

グラフの彩色数と Hom 複体について

松下 尚弘 (京都大学理学研究科)*

1. はじめに

単純グラフとは二重線およびループのある頂点を持たないグラフのことである. n を非負整数とする. 単純グラフ G の n -彩色とは, G の頂点集合 $V(G)$ から n 点集合 $\{1, \dots, n\}$ への写像 φ であって, $v, w \in V(G)$ が辺で結ばれているとき, $\varphi(v) \neq \varphi(w)$ となるものである. G の n -彩色が存在するような n のうち最小のものを G の彩色数といい $\chi(G)$ で表す. グラフの彩色数を決定することをグラフの彩色問題という. これはグラフ理論において古くから考えられてきた問題である [4].

グラフの彩色問題に代数トポロジーを初めて応用したのは Lovász である. Lovász はグラフ G に対し, 近傍複体 $N(G)$ を定義し, $N(G)$ が n -連結ならば G の彩色数 $\chi(G)$ は $n + 3$ 以上であることを証明した. そしてこの手法を用いて, Lovász は Kneser 予想を解決した.

Hom 複体とは, 二つのグラフ T, G に対し定義される CW 複体 $\text{Hom}(T, G)$ であり, Babson-Kozlov [1], [2] によって本格的に研究が始められた. Hom 複体は次の意味で近傍複体の一般化になっている: K_2 により二つの頂点とそれらを結ぶ辺のなすグラフを表すとする. このとき $\text{Hom}(K_2, G)$ と近傍複体 $N(G)$ とはホモトピー同値になる. K_2 への二つの頂点を入れ替える \mathbb{Z}_2 の群作用によって, $\text{Hom}(K_2, G)$ も \mathbb{Z}_2 -空間となるが, この \mathbb{Z}_2 -空間を箱複体といい, 特別によく研究されている [3].

Hom 複体の研究において, 中心的な話題となっていた概念として, Kozlov のホモトピーテストグラフ [11] がある. グラフ T がホモトピーテストグラフであるとは, 任意のグラフ G に対し, 不等式

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T)$$

が成り立つことをいう. ここで空間 X に対し, $\text{conn}(X)$ によって X が n -連結であるような最大の n を表している. 上記の Lovász の近傍複体に関する結果は「 K_2 がホモトピーテストグラフである」と言い換えられる. また Lovász は奇数次のサイクルグラフ C_{2r+1} ($(2r + 1)$ 角形の頂点と辺のなすグラフ) がホモトピーテストグラフであることを予想し, Babson と Kozlov は [2] においてこの予想を解決した. それ以来, Hom 複体の研究が盛んに行われるようになった.

Hom 複体や近傍複体から, n -彩色の障害を引き出す方法について述べる. その前に, 以下の基本的な用語を準備しておく. グラフ G からグラフ H へのグラフ準同型とは, 頂点集合の間の写像 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ であって, $v \sim_G w$ なら $f(v) \sim_H f(w)$ が成り立つことをいう. ここで $v \sim_G w$ は v と w はグラフ G において辺で結ばれていることを意味する. K_n により完備 n -頂点グラフを表す. すなわち $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$ であって, $a, b \in V(K_n)$ は $a \neq b$ のとき辺が張られている. このときグラフ G の n -彩色は, G から K_n へのグラフ準同型と同一視できる.

本研究は科研費 (課題番号:28-6304) の助成を受けたものである。

キーワード: グラフ, 彩色数, 近傍複体, Hom 複体

* 〒 606-8224 京都府京都市北白川追分町 京都大学理学研究科数学教室
e-mail: mtst@math.kyoto-u.ac.jp

$\text{Hom}(T, G)$ のトポロジーから G の n -彩色の障害を求めたい. そのためにまず T に適切な群作用を考える. すると Hom 複体の関手性から, 空間 $\text{Hom}(T, G)$ に群作用が誘導され (第 2 節参照), グラフ準同型 $f: G_1 \rightarrow G_2$ は同変写像 $f_*: \text{Hom}(T, G_1) \rightarrow \text{Hom}(T, G_2)$ を誘導する. したがってグラフ G に対し $\text{Hom}(T, G)$ から $\text{Hom}(T, K_n)$ への同変写像が存在しないことが証明されれば, G の n -彩色が存在しないことがわかる. 特に $T = K_2$ のときは, $\text{Hom}(K_2, K_m) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^{m-2}$ ($n \geq 1$) であることが知られている (Babson-Kozlov [1]). ここで $(m-2)$ -球面 S^{m-2} は対蹠写像により \mathbb{Z}_2 -空間とみなしている. もし $\text{Hom}(K_2, G)$ が n -連結ならば, 簡単な障害理論から S^{n+1} から $\text{Hom}(K_2, G)$ への \mathbb{Z}_2 -同変写像が存在することがわかるが, $n+1 > m-2$ ならば S^{n+1} から S^{m-2} への \mathbb{Z}_2 -同変写像は存在しない (Borsuk-Ulam の定理). したがって $n+1 \leq m-2$, すなわち

$$\chi(G) \geq \text{conn}(\text{Hom}(K_2, G)) + 3 = \text{conn}(\text{Hom}(K_2, G)) + \chi(K_2) + 1$$

を得る. すなわち K_2 はホモトピーテストグラフである. このように Hom 複体の (同変) ホモトピー型とグラフの彩色数とが関係していることがわかる.

本講演では与えられたグラフ T に対し, Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ の構造が, どの程度グラフ G の彩色数に制限を与えるのかということについて述べる. 第 2 節において近傍複体と Hom 複体の正確な定義を与える.

第 3 節ではホモトピーテストグラフに関してより詳しく述べ「全ての二部グラフはホモトピーテストグラフ」という Kozlov の予想の肯定的な解決について述べる.

Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー不変量が G の彩色数に制限を与えることを述べたが, それでは「 T がホモトピーテストグラフならば G の彩色数は Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型から決定されるか」という問いが自然に生ずる. しかし続く第 4 節において任意の有限グラフ T に対し, 「 $\chi(G) > 2$ ならば $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型は G の彩色数を決定しない」ということを示す. より正確に言えば, $\chi(G) > 2$ のとき, グラフ H であって, $\chi(H)$ は $\chi(G)$ に比べてはるかに大きいにも関わらず, $\text{Hom}(T, G)$ と $\text{Hom}(T, H)$ はホモトピー同値であるものが存在することがわかる.

したがって Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ から $\chi(G)$ を決定するには, $\text{Hom}(T, G)$ のより精密な情報を調べなくてはならない. しかし箱複体 $\text{Hom}(K_2, G)$ の \mathbb{Z}_2 -CW-複体としての構造は, 元のグラフ G を孤立点を除いて決定してしまう (第 5 節参照). 一方, \mathbb{Z}_2 -作用を考えないならば次が成り立つ: 二つのグラフ G と H に対し, 箱複体 $\text{Hom}(K_2, G)$ と $\text{Hom}(K_2, H)$ が CW-複体として同型ならば, Kronecker 二重被覆 $K_2 \times G$ と $K_2 \times H$ は同型である. このことを用いると, 箱複体 (あるいは近傍複体) が CW-複体として同型であるにも関わらず, 彩色数が全く異なる例を構成することができる.

第 6 節においてグラフの圏のモデル構造について述べる. この節において, グラフ準同型 $f: G \rightarrow H$ で箱複体の中の写像 $f_*: \text{Hom}(K_2, G) \rightarrow \text{Hom}(K_2, H)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値のとき弱同値とするようなモデル構造を導入し, それが \mathbb{Z}_2 -空間の圏に Quillen 同値になることを述べる. 箱複体でグラフの彩色数の下界を得る方法は, いわばグラフの圏と \mathbb{Z}_2 -空間との圏とを比較して得られるものであった. つまり「 G から H へのグラフ準同型が存在するならば, $B(G)$ から $B(H)$ への \mathbb{Z}_2 -写像が存在する」ということに着目していた. 一方, 上記の第 4 節における結果は「 $B(G)$ から $B(H)$ への \mathbb{Z}_2 -同変写像が存在するからといって, G から H へのグラフ準同型が存在するとは限らない」といえる. したがってグラフの圏と \mathbb{Z}_2 -空間の圏は一致はしないのだが, Quillen 同値ということはこの二つのモデル圏のホモトピー圏は同値になるということである.

2. 基本的な用語

この節では講演で必要となる用語の定義を述べる. 半順序集合のことをポセットと呼ぶ. ポセット P の部分集合で, P の順序に関して全順序になるものを P のチェーンという. P の有限チェーン全体のなす単体的複体を $\Delta(P)$ で表し, その幾何学的実現を $|P|$ で表す. $|P|$ を P の分類空間という. 以下の議論において, ポセットはしばしばその分類空間と同一視する.

本講演において, **グラフ** とは集合 $V(G)$ と $V(G) \times V(G)$ の対称部分集合 $E(G)$ の組 $(V(G), E(G))$ のことを指す. $v \in V(G)$ が $(v, v) \in E(G)$ なるとき v はループを持つという. 第1節冒頭で単純グラフの定義を述べたが, このグラフの定式化においては, 単純グラフとはループを持つ頂点が存在しないグラフのことである. グラフ準同型とは, 写像 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ であって $(f \times f)(E(G)) \subset E(H)$ なるものである. 第1節で述べたように G の n 彩色は G から K_n へのグラフ準同型と同一視され, G の彩色数 $\chi(G)$ は以下のように定式化できる:

$$\chi(G) = \inf\{n \geq 0 \mid G \text{ から } K_n \text{ へのグラフ準同型が存在する.}\}. \quad (1)$$

G をグラフとする. $v \in V(G)$ に対し, $N(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$ を v の近傍という. G の**近傍複体** $N(G)$ とは, G の孤立していない頂点全体を頂点集合とする単体複体であって, 単体の集合が

$$\{\sigma \subset V(G) \mid \sigma \text{ は有限集合で } \sigma \subset N(v) \text{ となる } v \in V(G) \text{ が存在する.}\}$$

により定義される抽象的単体複体である.

Hom 複体の定義を述べる. グラフ T からグラフ G への多重準同型写像とは, 写像 $\eta: V(T) \rightarrow 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset\}$ であって,

$$(v, w) \in E(T) \Rightarrow \eta(v) \times \eta(w) \subset E(G)$$

を満たすものである. ここで $2^{V(G)}$ は $V(G)$ の冪集合を表す. η, η' を多重準同型写像とすると, 各 $v \in V(T)$ に対して $\eta(v) \subset \eta'(v)$ なるとき, $\eta \leq \eta'$ と書く. そして T から G への多重準同型写像全体のなすポセットを **Hom 複体** といい, $\text{Hom}(T, G)$ で表す.

$f: T \rightarrow S$ をグラフ準同型とすると, 順序を保つ写像 $f^*: \text{Hom}(S, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G)$ を $f^*(\eta) = \eta \circ f$ により定める. またグラフ準同型 $g: G \rightarrow H$ に対し, $g_*: \text{Hom}(T, G) \rightarrow \text{Hom}(T, H)$ を $g_*(\eta)(v) = g(\eta(v))$ とする. これにより Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ は, T および G に関し関手的になる.

3. ホモトピーテストグラフ

グラフ T がホモトピーテストグラフであるとは,

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T)$$

が任意のグラフ G に対して成立するとき言うのであった. 第1節でも述べたように, Lovász の近傍複体に関する結果は K_2 がホモトピーテストグラフであることを意味する. その他のホモトピーテストグラフの例としては, n を 3 以上の整数としたときの n -頂点完備グラフ K_n , n -サイクルグラフ C_n などがある (それぞれ [1], [2]). Hom 複

体が導入された当初, Lovász は辺を一つ以上持つ全てのグラフは Hom 複体であると予想したが, これは Hoory と Linial により否定的に解決された [8]. その他のホモトピーテストグラフの例や, ホモトピーテストグラフにならない例などは, [6] や [18] などに詳しく書かれている.

Kozlov は [11] において全ての二部グラフ (グラフ T で $\chi(T) = 2$ なるもの) はホモトピーテストグラフであると予想したが, 私はこの予想を肯定的に解決した.

定理 3.1 (M. [13]). $\chi(T) = 2$ ならば, グラフ T はホモトピーテストグラフである.

証明は Hom 複体の関手性から簡単にわかるので, ここに書くことにする.

まずグラフ T が $\chi(T) = 2$ ならば, K_2 は T のレトラクトである. すなわちグラフ準同型 $i : K_2 \rightarrow T$ と $r : T \rightarrow K_2$ で ri が恒等写像になるものが存在する. K_2 はホモトピーテストグラフだから, 次のことを見ればよい.

補題 3.2. T と S をグラフとし, T はホモトピーテストグラフであるとする. もし T が S のレトラクトならば, S はホモトピーテストグラフである.

証明: まずグラフ準同型 $f : G \rightarrow H$ が存在するならば, $\chi(G) \leq \chi(H)$ であることに注意する. これは第 2 節の式 (1) から明らかである. 次に補題の状況に戻って, グラフ準同型 $i : T \rightarrow S$, $r : S \rightarrow T$ で $ri = \text{id}_T$ なるものをとる. 上に述べたことから, $\chi(T) = \chi(S)$ である.

$\text{Hom}(S, G)$ が n -連結であると仮定して, $\chi(G) > n + \chi(S)$ を示せばよい. ここで $\text{Hom}(T, G)$ は $\text{Hom}(S, G)$ のレトラクトであることに注意する. 実際 $i^*r^* = (ri)^* = \text{id}$ だから. したがって $\text{Hom}(S, G)$ が n -連結なので, $\text{Hom}(T, G)$ も n -連結である. T はホモトピーテストグラフだったから

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T) \geq n + \chi(S)$$

となり, S がホモトピーテストグラフであることがわかる. □

一般に n 頂点完備グラフ K_n をレトラクトとして含むグラフを **完全グラフ** という. $n \geq 2$ ならば K_n はホモトピーテストグラフだから, 補題 3.2 により彩色数が 2 以上の完全グラフはホモトピーテストグラフである.

4. Hom 複体のホモトピー型について

T がホモトピーテストグラフならば $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型が $\chi(G)$ の下界を与えることは前節で述べた. それでは Hom 複体のホモトピー型がグラフの彩色数を決定し得るのかという問題が生じる. この問題に関連して, Walker [19] は $T = K_2$ のときに, 次のことを証明した. G_1 と G_2 を以下の図で描かれるグラフとする. このとき $\chi(G_1) = 4$ かつ $\chi(G_2) = 3$ であって, $\text{Hom}(K_2, G_1) \simeq_{\mathbb{Z}_2} \text{Hom}(K_2, G_2)$ であることがわかる.

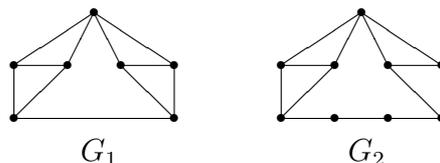


図 1.

すなわち箱複体 $\text{Hom}(K_2, G)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値であるにも関わらず、彩色数が異なる例が存在することがわかる。上記の Walker の例がそのような例として唯一知られているものだったが、私はそのような例が非常にたくさんあることを示した：

定理 4.1 (M. [16]). T を有限グラフ、 G を彩色数が 3 以上のグラフとする。このとき任意の整数 n に対し、グラフ H で次の性質を満たすものが存在する。

- (1) $\text{Hom}(T, G)$ と $\text{Hom}(T, H)$ はホモトピー同値である。
- (2) $\chi(H) > n$

さらに $T = K_2$ のときは (1) において $\text{Hom}(K_2, G)$ と $\text{Hom}(K_2, H)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値であるようにとることができる。

特に Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型は、 $\chi(G) > 2$ ならば G の彩色数を決定しないことがわかる。前節において T がホモトピーテストグラフならば $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型は $\chi(G)$ の下界を与えることについて述べたが、定理 4.1 から $\text{Hom}(T, G)$ のホモトピー型は $\chi(G)$ の上界を与えることはないこともわかる。特に $T = K_2$ のときは、以下のことが別に知られている。 \mathbb{Z}_2 -空間 X に対し、 X から S^m への \mathbb{Z}_2 -同変写像が存在するような最小の n を X の \mathbb{Z}_2 -指数といい、 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$ で表す。 $\text{Hom}(K_2, K_n) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^{n-2}$ ($n \geq 1$) だから、

$$\chi(G) \geq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\text{Hom}(K_2, G)) + 2 \quad (2)$$

が成立する [12]。一方、右の下界は以下の意味で最大であることが、Dochtermann-Schultz [6] において示されている：任意の有限 \mathbb{Z}_2 -CW-複体 X に対し、グラフ G で $\text{Hom}(K_2, G) \simeq_{\mathbb{Z}_2} X$ かつ $\chi(G) = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\text{Hom}(K_2, G)) + 2$ なるものが存在する。

したがって定理 4.1 と組み合わせることで、 $\text{Hom}(K_2, G)$ に関しては、その \mathbb{Z}_2 -ホモトピー型に着目するとき、不等式 (2) 以上の情報は得られないことがわかる。

定理 4.1 の証明の概要を、 $T = K_2$ の場合に述べる。記号を短くするために、以下 $\text{Hom}(K_2, G)$ を $B(G)$ と書くことにする。その証明に使うグラフ理論の有名な定理を紹介する。グラフ G の内周 $g(G)$ (girth) とは、 G に埋め込まれたサイクルの最小の長さのことを言う。内周が大きいグラフは、局所的には木 (tree) であるグラフ、と考えることができる。木は常に 2 彩色可能である。したがって下記の定理は、彩色数がグラフの大域的な性質であることを示している。

定理 4.2 (Erdős [7]). 任意の整数 m, n に対し、 $g(G) > m$ かつ $\chi(G) > n$ なる有限グラフ G が存在する。

一方で次がわかる。(例えば Walker [19] の第 12 節を参照)

補題 4.3. グラフ G の内周 $g(G)$ が 4 より大きいならば、 $B(G)$ は 1 次元の \mathbb{Z}_2 -CW-複体と \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値である。

一方で箱複体に関しては以下の近似定理が成り立つ。(この「近似」は単体近似定理のような意味合いで使っている)

命題 4.4 (M. [17]). G と H を有限グラフとし、 $\varphi : |B(G)| \rightarrow |B(H)|$ を \mathbb{Z}_2 -同変写像とする。このとき有限グラフ G' とグラフ準同型 $\varepsilon : G' \rightarrow G$, $f : G' \rightarrow H$ が存在して次の性質を満たす。

(1) $\varepsilon_* : B(G) \rightarrow B(H)$ は \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値である.

(2) 図式

$$\begin{array}{ccc} |B(G)| & \xrightarrow{\varphi} & |B(H)| \\ \varepsilon_* \uparrow & & \parallel \\ |B(G')| & \xrightarrow{f_*} & |B(H)| \end{array}$$

は \mathbb{Z}_2 -ホモトピーを除いて可換である.

定理 4.1 の証明の概略を述べる. G は彩色数が 3 以上のグラフで, n を任意の整数とする. 定理 4.2 から内周が 4 より大きい有限グラフ X で $\chi(X) > n$ なるものが存在する. このとき $|B(X)|$ は一次元 \mathbb{Z}_2 -CW-複体と \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値である. G の彩色数が 3 以上であるという条件から S^1 から $|B(G)|$ への \mathbb{Z}_2 -写像が存在することがわかる. これは十分大きな r に対し, C_{2r+1} から G へのグラフ準同型が存在するという事実と, $B(C_{2r+1}) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^1$ なることからわかる. したがって $|B(X)|$ から $|B(G)|$ への \mathbb{Z}_2 -同変写像が存在する.

上記の近似定理を用いることで, 有限グラフ X' とグラフ準同型 $\varepsilon : X' \rightarrow X$, $f : X' \rightarrow G$ であって, $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値になるものが存在する. 次に X' の“長さ m のシリンダー $X' \times I_m$ ”を考える (Dochtermann [5]). ここで m は 2 以上の整数で, I_m は長さ m の道のグラフの各頂点にループを付け加えて得られたものである. このシリンダー $X' \times I_m$ の両端を $\varepsilon : X' \rightarrow X$, $f : X' \rightarrow G$ により貼り付けて得られるグラフを H とおく.

この H が定理 4.1 の条件を満たす. 実際, H は X を部分グラフとして含んでいるから $n < \chi(X) \leq \chi(H)$ である. 上記の H の構成は空間のホモトピー押し出し (homotopy pushout) に似ているが, 実際に $B(H)$ は $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$ と $f_* : B(X') \rightarrow B(G)$ のホモトピー押し出しである. $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$ は \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値だから, $B(G)$ と $B(H)$ は \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値となることを得る.

5. 箱複体のセル構造と Kronecker 二重被覆

前節で述べた結果から, グラフの箱複体の同変ホモトピー型は彩色数を決定しないことがわかった. したがってグラフの彩色数のより詳細な情報を調べるためには, Hom 複体のより精密な構造を調べる必要がある. しかし以下の定理が示すように, 箱複体の \mathbb{Z}_2 -ポセットとしての構造は元のグラフ G の構造を, 孤立点を除いて決定する. (特に彩色数も等しくなる)

定理 5.1. G と H を孤立点を持たないグラフとする. このとき以下が成立する.

- (1) $B(G)$ と $B(H)$ が \mathbb{Z}_2 -ポセットとして同型であることと, G と H が同型であることは同値である.
- (2) $B(G)$ と $B(H)$ がポセットとして同型であることと, $K_2 \times G$ と $K_2 \times H$ が同型であることは同値である.
- (3) $K_2 \times G \cong K_2 \times H \Rightarrow N(G) \cong N(H)$ である. さらに G と H が stiff (後述) であると仮定すると, $N(G) \cong N(H) \Rightarrow K_2 \times G \cong K_2 \times H$ が成り立つ.

グラフ G が stiff であるとは、任意の G の頂点 v, w に対し、 $N(v) \subset N(w) \Rightarrow v = w$ が成り立つことをいう。

上記の定理において、 $K_2 \times G$ は G の **Kronecker 二重被覆** と呼ばれている [9]。まずグラフの積 $G \times H$ を定義する。グラフ G と H に対し、その積 $G \times H$ を、

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \times H) = \{((v, w), (v', w')) \mid (v, v') \in E(G), (w, w') \in E(H)\}$$

により定義する。この積 “ \times ” は Kronecker 積と呼ばれることもある。グラフ準同型 $p: G \rightarrow H$ は各 $v \in V(G)$ に対し、 $p|_{N(v)}: N(v) \rightarrow N(p(v))$ が全単射になるとき **被覆** という。 $K_2 \times G$ の第 2 射影 $K_2 \times G \rightarrow G$ は被覆になっている。これが Kronecker 二重被覆という名前の所以である。

Kronecker 二重被覆は以下のように幾何学的に簡明な定式化を持つ。 X を二部グラフとする。 X の **対合写像** (involution) とは、グラフ準同型写像 $\tau: X \rightarrow X$ であって、 $\tau^2 = \text{id}_X$ なるものを指す。 τ が **奇** (odd) であるとは各 $v \in V(X)$ に対し、 v から $\tau(v)$ を結ぶ道で長さが偶数のものが存在しないことをいう。 X が連結二部グラフならば、これは X のある頂点 v に対し、 v から $\tau(v)$ への長さが奇数な道が取れることと同値である。対合写像 τ が与えられると、 X の \mathbb{Z}_2 -作用が得られるが、その作用による商を X/τ で書くことにする。グラフ G に対し、 G の Kronecker 二重被覆 $K_2 \times G$ に対しては、 $(1, v) \leftrightarrow (2, v)$ とすることで奇な対合写像が定義される。そしてこの \mathbb{Z}_2 -作用による商はグラフ G に一致する。一方で以下の定理が古典的に知られている。例えば [9] を見よ。

補題 5.2. X を二部グラフ、 τ を X の奇な対合写像とする。このとき $K_2 \times (X/\tau) \cong X$ である。

この補題を用いることで次の命題が示される。後の例 5.5 において、以下の $m = 4$, $n = 3$ の場合の例を挙げる。

命題 5.3 (M. [15]). 任意の 2 以上の整数 m, n に対し、グラフ G, H で $\chi(G) = m$, $\chi(H) = n$ かつ $K_2 \times G \cong K_2 \times H$ なるものが存在する。

定理 5.1 の (2), (3) と命題 5.3 により次がわかる。

系 5.4 (M. [15]). 任意の 2 以上の整数 m, n に対して、グラフ G, H で $\chi(G) = m$, $\chi(H) = n$ であるにも関わらず、 $N(G) \cong N(H)$ かつ $B(G)$ と $B(H)$ がポセットとして同型であるようなものが存在する。また m, n が 3 以上なら G と H は連結であるように取ることができる。

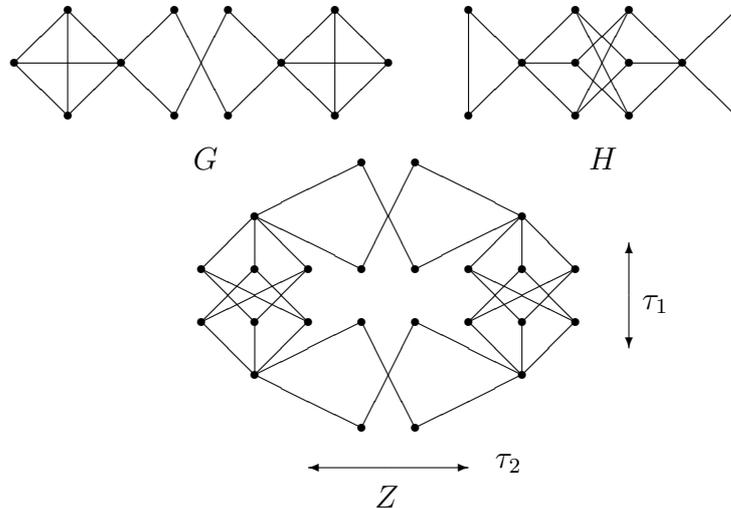
Lovász は近傍複体を初めて導入した論文 [12] において、グラフの彩色数 $\chi(G)$ を近傍複体 $N(G)$ の位相的不変量で特徴付けられないかという問いかけをしているが、系 5.4 はそのような位相的不変量は存在しないということを示している。

例 5.5. 下の図で描かれているグラフ G と H は $m = 4$, $n = 3$ のときの命題 5.3 の例である。 G と H の彩色数がそれぞれ 4, 3 なることは簡単に示せる。 G と H の Kronecker 二重被覆はともにグラフ Z に同型になる。これを見るために、 Z の奇な対合写像 τ_1, τ_2 を以下のように定義する。まず τ_1 を水平の線に関し線対称に写す Z の対合写像、 τ_2 を

縦の線に関し線対称に写す Z の対合写像とする. このとき τ_1, τ_2 は奇な対合写像であり, かつ $Z/\tau_1 \cong G, Z/\tau_2 \cong H$ がわかる. したがって補題 5.2 により

$$K_2 \times G = K_2 \times (Z/\tau_1) = Z = K_2 \times (Z/\tau_2) = K_2 \times H$$

がわかる.



6. 単体的手法とモデル構造について

この節では, グラフの圏にモデル構造を導入し, それが \mathbb{Z}_2 -空間の圏と Quillen 同値になることを述べる. モデル圏とは弱同値・コファイブレーション・ファイブレーションと呼ばれる三種の射の族が与えられた圏で, いくつかの性質を満たすものとして定義される. モデル圏が導入されるとそのホモトピー圏なるものが定義される. 例えば位相空間の圏のモデル構造の場合, そのホモトピー圏は CW-複体を対象とし, 連続写像を射とする圏を, ホモトピックな写像を同一視することで得られる圏に同値になる. 二つのモデル圏が Quillen 同値ならば, この二つのホモトピー圏は圏同値になる.

グラフの彩色問題への Hom 複体の応用は, Hom 複体を通してグラフの圏と, ある群 Γ の Γ -空間の圏との比較から得られるものだったと言える. 話を単純にするため, $\Gamma = \mathbb{Z}_2, T = K_2$ で \mathbb{Z}_2 の K_2 への作用が二つの頂点をひっくり返すものとする. このとき Csorba は任意の自由な \mathbb{Z}_2 -CW-複体 X に対し, 単純グラフ G で $\text{Hom}(K_2, G)$ と X が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値となるものが存在することを証明した. 一方で \mathbb{Z}_2 -写像 $\varphi: |B(G)| \rightarrow |B(H)|$ が与えられたとき, G から H へのグラフ準同型 $f: G \rightarrow H$ で $f_* \simeq \varphi: |B(G)| \rightarrow |B(H)|$ なるものが存在するかというと, それは一般には成り立たない. 実際, 第 4 節でも述べたように, $B(G_1) \simeq_{\mathbb{Z}_2} B(G_2)$ であっても $\chi(G_1) \neq \chi(G_2)$ なることがある. これは一方の G_1 では K_n にグラフ準同型があり, したがって $|B(G_2)| \simeq_{\mathbb{Z}_2} |B(G_1)|$ から $|B(K_n)|$ への \mathbb{Z}_2 -写像があるものの, G_2 では K_n にはグラフ準同型が存在しないということである.

したがってグラフの圏と \mathbb{Z}_2 -空間の圏は同値ではない. しかしモデル構造を導入すると, そのホモトピー圏は一致している. それが上記に述べた結果の主旨である.

以下その詳細と正確な主張について書く. 箱複体に限らず, より一般の場合の Hom 複体 $\text{Hom}(T, G)$ に話を戻す. グラフ T を固定したとき, グラフ G に対しポセット $\text{Hom}(T, G)$ を対応させる関手は右随伴関手にも左随伴関手にもならない (したがって Quillen 随伴関手にはならない). そこで次の概念を導入する.

n を非負整数とする. グラフ Σ^n を $V(\Sigma^n) = [n] = \{0, 1, \dots, n\}$, $E(\Sigma^n) = [n] \times [n]$ とおく. グラフの圏を \mathcal{G} により表す. 単体的集合 $\text{Sing}(T, G)$ を

$$\text{Sing}(T, G)_n = \mathcal{G}(T, G)$$

とし, 面写像および退化写像を自然に定義することによって得られるものとする. この単体的集合 $\text{Sing}(T, G)$ を **特異 Hom 複体** とよぶ. このとき次が成り立つ.

定理 6.1 (M. [14]). グラフ T, G に対し自然なホモトピー同値

$$|\text{Sing}(T, G)| \xrightarrow{\simeq} |\text{Hom}(T, G)|$$

が存在する.

一方で上記の特異 Hom 複体 $\text{Sing}(T, G)$ は右随伴関手になる. より一般に, T に群 Γ が作用しているとき, $\text{Sing}(T, G)$ にも群作用が誘導され Γ -単体的集合になる. このとき次が成り立つ. (次の定理は東大数理の藤内翔太さんが証明してくださったものです. この場をお借りして感謝させていただきます)

定理 6.2 (藤内, M. [17]). 上記において, 関手

$$\text{Sing}_T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{SSet}^\Gamma, G \mapsto \text{Sing}(T, G)$$

は右随伴関手である. ここで \mathcal{G} はグラフの圏, \mathbf{SSet}^Γ は Γ -単体的集合の圏である.

A_T を Sing_T の左随伴とする. このとき次の定理が成り立つ.

定理 6.3 (M. [17]). グラフの圏 \mathcal{G} には以下のようなモデル構造が入る.

- (1) グラフ準同型 $f : G \rightarrow H$ は f が誘導する \mathbb{Z}_2 -写像 $f_* : B(G) \rightarrow B(H)$ が \mathbb{Z}_2 -ホモトピー同値であるとき弱同値とする.
- (2) コファイブレーションは \mathbb{Z}_2 -単体的集合の包含 $i : K \hookrightarrow L$ で $A_{K_2} \circ \text{Sd}^3(i)$ と書かれるグラフ準同型である.

そしてこのとき随伴関手の対

$$(A_{K_2} \circ \text{Sd}^3, \text{Ex}^3 \circ \text{Sing}_{K_2}) : \mathbf{SSet}^{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow \mathcal{G}$$

は Quillen 同値である.

この定理は一般の Γ -グラフ T に一般化することはできない. 実際, 随伴関手の対

$$(A_T \circ \text{Sd}^k, \text{Ex}^k \circ \text{Sing}_T) : \mathbf{SSet}^\Gamma \longrightarrow \mathcal{G}$$

が Quillen 同値ならば, (右) Γ -グラフ T は次の性質が成り立たなくてはならない.

- 群 Γ の任意の部分群 Γ' に対し, ユニットの定める写像 $\Gamma/\Gamma' \rightarrow \text{Sing}(T, T/\Gamma')$, $\gamma\Gamma' \mapsto p \circ \alpha_\gamma$ は Γ -ホモトピー同値である. ここで α_γ は $T \rightarrow T$, $v \mapsto v\gamma$ により定まる写像であり, $p : T \rightarrow T/\Gamma'$ は自然な射影である.

この性質は $T = K_2$, $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ ならば成立する. その他には $T = \mathbf{1}$ すなわち一つのループを持つ頂点からなるグラフで Γ が自明の時に成り立つ. しかしそれ以外のグラフで, 上記の性質が成り立つ Γ -グラフ T の例として K_2 とも $\mathbf{1}$ とも本質的に違う場合が存在するのかわからない.

参考文献

- [1] E. Babson, D. N. Kozlov, *Complexes of graph homomorphisms*, Israel J. Math. **152** 285-316 (2006).
- [2] E. Babson, D. N. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Ann. of Math. **165** 965-1007 (2007).
- [3] P. Csorba, *Homotopy types of box complexes*, Combinatorica, **27** (6) 669-682 (2007).
- [4] R. Diestel, *Graph theory*, 4th edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, vol. 173 (2010)
- [5] A. Dochtermann, *Hom complexes and homotopy theory in the category of graphs*, European J. Combin. **30** (2) 490-509, (2009).
- [6] A. Dochtermann, C. Schultz, *Topology of Hom complexes and test graphs for bounding chromatic number*, Israel J. Math. **187** (1) 371-417 (2012).
- [7] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math. **11** 34-38 (1959) .
- [8] A. Hoory, N. Linial, *A counter example to the conjecture of Lovász on the χ -coloring complex*, J. Combin. Ser. B **95**(2) 346-349 (2005).
- [9] W. Imrich, T. Pisanski, *Multiple Kronecker covering graphs*, European J. Combin. **29** 1116-1122 (2008)
- [10] D. N. Kozlov, *Homology tests for graph colorings*, Algebraic and Geometric combinatorics, Contemporary of Mathematics **423** 221-234 (2006).
- [11] D. N. Kozlov, *Chromatic numbers, morphism complexes, and Stiefel-Whitney characteristic classes*, in: *Geometric Combinatorics*, IAS/Park City Math. Ser. **14**, Amer. Math. Soc. Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ; in press
- [12] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Ser. A **25** (3) 319-324 (1978).
- [13] T. Matsushita, *Answers to some problems about graph coloring test graphs*, European J. Combin. Vol. 45, 59-64 April (2015).
- [14] T. Matsushita, *Morphism complexes of sets with relations*, Osaka J. Math. (2016).
- [15] T. Matsushita, *Box complexes and Kronecker double coverings of graphs*, arXiv:1404.1549
- [16] T. Matsushita, *Homotopy types of Hom complexes of graphs*, arXiv:1509.03855
- [17] T. Matsushita, *Box complexes and homotopy theory of graphs*, 1605.06222.
- [18] C. Schultz, *The equivariant topology of stable Kneser graphs*, J. Combin. Ser. A **118** (8) 2291-2318 (2011).
- [19] J. W. Walker *From graphs to ortholattices and equivariant maps*, J. Combin. Theory Ser. B **35**, 171-192 (1983).
- [20] R. T. Živaljević, *WI-posets, graph complexes and Z_2 -equivalences*, J. Combin. Ser. A, **111** (2), 204-223 (2005).