

4次元シュタイン多様体と結び目

安井 弘一 (広島大学)*

1. はじめに

4次元多様体はその色々な構成や制約を用いることで結び目理論に様々な応用を持つことが知られている. 本稿では主に4次元円板 D^4 に1, 2ハンドルを貼り付けて得られる4次元2ハンドル体を考え, その微分構造や結び目理論への応用などについて紹介する. 具体的には以下の3つの研究を中心に述べる.

- エキゾチック枠付き結び目とその結び目コンコードダンスへの応用
- コンパクト可縮4次元多様体上のStein構造の存在問題と結び目
- 結び目の最大Thurston-Bennequin数と可約なデーンス手術

これらの研究にはいずれもStein多様体が関わっている. なお各2ハンドル $D^2 \times D^2$ の接着領域は $S^1 \times D^2 (= \partial D^2 \times D^2)$ なので, 4次元2ハンドル体は $\#_n S^1 \times S^2 (= \partial(D^4 \cup n \text{個の1ハンドル}))$ の枠付き絡み目 (framed link) によって一意に定まることに注意しておく. また各結び目の枠 (framing) は整数で与えられる.

本稿で扱う多様体は全てコンパクト, 連結, 滑らかで向きづけられているとし, 同相写像・微分同相写像は向きを保つとする. ハンドル体は4次元, コンパクト, 連結で向きづけられているとする. 結び目は3次元多様体の中に滑らかに埋め込まれている S^1 であるとし, 断りのない限り S^3 の結び目を意味する. なお4次元多様体やハンドルの基礎事項については例えば [9] を参照して頂きたい.

2. エキゾチック枠付き結び目と結び目コンコードダンス

本節では S^3 の枠付き結び目に沿って D^4 に2ハンドルを一つ接着することで得られる4次元多様体 (枠付き結び目が表す4次元多様体と呼ぶ) について, その微分構造の研究と結び目コンコードダンスへの応用を紹介する.

n 枠付き結び目で表示される4次元多様体は, 単連結で第2ベッチ数 b_2 が1であり, 交叉形式を表示する行列は (n) である. 非常に単純なトポロジーを持ち, 基本的な4次元多様体と言える. またその境界の3次元多様体は結び目の n 手術 (係数 n のデーンス手術) で得られる多様体と呼ばれ, 3次元トポロジーで非常に盛んに研究されている.

2.1. エキゾチックな4次元多様体と枠付き結び目

「全ての4次元多様体に対しそれとエキゾチックな (即ち同相だが微分同相でない) 4次元多様体が存在するか?」という問題は4次元トポロジーにおける主要テーマの一つである. ここではこの問題の対象を枠付き結び目で表示される4次元多様体に絞った場合を考える. なお枠付き結び目対が表示する2つの4次元多様体が (向きを保って) 同相ならば2つの枠は同じ整数である.

定義 2.1. 枠付き結び目対によって表示される2つの4次元多様体 (M_1, fr_1) と (M_2, fr_2) が互いにエキゾチックなとき, その枠付き結び目対を **エキゾチック** と呼ぶことにする.

本研究はJSPS 科研費・若手研究 (B) (課題番号: 16K17593) の助成を受けています.

* 〒739-8526 東広島市鏡山1丁目3番1号 広島大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: kyasui@hiroshima-u.ac.jp

全ての枠付き結び目がそれとエキゾチック対を成す枠付き結び目を持つわけではない。例えば0枠付き三葉結び目 (trefoil knot) はエキゾチック微分構造を持つ4次元多様体を表示するが、この枠付き結び目とエキゾチック対を成す枠付き結び目は存在しないことがデーモン手術の結果からわかる。

エキゾチックな枠付き結び目対の最初の例は Akbulut (cf. [3]) によって与えられ、さらに近年 Kalmár-Stipsicz によって無限組の枠付き結び目対に拡張された。

定理 2.2 (Akbulut [2], Akbulut-Matveyev [3], Kalmár-Stipsicz [10]). 枠付き結び目のエキゾチック対が無限組存在する。

これらの例の枠は全て -1 である (逆の向きを考えれば $+1$ の場合も得られる)。また各対の一方の4次元多様体が Stein 構造を持ち、他方の4次元多様体が Stein 構造を持たないので、4次元多様体が微分同相でないことを簡単に見分けられる例となっている (Stein 構造については第3節参照)。

これらの例は散発的なものであったが、筆者は全ての枠に対して組織的構成法を与え、次の結果を得た。

定理 2.3 ([20]). 任意の整数 n に対し、 n 枠付き結び目のエキゾチック対が無限組存在する。さらに各対が表示する4次元多様体の対は両方とも Stein 構造を持つように選べる。

この構成法を述べるために用語の準備をしておく。 S^3 の結び目 K と $S^1 \times D^2$ の結び目 P に対し、 S^3 の結び目 $P(K)$ を $f(P)$ で定める。但し写像 $f : S^1 \times D^2 \rightarrow N(K) (\subset S^3)$ は、 K の管状近傍 $N(K)$ の自明化であって、 K の0枠に対応するものとする。 P を S^3 の結び目 K に $P(K)$ を対応させる写像とみなしたとき、 P は **サテライト写像** と呼ばれる。

筆者はサテライト写像を用いてエキゾチック対の量産方法を与えた (下記の記号の定義は第3節参照)。

定理 2.4 ([20]). 任意の整数 n に対し、以下の条件をみたすサテライト写像 P_n, Q_n が存在する。 $n \leq \widehat{tb}(K)$ と $2g_4(K) = \overline{ad}(K) + 2$ をみたす S^3 の任意の結び目 K に対し、 n 枠付きの結び目 $P_n(K)$ と $Q_n(K)$ はエキゾチック対である。さらに $n \leq \widehat{tb}(K) - 1$ のとき、この対によって表示される4次元多様体は両方とも Stein 構造を許容する。

注意 2.5. 各整数 n に対し定理の仮定をみたす結び目 K は多数存在する (例えば適当なトーラス結び目)。さらに結び目 K が仮定をみたすとき、 $P_n(K)$ と $Q_n(K)$ もその仮定をみたす。従ってこの定理によりエキゾチックな枠付き結び目対が量産できる。特に定理 2.3 が従う。

この構成法は4次元多様体の手術であるコルクツイスト ([4]) の新しい表記方法を与えることによって得られた。定理の仮定の下で微分同相でないことは adjunction 不等式 (第3節参照) を用いて示した。なお各 n に対して定理の P_n と Q_n の例を無限組構成した。図1で挙げているのはそのうちの最も単純なものである。

ここでこの結果を別の視点から捉え直す。 S^3 の結び目 K とサテライト写像 P に対し、 n 枠付きの結び目 $P(K)$ によって表される4次元多様体を $P^{(n)}(K)$ と記すことにする。このとき $K \mapsto P^{(n)}(K)$ という対応により、 $P^{(n)}$ は結び目の集合から4次元多様体の集合への写像とみなせる。この写像 $P^{(n)}$ を **4次元 n 枠付きサテライト写像** と呼ぶことにする。2つの4次元 n 枠付きサテライト写像が滑らかに (位相的に) 同じであるとは、2つの写像が与える4次元多様体が常に微分同相 (同相) であるときをいう。

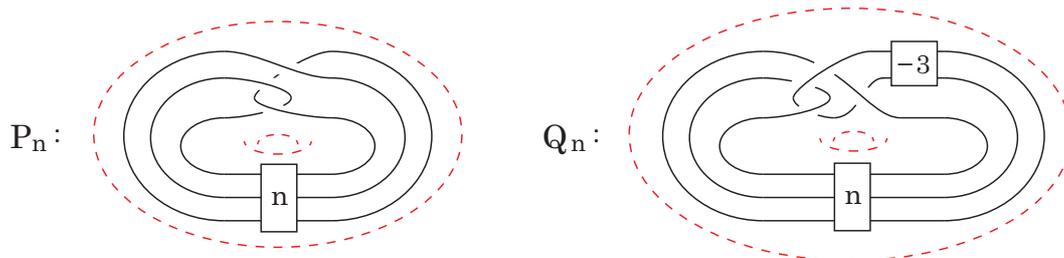


図 1: P_n と Q_n の例

定理 2.4 のサテライト写像により, 4次元の位相カテゴリーと滑らかカテゴリーの新しい違いがわかる.

定理 2.6 ([20]). 任意の整数 n に対し, 位相的には同じだが滑らかには違う 4次元 n 枠付きサテライト写像が存在する.

2.2. 結び目コンコードダンスへの応用

2つの有向結び目 K_0, K_1 がコンコードアントであるとは, 滑らかな埋め込み $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ であって, $f(S^1 \times i) = K_i$ ($i = 0, 1$) となるものが存在するときをいう. 結び目コンコードダンスは様々な手法を用いて活発に研究されている.

1978年に Akbulut と Kirby は次の予想を提出した (Kirby の問題集 [11] の問題 1.19).

予想 2.7 (Akbulut-Kirby). S^3 の 2つの結び目の 0 手術が同じ 3次元多様体ならば, それらの結び目は (適当な向きに関して) コンコードアントである.

実際いくつかのコンコードダンス不変量に対し, 2つの結び目の 0 手術が同じ 3次元多様体ならば適当な向きに関して不変量の値が一致することが知られている (cf. [11]). この予想に関する進展はあまりなかったが, 0 手術がホモロジー同境という弱い仮定のもとでは反例があることを, 近年になって Cochran-Franklin-Hedden-Horn が示した.

定理 2.8 (Cochran-Franklin-Hedden-Horn [5]). 0 手術で得られる 3次元多様体がホモロジー同境だがコンコードアントでない結び目の対が存在する.

安部氏と田神氏はこの予想を結び目理論で非常に有名な未解決問題であるスライス・リボン予想と関連づけた.

定理 2.9 (Abe-Tagami [1]). スライス・リボン予想が成立するならば Akbulut-Kirby 予想は成立しない.

筆者は Akbulut-Kirby 予想を否定的に解決した.

定理 2.10 ([20]). 0 手術が同じ 3次元多様体だがコンコードアントでない結び目の対が存在する. さらにそのような結び目の対は無数存在する.

実際, 定理 2.4 で得られる 0 枠付き結び目のエキゾチック対は全て反例となることがその証明から直ちにわかる. これらのうち最も単純なものが図 2 の結び目対である.

結び目のコンコードダンス不変量が 0 手術で得られる 3次元多様体の位相不変量を与えるか否かは自然な問題である. Cochran-Franklin-Hedden-Horn [5] はコンコードダンス不変量 τ と s ([17], [18]) が結び目の 0 手術で得られる 3次元多様体のホモロジー同境類の不変量にはならないことを示した. 上記の反例は彼らの結果を強めることができる.

系 2.11 ([20]). τ と s は結び目の 0 手術で得られる 3次元多様体の位相不変量ではない.

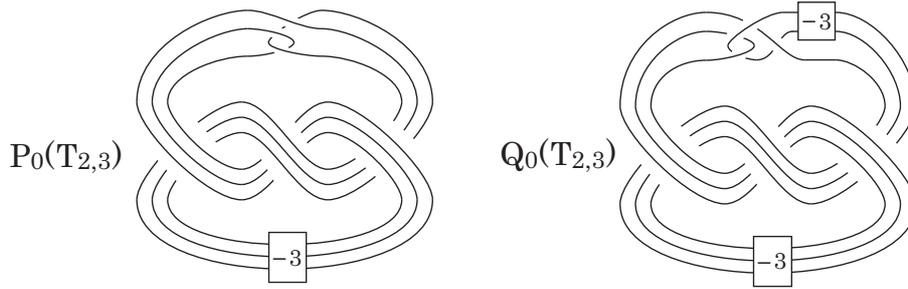


図 2: Akbulut-Kirby 予想の反例

3. 4次元 Stein 多様体

本節では様々な応用を持ち活発に研究されている4次元 Stein 多様体に関する基礎事項を4次元トポロジーの立場から簡単に紹介する. 詳細は [9], [16] を参照頂きたい.

3.1. 4次元 Stein 多様体の定義と性質

境界付きの実4次元多様体 X がコンパクト4次元 Stein 多様体であるとは, X が境界付きの複素2次元多様体であって, ある正則値 a に対して $\partial X = \varphi^{-1}(a)$ となる狭義多重劣調和関数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ を持つときを言う. コンパクト4次元 Stein 多様体はコンパクト Stein 曲面や Stein domain などと呼ばれることが多い. 本稿ではコンパクト4次元 Stein 多様体を単に **4次元 Stein 多様体** と呼ぶ. 4次元 Stein 多様体は境界付き4次元多様体の非常に広いクラスを与える.

4次元 Stein 多様体 X の境界の3次元多様体 M には X の複素構造 J から $\xi := TM \cap J(TM)$ によって自然に接触構造 ξ が定まる. このとき X は (M, ξ) の **Stein 充填** (Stein filling) と呼ばれる. 3次元接触多様体が **Stein 充填可能** (Stein fillable) であるとは, Stein 充填を持つ3次元接触多様体と接触同型になるときを言う.

4次元 Stein 多様体の微分構造には以下の強力な制約が成立する.

定理 3.1 (Lisca-Matić [13]. cf. [3], [14]). X を4次元 Stein 多様体とし, $[\Sigma] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ は X に滑らかに埋め込まれた種数 g の閉曲面 Σ で代表されているとする. $[\Sigma] \neq 0$ ならば次の **adjunction 不等式** が成立する.

$$|\langle c_1(X), [\Sigma] \rangle| + [\Sigma] \cdot [\Sigma] \leq 2g - 2.$$

3.2. ハンドル体による4次元 Stein 多様体の構成法

4次元 Stein 多様体はいくつかのトポジカルな方法を用いて簡単に構成できることが知られている. ここではハンドル体を用いた構成法を紹介する. 用語の準備をしておく. 0, 1ハンドルから成るハンドル体を **1ハンドル体** と呼び, 0, 1, 2ハンドルから成るハンドル体を **2ハンドル体** と呼ぶ. 3次元接触多様体 (M, ξ) の中の結び目 K が **Legendre 結び目** であるとは $TK \subset \xi$ となるときをいう. 2ハンドル体 X が **Stein ハンドル体** であるとは, X の各2ハンドル $D^2 \times D^2$ の接着円 $S^1 \times 0$ が X の部分1ハンドル体 $\natural_n S^1 \times D^3$ の境界 $\#_n S^1 \times S^2$ の標準的接触構造における Legendre 結び目であり, さらに接着円の枠が接触構造から定まる枠 (**接触枠**) より1小さいときをいう.

Eliashberg [6] の結果により (cf. Gompf [8]), Stein ハンドル体は D^4 の Stein 構造を各ハンドルへ拡張する Stein 構造を持ち, 逆に Stein 構造を持つ4次元多様体は Stein ハンドル体と微分同相である. 即ち, Stein 構造をもつ4次元多様体は Stein ハンドル体に

よって完全に特徴付けられている. $\#_n S^1 \times S^2$ の Legendre 絡み目を 1 ハンドル体の境界に図示する方法を Gompf [8] が与えているので, ハンドル体の図式によって Stein ハンドル体は簡単に構成できる.

3.3. Legendre 結び目と adjunction 不等式

ここでは Legendre 結び目から得られる adjunction 不等式を紹介する. まず用語を用意しておく. S^3 の標準的接触構造における Legendre 結び目を単に Legendre 結び目と呼ぶことにする. Legendre 結び目 \mathcal{K} の接触枠を \mathcal{K} の **Thurston-Bennequin 数** と呼び, $tb(\mathcal{K}) (\in \mathbb{Z})$ と記す. \mathcal{K} に向きを付けておくと, \mathcal{K} の **回転数** (rotation number) と呼ばれる整数が定まる. これを $r(\mathcal{K})$ と記す. なお $r(\mathcal{K})$ は \mathcal{K} の向きに応じて符号が変わるが, $tb(\mathcal{K})$ は \mathcal{K} の向きによらない. またこれらの値は \mathcal{K} の図から直ちに計算できる.

S^3 の結び目 K に対し, D^4 の中に滑らかに埋め込まれている曲面であって K を境界に持つものの最小種数 $g_4(K)$ を K の **4次元種数** と呼ぶ. また, n 枠付きの結び目 K によって表示される 4次元多様体を $K^{(n)}$ と記し, $H_2(K^{(n)}; \mathbb{Z}) (\cong \mathbb{Z})$ の生成元を代表する閉曲面の最小種数 $g_s^{(n)}(K)$ を K の **n 振動種数** (n -shake genus) と呼ぶ. 振動種数 $g_s^{(n)}(K)$ は 4次元多様体 $K^{(n)}$ の微分構造の不変量である. また全ての K, n に対し, $g_s^{(n)}(K) \leq g_4(K)$ が成立する.

Legendre 結び目 \mathcal{K} に対し, 4次元多様体 $\mathcal{K}^{tb(\mathcal{K})-1}$ は Stein 構造を持つので, Gompf [8] による Chern 類公式を adjunction 不等式に適用すると次の不等式が得られる.

定理 3.2 (Lisca-Matić [13]. cf. [3], [14]). $|r(\mathcal{K})| + tb(\mathcal{K}) - 1 \leq 2g_s^{(tb(\mathcal{K})-1)}(\mathcal{K}) - 2$.

この不等式の左辺 $tb(\mathcal{K}) - 1 + |r(\mathcal{K})|$ を $ad(\mathcal{K})$ と記し, \mathcal{K} の adjunction 数と呼ぶことにする. なおこの不等式の右辺の振動種数を 4次元種数に置き換えた不等式は slice-Bennequin 不等式と呼ばれる.

S^3 の Legendre 結び目 \mathcal{K} が結び目 K の **Legendre 表示** であるとは, \mathcal{K} が K と滑らかにアイソトピックであるときをいう. 結び目 K に対し, その Legendre 表示全体の集合を $\mathcal{L}(K)$ と記すことにする. S^3 の結び目 K に対し, その **最大 Thurston-Bennequin 数** $\overline{tb}(K)$ と **最大 adjunction 数** $\overline{ad}(K)$ を

$$\overline{tb}(K) = \max\{tb(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K)\}, \quad \overline{ad}(K) = \max\{ad(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K)\}.$$

と定める. また記号 $\widehat{tb}(K)$ を以下のように定める.

$$\widehat{tb}(K) = \max\{tb(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K), ad(\mathcal{K}) = \overline{ad}(K)\}.$$

Legendre 結び目の ‘stabilization’ による tb と r の変化から以下の系が従う.

系 3.3. S^3 の結び目 K と整数 n に対し, $n \leq \widehat{tb}(K) - 1$ ならば次の不等式が成立する.

$$\overline{ad}(K) \leq 2g_s^{(n)}(K) - 2.$$

4. 可縮 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題と結び目

与えられた 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題は一般に非常に難しい問題である. 本節ではコンパクト可縮 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題を結び目の最大 Thurston-Bennequin 数の問題と関係づける. なお前者は 4次元滑らかポアンカレ予想「 S^4 と同相な 4次元多様体は S^4 と微分同相である」と密接に関係する問題である.

4.1. 可縮 4 次元多様体上の Stein 構造の存在問題

Eliashberg による S^3 を境界に持つ Stein 多様体の一意性から, 4 次元滑らかポアンカレ予想は次のように言い換えられる.

事実 4.1. S^4 と同相な全ての 4 次元多様体が S^4 と微分同相であるためには, S^3 を境界に持つ全てのコンパクト可縮 4 次元多様体が Stein 構造を持つことが必要十分である.

そこで次の自然な一般化が興味深い. この問題が肯定的であれば 4 次元滑らかポアンカレ予想が成立することになる.

問題 4.2. 全てのコンパクト可縮 4 次元多様体は Stein 構造を持つか?

S^3 は Stein 充填可能なので, 境界が Stein 充填可能な場合が特に重要である.

問題 4.3. Stein 充填可能な境界を持つ全てのコンパクト可縮 4 次元多様体は Stein 構造を持つか?

注意 4.4. 閉 3 次元多様体が Stein 充填可能であるとは, その 3 次元多様体上に Stein 充填可能な接触構造が存在するときをいう. 例えばオープンブック分解による Stein 充填可能な 3 次元多様体の特徴付けが知られている. Stein 充填可能なクラスは非常に広く, そうでないものの方が珍しい.

4.2. 最大 Thurston-Bennequin 数と Stein 構造の存在問題

S^3 の枠付き結び目が表示する 4 次元多様体は, 枠がその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満であれば Stein 構造を持つ. しかしこの逆は未解決問題である.

問題 4.5. S^3 の枠付き結び目によって表される 4 次元多様体が Stein 構造を許容するならば, 枠はその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満か?

この問題が肯定的であれば Stein 構造存在の簡易な判定条件が得られる. なおこの問題は正トラス結び目など多数の結び目に対して肯定的である.

4.3. 2 つの問題の関係付け

筆者は問題 4.3 を否定的に解決するためのアプローチとして, 上記の 2 つの問題を以下のように関係づけた.

定理 4.6 ([21]). 問題 4.3 と問題 4.5 のいずれかの主張は成立しない. さらに一方の問題が成立すれば他方の問題に対する無限個の反例が存在する.

この結果は以下の枠付き結び目の例を構成することで得られる.

定理 4.7 ([21]). 以下の条件をみたす無限個の枠付き結び目が存在する.

- 各枠付き結び目が表示する 4 次元多様体は, Stein 充填可能な境界を持つ可縮 4 次元多様体と 4 次元 Stein 多様体との境界連結和である.
- 各枠付き結び目の枠は結び目の最大 Thurston-Bennequin 数以上である. (さらに各枠付き結び目は枠が最大 Thurston-Bennequin 数より任意に大きくなるように選べる.)

この枠付き結び目は図 3 の結び目 K_m の $(n, -1)$ ケーブル $C_{n,-1}(K_m)$ ($m \geq 0, n \geq 2$) に $(-n)$ 枠を付けたものである. なおこれらの結び目の最大 Thurston-Bennequin 数を

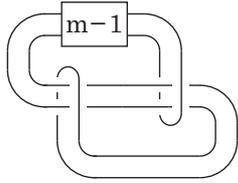


図 3: K_m

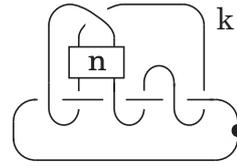


図 4: $X_{n,k}$

決定するために、適当な条件の下で最大 Thurston-Bennequin 数のケーブル化公式を与えた。これには Rutherford [19] による Legendre 結び目の ruling に関する結果を用いた。

この枠付き結び目によって表示される 4 次元多様体は図 4 の可縮 4 次元多様体 $X_{n,k}$ ($k = m + 4n$) を境界連結和成分に持つ。そこで次の予想を立てた (実際にはこの予想を元にして上記の枠付き結び目を構成した)。

予想 4.8 ([21]). $n \geq 2$, $k \geq 4n$ のとき, Stein 充填可能な境界を持つ可縮 4 次元多様体 $X_{n,k}$ は Stein 構造を持たない。

もし問題 4.5 の主張が成立すれば, この予想が成立することが定理 4.7 からわかる。

注意 4.9. Mark-Tosun のごく最近のプレプリント [15] によれば問題 4.3 の主張は成立しない。しかし彼らが用いた可縮 4 次元多様体は上の予想のものとは異なるため, この予想自体は未解決である。

5. 最大 Thurston-Bennequin 数と可約なデーン手術

本節では Stein ハンドル体を利用することで得られた, 最大 Thurston-Bennequin 数の下からの良い評価を得る方法を紹介する。さらに応用として, Legendre 手術の既約性に関する予想の反例を与える。

5.1. 最大 Thurston-Bennequin 数の評価

結び目の最大 Thurston-Bennequin 数 \bar{tb} は低次元トポロジーに様々な応用を持つ重要な不変量である。 \bar{tb} の上からの良い評価を与える不変量はいくつか知られているが, 結び目の交点数が多い場合, 下からの良い評価を与える Legendre 表示の構成は一般に非常に難しい問題である。また応用の際には上からよりも下からの良い評価を与える方が重要である。筆者は D^4 の Stein ハンドル分解を応用することにより, 適当な条件の下では最大 Thurston-Bennequin 数を実現するような Legendre 表示の構成法を与えた ([22])。この方法で得られる Legendre 結び目は一般に (その結び目の位相的複雑さと比べて) 極めて複雑であり, 既存の方法で最大 Thurston-Bennequin 数を決定するのが不可能に思われる例を量産することができる。

以下, この方法の概略を S^3 の結び目 K に対して述べる。但しここで説明する方法が常に適用可能であるとは限らない。なお一般に 2 ハンドル体 X の部分 1 ハンドル体 X_1 の境界 ∂X_1 の結び目 \tilde{K} は, X の 2 ハンドルを X_1 に接着することにより, ∂X の結び目とみなせることに注意しておく。

ステップ 1. D^4 と微分同相な 2 ハンドル体 X であって, K が部分 1 ハンドル体 X_1 の境界 ∂X_1 の「良い」結び目 \tilde{K} として表せるものを構成する。

ここで $\partial X_1 = \#_n S^1 \times S^2$ の結び目 \tilde{K} が「良い」とは, $\bar{tb}(\tilde{K})$ を実現する \tilde{K} の Legendre 表示の図が ∂X_1 に描ける場合を言う。例えばトーラス結び目は「良い」結び目である。

なお $\#_n S^1 \times S^2$ の結び目の \overline{tb} の定義については [22] を参照して頂きたい.

X の 2 ハンドルの接着円から定まる ∂X_1 の絡み目を L とする.

ステップ 2. \tilde{K} を ∂X_1 のアイトトピーで動かすことによって, $\overline{tb}(\tilde{K})$ を実現する \tilde{K} の Legendre 表示 $\tilde{\mathcal{K}}$ に変形する. このアイトトピーで L を変形した後に, $\tilde{\mathcal{K}}$ を固定したまま, アイトトピーで L をその Legendre 表示 \mathcal{L} に変形する. 但し X の各 2 ハンドルの枠が \mathcal{L} の接触枠よりちょうど 1 小さくなるような \mathcal{L} を選んでおく. このとき X は Stein ハンドル体である. 従って $\tilde{\mathcal{K}}$ は $\partial X \cong S^3$ の Legendre 結び目 \mathcal{K} とみなせる. 但し ∂X の接触構造は X の Stein 構造から誘導されるものである. S^3 の Stein 充填可能な接触構造は一意的なので ([7]), \mathcal{K} は S^3 の標準的接触構造に関する Legendre 結び目である. よって \mathcal{K} は K の Legendre 表示を与えている. (但し, このままでは \mathcal{K} は D^4 と微分同相な Stein ハンドル体の境界の Legendre 結び目であり, ‘front diagram’ では図示できていない. front diagram で図示するには X の 1 ハンドルを全て消去する必要がある.)

一般にこの方法で得られた Legendre 表示 \mathcal{K} は極めて複雑であり, $\overline{tb}(K)$ の下からの良い評価を与える. ここで \mathcal{K} が $\overline{tb}(K)$ を実現しているための簡単な十分条件を述べる. \tilde{K} が X_1 の中に埋め込まれている種数 g の曲面の境界であり, $2g - 1 = tb(\tilde{K})$ をみたまならば, adjunction 不等式により $\overline{tb}(K) = tb(\mathcal{K})$ が従う. 例えば \tilde{K} が ∂X_1 の正トーラス結び目のときはこの条件をみたま. もちろん $\overline{tb}(K)$ を実現しているか調べるには他の上からの評価を用いてもよい.

5.2. 可約な Legendre 手術

ここでは上記の方法を用いて Legendre 手術に関する応用を与える. デーン手術によって可約な 3 次元多様体を生じる枠付き結び目の特徴付けは 3 次元トポロジーにおける重要な未解決問題であり, これまでに様々な研究がなされている. Lidman-Sivek はこの問題に対して接触トポロジーを用いた新しいアプローチを最近与えた. ここで必要な定義を復習しておく. S^3 の Legendre 結び目 \mathcal{K} に沿った Legendre 手術とは, 係数が $tb(\mathcal{K}) - 1$ の \mathcal{K} に沿ったデーン手術のことである. S^3 の結び目 K に対し, $\overline{tb}(K)$ 未満の整数係数のデーン手術は, K のある Legendre 表示 \mathcal{K} に沿った Legendre 手術として実現できることに注意しておく. Lidman-Sivek は次の結果を与えた.

定理 5.1 (Lidman-Sivek [12]). S^3 の結び目 K が $\overline{tb}(K) \geq 0$ をみたまならば, K の Legendre 手術で得られる 3 次元多様体は全て既約である.

さらに彼らはこの結果が \overline{tb} に関する条件無しで成立すると予想した.

予想 5.2 (Lidman-Sivek [12]). S^3 の任意の結び目は Legendre 手術によって可約な 3 次元多様体を生まない.

なおこの予想は以下の肯定的証拠を持つ. ケーブル予想が正しければ, 結び目のデーン手術で可約な 3 次元多様体を得られるのは結び目が (p, q) ケーブル結び目で手術係数が pq の場合に限るが, 標準的構成法で得られるケーブル結び目の Legendre 表示の tb は pq 以下である.

筆者は前述の Legendre 表示の構成法を用いることでこの予想を否定的に解決した.

定理 5.3 ([22]). Legendre 手術によって可約な 3 次元多様体を生む S^3 の結び目が無限個存在する. さらに, これらの各結び目 K は可約 Legendre 手術の手術係数が $\overline{tb}(K)$ より任意に小さくなるように選べる.

例えば $n \geq 2$, $m \leq -4n + 3$ のとき, 4.3 節のケーブル結び目 $C_{n,-1}(K_m)$ が反例となっている. 実際, 係数が $-n$ のデーン手術は可約な 3 次元多様体を与えるが, 図 5 の複雑な Legendre 表示 (図 6 も参照) から $\bar{tb} = -1$ となることがわかるので, この手術は Legendre 手術として実現できる. なおこの図は前述の方法で得られたものである. 一方, 図 7 の Legendre 表示はケーブル化による標準的な方法で得たものであるが, ライデマイスター移動でこの図を改良することによって $\bar{tb} = -1$ を実現する表示を得るのは (理論上は可能だが) 筆者にはほぼ不可能に思える.

なお前述の Legendre 表示の構成法を用いることにより, 非常に多くの反例を組織的に構成することができる. 詳しくは [22] の Remark 4.3 を参照して頂きたい.

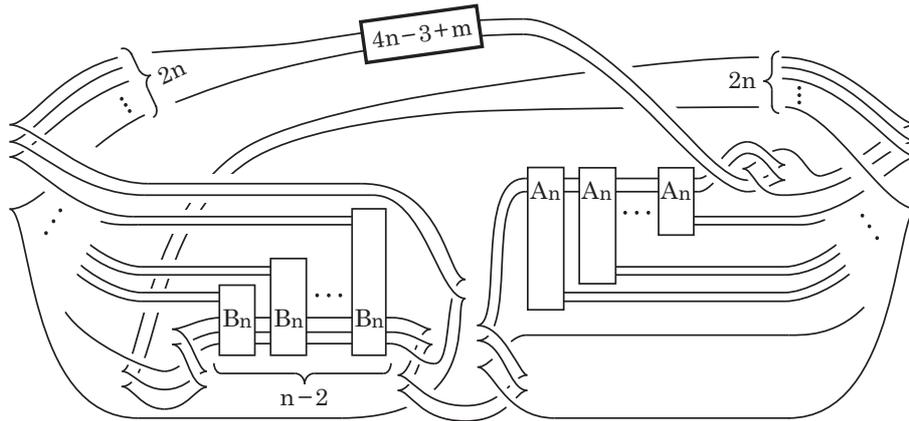


図 5: $\bar{tb} = -1$ を実現する $C_{n,-1}(K_m)$ の Legendre 表示 ($n \geq 2$, $m \leq -4n + 3$)

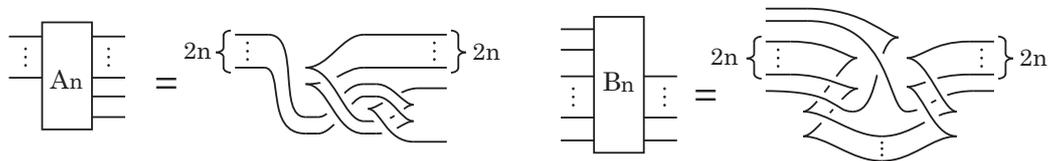


図 6: 図 5 で用いたタングル A_n と B_n

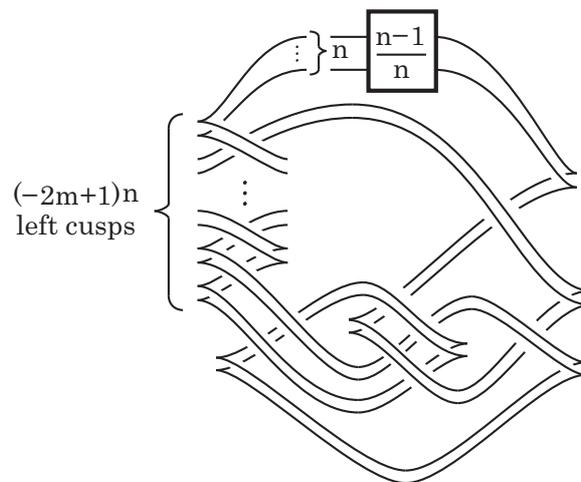


図 7: $tb = -2n + 1$ となる $C_{n,-1}(K_m)$ の Legendre 表示 ($n \geq 2$, $m \leq -1$)

参考文献

- [1] T. Abe and K. Tagami, *Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture*, arXiv:1502.01102.
- [2] S. Akbulut, *An exotic 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 357–361.
- [3] S. Akbulut and R. Matveyev, *Exotic structures and adjunction inequality*, Turkish J. Math. **21** (1997), no. 1, 47–53.
- [4] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, Plugs and exotic structures*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **2** (2008), 40–82.
- [5] T. D. Cochran, B. D. Franklin, M. Hedden, and P. D. Horn, *Knot concordance and homology cobordism*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 2193–2208.
- [6] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , International J. of Math. Vol. 1 (1990), No 1 pp. 29-46.
- [7] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 1-2, 165–192.
- [8] R. E. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [9] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20**. American Mathematical Society, 1999.
- [10] B. Kalmár and A. I. Stipsicz, *Singular maps on exotic 4-manifold pairs*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), no. 3, 1709–1731.
- [11] R. Kirby, editor, *Problems in low-dimensional topology*, from: “Geometric topology (Athens, GA, 1993)”, AMS/IP Stud. Adv. Math. **2**, Amer. Math. Soc. (1997) 35–473.
- [12] T. Lidman and S. Sivek, *Contact structures and reducible surgeries*, Compos. Math. **152** (2016), no. 1, 152–186.
- [13] P. Lisca and G. Matić, *Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants*, Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 509–525.
- [14] P. Lisca and G. Matić, *Stein 4-manifolds with boundary and contact structures*, Topology Appl. **88** (1998), no. 1–2, 55–66.
- [15] T. E. Mark and B. Tosun, *Obstructing pseudoconvex embeddings and contractible Stein fillings for Brieskorn spheres*, arXiv:1603.07710.
- [16] B. Ozbagci and A. I. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Society Mathematical Studies, **13**. Springer-Verlag, Berlin; Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest, 2004.
- [17] P. Ozsvath and Z. Szabo, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geom. Topol. **7** (2003), 615–639.
- [18] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent. Math. **182** (2010), no. 2, 419–447.
- [19] D. Rutherford, *Thurston-Bennequin number, Kauffman polynomial, and ruling invariants of a Legendrian link: the Fuchs conjecture and beyond*, Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 78591, 15 pp.
- [20] K. Yasui, *Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance*, arXiv:1505.02551.
- [21] K. Yasui, *Nonexistence of Stein structures on 4-manifolds and maximal Thurston-Bennequin numbers*, arXiv:1508.01491, to appear in J. Symplectic Geom.
- [22] K. Yasui, *Maximal Thurston-Bennequin number and reducible Legendrian surgery*, arXiv:1508.05615, to appear in Compos. Math.