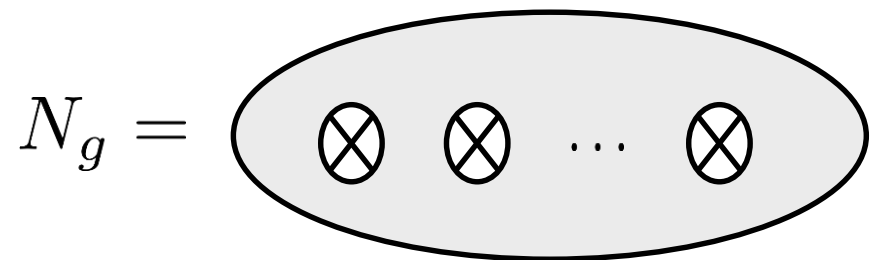
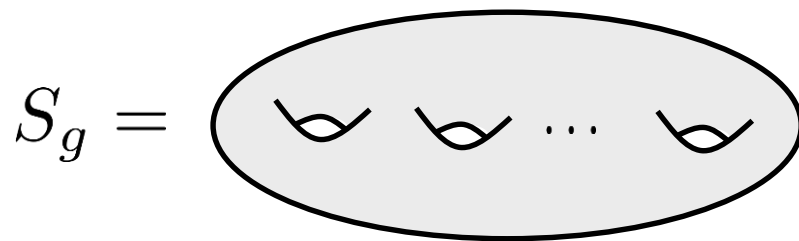
$$v - e + f = \chi(M), \quad 2e = 3f.$$

上を(f を消去して)次の不等式に代入すれば証明終了

$$e \leq \binom{v}{2}$$



一般の閉曲面の場合



定理 (Ringel 1955, Jungerman–Ringel 1980)

$M \neq S_2, N_2, N_3$ を連結な閉曲面とする.

M の v 頂点三角形分割が存在

$$\Leftrightarrow \binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M)).$$



3次元以上だと？

必要な頂点数の最小値を見つけるのはとても難しい。

Open Problem

3次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ を三角形分割する為には頂点数は15以上必要か？

n 次元トーラスには $2^{n+1} - 1$ 頂点三角形分割が存在

Open Problem

$S^4 \times S^2$ の14頂点三角形分割は存在するか？

$S^i \times S^j$ の三角形分割の頂点数 $\geq 2i + j + 4$.



先行研究

定理 (Brehum–Kühnel 1987)

M : 閉 n 多様体, $H_i(M) \neq 0$ ($i < \frac{n}{2}$)

M の v 頂点三角形分割が存在 $\Rightarrow v \geq 2n + 4 - i$.

定理 (Kühnel 1990)

閉 4 多様体 M に v 頂点三角形分割が存在するなら

$$\binom{v-4}{3} \geq 10(\chi(M) - 2).$$

最小頂点数が決まるもの

$S^2 \times S^3$, CP^2 , $(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$, $K3$

12頂点

9頂点

12頂点

16頂点

最近分かったこと①

定理 (Novik–Swartz, M (conj. by Kühnel))

閉 $2k$ 多様体 M に v 頂点三角形分割が存在すれば

$$\binom{v - k - 2}{k + 1} \geq \binom{2k + 1}{k + 1} \beta_k(M).$$

注: 2,4次元の以下の不等式の一般化

2次元: $\binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$

4次元: $\binom{v-4}{3} \geq 10(\chi(M) - 2)$

最近分かったこと②

定理 (Novik–Swartz, M, Bagchi, Datta-M (conj. by Kühnel))

閉 n 多様体 M に v 頂点三角形分割が存在すれば

$$\binom{v - n - 1}{2} \geq \binom{n + 2}{2} \beta_1(M) \quad (\text{但し, } n \geq 3).$$

等号成立 $\Rightarrow M \cong (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1}$ or $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1}$

最小頂点数が決まるもの

$$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# k}, (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# k} \quad (k = 1, \dots, 8, 10, 11, 14)$$

$$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# 99}, (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# 208}, (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# 357}, (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\# 546},$$

49頂点

69頂点

89頂点

109頂点



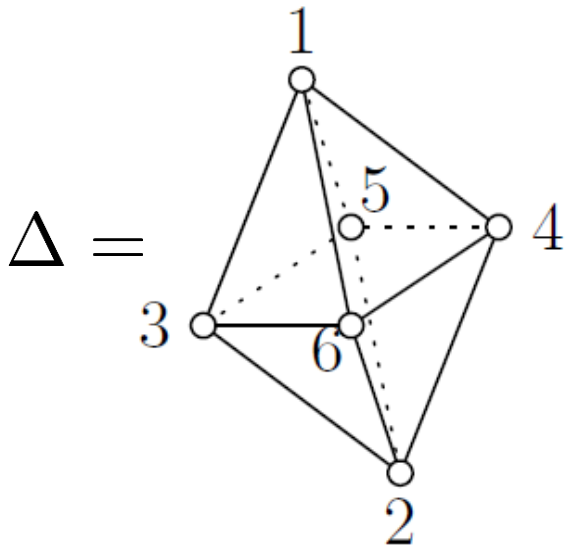
§ 2 スタンレー・ライスナー環 のポアンカレ双対性

面の個数の対称性

- $f_i(\Delta) = \Delta$ の持つ i 次元面の個数
- 次の数列を **f -vector** と呼ぶ

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_n(\Delta)) \quad (n = \dim \Delta)$$

例.



$$f(\Delta) = (f_0, f_1, f_2) = (6, 12, 8)$$



面の個数の対称性

定理 (Klee 1964)

Δ が閉 n 多様体 M の三角形分割なら $f(\Delta)$ は $f_0(\Delta), \dots, f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\Delta)$ と $\chi(M)$ から決まる.

例. 3次元($n=3$)の場合

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = \chi(M) = 0, \quad 2f_2 = 4f_3$$

$$\Rightarrow (f_0, f_1, f_2, f_3) = (f_0, f_1, 2f_1 - 2f_0, f_1 - f_0)$$



h'' -vector

Δ $(n-1)$ 次元単体の複体

$h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_n(\Delta))$ を次で定義 ($f_{-1} = 1$)

$$h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{d-j}{i-j} f_{j-1}(\Delta)$$

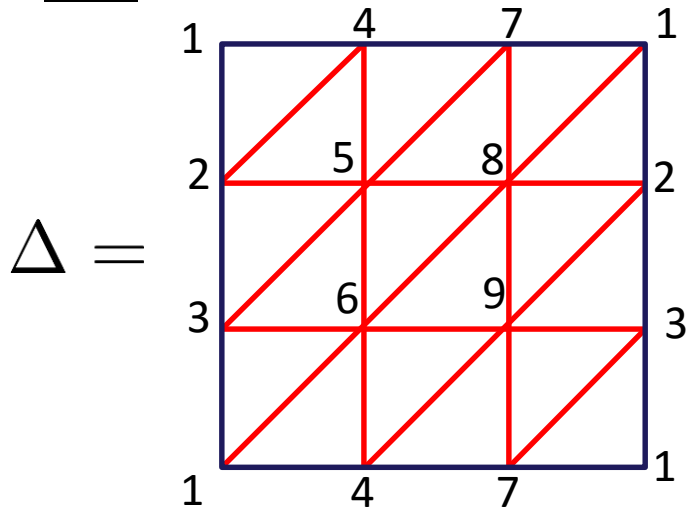
さらに $h''(\Delta) = (h''_0(\Delta), h''_1(\Delta), \dots, h''_n(\Delta))$ を次で定義

$$h''_i(\Delta) = \begin{cases} h_i(\Delta) - \binom{n}{i} (\sum_{j=1}^i \beta_{j-1}(\Delta; \mathbb{F})), & (i \neq n) \\ h_n(\Delta) - \binom{n}{i} (\sum_{j=1}^{n-1} \beta_{j-1}(\Delta; \mathbb{F})), & (i = n). \end{cases}$$

注： f -vector と h'' -vector は等価な情報を持つ

h'' -vector

例.



$$f(\Delta) = (9, 27, 18)$$



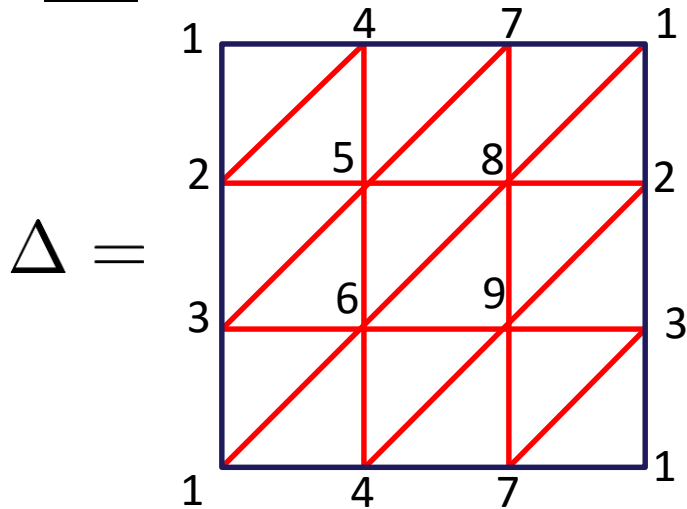
$$h(\Delta) = (1, 6, 12, -1)$$

計算方法

$$\begin{aligned} (1, 9, 27, 18) = & +1 \times (1, 3, 3, 1) \\ & +6 \times (0, 1, 2, 1) \\ & +12 \times (0, 0, 1, 1) \\ & -1 \times (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

h'' -vector

例.



$$f(\Delta) = (9, 27, 18)$$



$$h(\Delta) = (1, 6, 12, -1)$$



$$h''(\Delta)$$

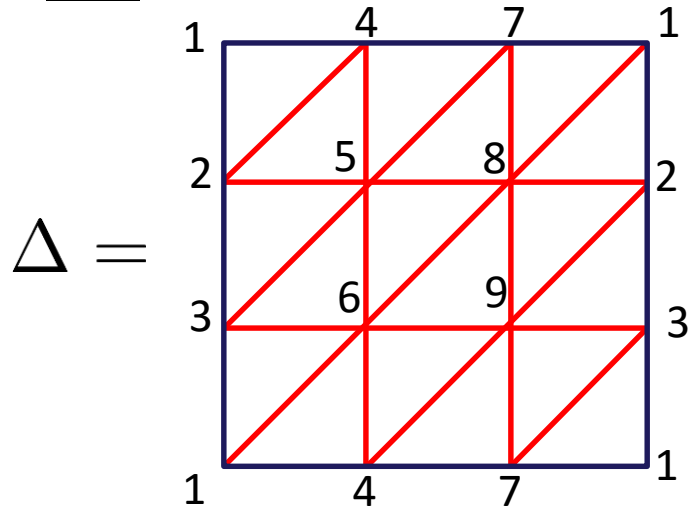
$$= h(\Delta) - \beta_1 \times (0, 0, 3, -1)$$

$$= (1, 6, 12, -1) - 2(0, 0, 3, -1)$$

$$= (1, 6, 6, 1)$$

h'' -vector

例.



$$h''(\Delta)$$

$$= h(\Delta) - \beta_1 \times (0, 0, 3, -1)$$

$$= (1, 6, 12, -1) - 2(0, 0, 3, -1)$$

$$= \underline{(1, 6, 6, 1)}$$

対称な数列！

定理 (Novik 1998)

Δ が向き付け可能な閉 n 多様体の三角形分割なら

$$h''_i(\Delta) = h''_{n+1-i}(\Delta) \quad (i = 0, 1, \dots, n+1)$$



Stanley-Reisner環

- $\mathbb{F}$: (無限)体
- Δ : 頂点集合を $\{1, 2, \dots, n\}$ とする抽象単体的複体
- $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$: 多項式環
- 次の環を(体 $\mathbb{F}$ 上の) **Stanley-Reisner環**とよぶ

$$\mathbb{F}[\Delta] = S / (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \Delta)$$



Gotoのイデアル

$R = S/I$: Krull 次元 d の次数付 $\mathbb{F}$ 代数
斉次式の列 $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ が **巴系 (sop)**

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim_{\mathbb{F}} R/(\Theta R) < \infty$$

巴系 Θ が **線形巴系 (lsop)** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \deg \theta_i = 1 \ (\forall i)$.

定義 (Goto 1983)

R のイデアル $\Sigma(\Theta, R)$ を次で定義

$$\Sigma(\Theta; R) = \Theta R + \sum_{i=1}^d (\theta_1, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_d) :_R \theta_i.$$



S-R環のポアンカレ双対性

定理 (Novik-Swartz 2009 (+M-Novik-Yoshida 2016⁺))

Δ が n 多様体 M の三角形分割, $R = \mathbb{F}[\Delta]$, Θ $Isop$,
$$h''_i(\Delta) = \dim_{\mathbb{F}} (R/\Sigma(\Theta; R))_i.$$

定理 (Novik-Swartz 2009 (+M-Novik-Yoshida 2016⁺))

$A = R/\Sigma(\Theta; R)$ とする. M が向き付け可能な閉多様体なら, A は次数 $n+1$ のポアンカレ双対代数. 即ち, $A_{n+1} \cong \mathbb{F}$ で, 次の写像が非退化

$$\begin{aligned} A_i \times A_{n+1-i} &\rightarrow A_{n+1} \cong \mathbb{F} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

系. $h''_i(\Delta) = h''_{n+1-i}(\Delta)$

頂点数との関係

定理 (Novik–Swartz, M (conj. by Kühnel))

Δ が閉 $2k$ 多様体 M の v 頂点三角形分割なら

$$\binom{v - k - 2}{k + 1} \geq \binom{2k + 1}{k + 1} \beta_k(M).$$

$$\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{v-2k-1}]$$

の次数 $k+1$ 部分の $\mathbb{F}$ 次元

$$\Sigma(\Theta, \mathbb{F}[\Delta]) / (\Theta \mathbb{F}[\Delta])$$

の次数 $k+1$ 部分の $\mathbb{F}$ 次元

Question ①

問

基本群の情報を頂点数に反映させる良い方法は？

$m(X) = X$ の基本群の生成元の個数の最小値

定理 (Novik-M 2016⁺ (Conj. by Kalai))

Δ が連結な閉 n 多様体 M の v 頂点三角形分割なら

$$\binom{v - n - 1}{2} \geq \binom{n + 2}{2} m(M).$$

本当はもっと良いものが欲しい...

$12 \leq \text{ポアンカレ球面の最小頂点数} \leq 16$

Question ②

問

ホモロジーのトーシヨンの情報を頂点数に反映させる上手い方法はあるか？

レンズ空間の三角形分割の頂点数(smallest known)

$L(2,1)$	$L(3,1)$	$L(4,1)$	$L(5,1)$	$L(5,2)$	$L(6,1)$	$L(7,1)$	$L(7,2)$
11	12	14	15	14	16	17	16