写像類群上のランダムウォーク

正井　秀俊　(東京大学，日本学術振興会特別研究員 PD)*

曲面 S の写像類群 $\mathrm{MCG}(S)$ の上のランダムウォークを考える．ランダムウォークにより “ランダム” に写像類を生成することができる．もう少し正確に言うと，ランダムに複雑さを増していく写像類の列を得ることができる（写像類群の任意の元が等確率で生成されるような枠組みではないことに注意する）．これにより，写像類群の統計的な情報を研究することができる．また，写像類から写像トーラスや Heegaard 分解を考えることにより，３次元多様体を生成することもでき，複雑さを増していく３次元多様体の列をランダムウォークから得ることができる．本予稿ではまず，群の上のランダムウォークについて，定義を与える．その後，写像類群上のランダムウォークについて知られている事実をいくつか紹介する．

1. 群上のランダムウォーク

1.1. 定義

離散群 G を考える．群の上でのランダムウォークを考えることは，無限列の集合である $G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ の上の確率測度を考えることである．確率測度は，標本空間と可測集合全体の集合である σ-代数に対して定義されることを思い出す（例えば [舟木] を参照のこと）．まず，今回考える σ-代数の生成系となるシリンダー集合を定義する．群の元 $x_1, \ldots, x_n \in G$ によって与えられるシリンダー集合 $[x_1, \ldots, x_n]$ は次のように与えられる．

$$[x_1, \ldots, x_n] := \{\omega = (\omega_i) \in G^{\mathbb{Z}_{>0}} \mid \omega_i = x_i \text{ for } 1 \leq i \leq n\}.$$

シリンダー集合全体で生成される σ-代数を $\mathcal{B}$ と書く．この $\mathcal{B}$ は，G に離散位相を与え，$G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に直積位相を与えた際の，ボレル集合族と一致する．

確率測度 $\mu : G \to [0,1]$ とは，ここでは単に $\sum_{g \in G} \mu(g) = 1$ を満たす写像である．Kolmogorov 拡張定理（[舟木] の７章など）により，確率測度 μ は $G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 上の $\mathcal{B}$ に関する確率測度 $\mathbb{P}$ をただ一つ定める．確率測度 $\mathbb{P}$ はシリンダー $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対して，

$$\mathbb{P}([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \mu(x_1)\mu(x_1^{-1}x_2) \cdots \mu(x_{n-1}^{-1}x_n)$$

となる．この確率は群の単位元から出発したランダムウォークが，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ と順番に通っていく確率である．確率測度 μ は遷移確率と呼ばれる．この μ を “サイコロ” とみなし，μ で得られた新しい元を右からかけていくことで，今回考えているランダムウォークが得られる．群 G の有限生成集合 A 上の一様測度が μ の例である．その場合はランダムウォークは Cayley グラフ上のランダムウォークとなる．群やグラフの上のランダムウォークの様々な話題に関しては [Wo] など参照されたい．

本研究は科研費（課題番号：15J08142）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 57M60, 37B40
キーワード：写像類群，ランダムウォーク
* 〒153-8914，　東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: masai@ms.u-tokyo.ac.jp

1.2. 群作用と有限一次モーメント

群Gが連結距離空間(X, d_X)に等長に作用しているとする．元$g \in G$の*translation*距離$\tau(g)$とは$x \in X$に対し，

$$\tau(g) := \lim_{n \to \infty} \frac{d_X(x, g^n x)}{n}$$

と定義される量である（三角不等式によりこの量は$x \in X$によらない）．

確率測度μがd_Xに関して有限一次モーメントを持つとは，任意の$x \in X$に対して

$$\sum_{g \in G} \mu(g) d_X(x, gx) < \infty$$

となることを言う．Kingman の劣加法的エルゴード定理 (Kingman's subadditive ergodic theorem) により，μが有限一次モーメントを持つ場合，$\mathbb{P}$-a.e. $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{Z}_{>0}}$に対して，極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_X(x, \omega_n x)}{n}$$

が存在し，その値はx，ωによらないことがわかる．この値をランダムウォークのd_Xに関するドリフトと呼ぶ．ドリフトはランダムウォークの translation 距離とみなすことができる．

また，群Gが空間Yに作用している時，Y上の測度νが*μ-stationary*であるとは，任意の可測集合Aに対して

$$\nu(A) = \sum_{g \in G} \mu(g) \nu(g^{-1} A)$$

が成り立つことをいう．μ-stationary 測度は*harmonic*測度ともよばれる．

2. 曲線複体と Teichmüller 空間

ここでは有限型の曲面S，すなわち種数gの閉曲面からn個の点を取り除いた曲面を考える．以降$3g-3+n > 0$を仮定する．曲面Sの写像類群$\mathrm{MCG}(S) := \mathrm{Homeo}^+(S)/\mathrm{homotopy}$を考える．群の性質を研究する際に，群が等長に作用する良い空間を見つけることは非常に有効であることが知られている（幾何学的群論）．写像類群が作用する良い空間として，曲線複体やTeichmüller空間などがある．特に曲線複体は，写像類群の "双曲性" をとらえるにあたり重要な空間である．本節では，曲線複体と Teichmüller 空間について概説する．

2.1. 曲線複体

曲面の上の自己交差を持たない閉曲線を単純閉曲線という．単純閉曲線は 1 点もしくは取り除いたn個の点の一つにホモトピックでないとき本質的という．以降，単純閉曲線は自由ホモトピー類を指すこととする．曲面Sの曲線複体$\mathcal{C}(S)$は，各頂点が本質的単純閉曲線に対応し，k個の頂点は対応する閉曲線が交差を持たない形で曲面上で実現できるとき，k次元の単体を貼るという条件で定義される複体である．空間は「すべての 3 角形が細い」とき*Gromov*双曲的と呼ばれる（詳しい定義は [BH, Bow1] などを参照されたい）．次の Masur-Minsky の結果は様々な応用が知られる重要なものである．

定理 2.1 ([MM1])**.** 有限型の曲面Sの曲線複体$\mathcal{C}(S)$は Gromov 双曲的である．

群に対しても，有限生成系を固定し Cayley グラフを考えることで，Gromov 双曲性が議論できる．写像類群 $\mathrm{MCG}(S)$ は Gromov 双曲的ではないことが知られている．しかしながら，曲線複体への作用から写像類群 $\mathrm{MCG}(S)$ の "双曲性" を抽出することができる．写像類群上のランダムウォークの様々な結果は，Gromov 双曲群のランダムウォークについて知られている事実を曲線複体への作用を用いて写像類群に拡張する，という形で得られている（例えば[MT]）．本予稿では双曲群上のランダムウォークについては触れないが，Calegari による双曲群の定義を含めたサーベイ論文がある [Cal]．また，曲線複体は局所無限であるため議論に困難が生じる場合があることに注意する．この局所無限性から生まれる困難を回避する様々な試み（hierarchy [MM2], acylindricity[Bow2] など）が成功していることをコメントしておく．

2.2. Teichmüller 空間

Teichmüller 空間の正確な定義は [FLP, FM, IT] などに譲ることにし，ここでは簡単な説明をすることにとどめる．まず X をリーマン面もしくは双曲曲面であるとする（一意化定理，等温座標の理論を用いることにより曲面の上では複素構造と双曲構造は 1 対 1 に対応することに注意する．[IT] などを参照のこと）．同相写像 $f : S \to X$ により，S 上に複素構造，もしくは双曲構造を定義することができる．これを標識付き複素または双曲構造という．Teichmüller 空間は曲面 S 上の標識付き複素構造，もしくは双曲構造全体を適切な同値関係で割った空間である．Teichmüller 空間には写像類群が標識の取り換えとして作用している．Teichmüller 空間には様々な距離が定義されているが，今回は次の二つの距離を考える．

- Teichmüller 距離 $d_{\mathcal{T}}$（複素構造の変形の度合いを測る），
- Thurston の非対称距離 d_a（双曲構造の変形の度合いを測る）．

この二つの距離の様々な比較をまとめた Papadopoulos-Théret [PT] などの文献がある．二つの距離は完全には一致しないが，Teichmüller 空間の "太い" 部分では有限の誤差を除いて一致することが Choi-Rafi により示されている [CR]．[CR] の系として次の命題が成り立つ．

命題 2.2. 確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0, 1]$ について次は同値．

- Teichmüller 距離 $d_{\mathcal{T}}$ について有限一次モーメントを持つ．
- Thurston の非対称距離 d_a について有限一次モーメントを持つ．

さらに，$d_{\mathcal{T}}$ についてのドリフトと d_a についてのドリフトも一致する．

Teichmüller 空間のコンパクト化を次のように与える．測度付き葉層とは曲面 S 上の葉層 $\mathcal{F}$ で有限個の特異点を持つものに，横断的測度 μ を与えたものである．実際には，各本質的単純閉曲線 α に対して値 $\inf\{\mu(a) \mid a \text{ は } \alpha \text{ の表現}\}$ を返す $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{>0}$ の元としてとらえ，適切な同値関係を与えたものを考える．ここで $\mathcal{S}(= \mathcal{C}^0(S))$ は本質的単純閉曲線全体の集合である．詳しくは上で挙げた文献 [FLP, FM, IT] を参照していただきたい．測度付き葉層全体の空間を $\mathcal{MF}(S)$ と書き，測度を正の実数倍するという作用で射影化した空間を $\mathcal{PMF}(S)$ と書く．$\mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{>0}$ の射影化を考えることにより，Thurston は Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(S)$ を $\mathcal{PMF}(S)$ を用いてコンパクト化し，写像類群の作用が連続に拡張するこ

とを示した．これをThurston コンパクト化といい$\bar{\mathcal{T}}(S) := \mathcal{T}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$とする．$\mathcal{PMF}(S)$の元$(\mathcal{F}, \mu)$は$\mathcal{MF}(S)$の元として，もし同じ葉層を持つ$(\mathcal{F}, \mu') \in \mathcal{MF}(S)$があったとき，必ず$\mu = t\mu'$がある$t \in \mathbb{R}_{>0}$に対して成り立つとき，*uniquely ergodic* という．$\mathcal{UE}(S) \subset \mathcal{PMF}(S)$をuniquely ergodic な葉層全体の集合とする．写像類群同様Teichmüller 空間はGromov双曲的ではないが，双曲空間と様々な類似が成り立つことが知られている ([Raf] など)．双曲空間の理想境界とThurston コンパクト化の境界としての$\mathcal{PMF}(S)$を比べたとき，特に良い類似が見られるのが$\mathcal{UE}(S)$である．

3. Nielsen-Thurston 分類

写像類ϕはNielsen-Thurston 分類により

1. 周期的（$\exists n \neq 0$ s.t. $\phi^n = \mathrm{id}$），
2. 既約（$\exists \Omega \subset S$ 1-submanifold s.t. $\phi(\Omega) = \Omega$），
3. 擬アノソフ（$\exists (\mathcal{F}_s, \mu_s), (\mathcal{F}_u, \mu_u) \in \mathcal{MF}(S), \exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ s.t. $\phi(\mathcal{F}_s, \mu_s) = (\mathcal{F}_s, \mu_s/\lambda)$ かつ $\phi(\mathcal{F}_u, \mu_u) = (\mathcal{F}_u, \lambda\mu_u)$）

のいずれかとホモトピックである事が知られている（[Thu2, FLP, FM] など）．擬アノソフの$\mathcal{F}_s$を安定葉層，$\mathcal{F}_u$を不安定葉層と呼ぶ．これらは$\mathcal{PMF}(S)$の元として擬アノソフϕで固定されており，$\mathrm{Fix}(\phi) = \{\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_u\}$が$\mathcal{PMF}(S)$で成り立つ．また，$\mathcal{F}_s$と$\mathcal{F}_u$はuniquely ergodic であることも知られている．Thurston コンパクト化の言葉で擬アノソフ ϕの安定葉層$\mathcal{F}_s$は次のように特徴づけられる．任意の$X(\neq \mathcal{F}_u) \in \bar{\mathcal{T}}(S)$に対して，$\bar{\mathcal{T}}(S)$の元として

$$\lim_{n \to \infty} \phi^n X = \mathcal{F}_s.$$

同様に，$X(\neq \mathcal{F}_s) \in \bar{\mathcal{T}}(S)$の極限$\phi^{-n}(X)$は$\mathcal{F}_u$に収束する．

写像$\phi : S \to S$に対して写像トーラスは

$$S \times [0, 1]/(\phi(x), 0) \sim (x, 1)$$

として定義される．擬アノソフは写像トーラスが双曲構造をもつことと同値であることがThurston [Thu1] によって示されている．

擬アノソフの定義に現れるλ を擬アノソフの *dilatation* と呼ぶ．このdilatation は様々な特徴づけができる．その例としてThurston とBers の定理をあげる．

定理 3.1 (Thurston,[FLP] 参照)**.** 写像類ϕ をdilatation λを持つ 擬アノソフであるとする．任意の本質的単純閉曲線αと計量ρ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(l_\rho(\phi^n(\alpha)))}{n} = \log \lambda$$

が成り立つ．ここで，l_ρ はρ に関するα の長さである．

定理 3.2 ([Ber])**.** 写像類ϕ をdilatation λを持つ擬アノソフであるとする．擬アノソフϕのTeichmüller距離に関するtranslation 距離は$\log \lambda$と一致する．

4. 写像類群上のランダムウォーク

写像類群の部分群 $H < \mathrm{MCG}(S)$ が non-elementary であるとは，擬アノソフ写像 $\phi_1, \phi_2 \in H$ で $\mathrm{Fix}(\phi_1) \cap \mathrm{Fix}(\phi_2) = \emptyset$ となるものが存在することをいう.

以降，確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ で次のいずれかの条件を満たすものを考える.

条件 4.1. 確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ は

- Teichmüller 空間上の Teichmüller 距離に関して有限一次モーメントを持つ，
- 台によって生成される群 $\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle$ は non-elementary である.

条件 4.2. 確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ は

- 台は有限個の元からなる.
- 台によって生成される群 $\langle \mathrm{supp}(\mu) \rangle$ は non-elementary である.

ここで条件 4.2 は条件 4.1 よりも強い条件であることに注意する．漸近挙動の収束に関する定理（Kingman の劣加法的エルゴード定理など）が条件 4.1 のもとで成り立つ．条件 4.2 を仮定することで，収束が指数的であることが証明できることが多々ある．その例として，次の Maher による結果がある.

定理 4.3 ([Mah3, Mah4]). 確率測度 μ は台が生成する部分群が non-elementary であると仮定する．この時,

$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S) \mid \omega_n \text{は擬アノソフ}) \to 1$$

が成り立つ．さらに，確率測度 μ が条件 4.2 を満たす場合，μ にのみに依存する $K > 0, c < 1$ が存在し

$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S) \mid \omega_n \text{は擬アノソフ}) \geq 1 - Kc^n$$

が成り立つ.

定理 4.3 をはじめとした，様々な定理を示す基本的な道具となっている Kaimanovich-Masur の結果を紹介する.

定理 4.4 ([KM]). 確率測度 μ は台が生成する部分群が non-elementary であると仮定する．このとき次が成り立つ.

(1) $\mathbb{P}$-a.e. $\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して，極限

$$F(\omega) := \lim_{n\to\infty} \omega_n X$$

が存在し，$F(\omega)$ は uniquely ergodic となる.

(2) ある μ-stationary 測度 ν が存在し，$F(\omega)$ の分布は ν で与えられる．さらにこの ν は原子を持たない.

定理4.4の(1)は擬アノソフで成り立っている事実の，ランダムウォーク版とみなすことができる．定理4.4の(1)より，(2)の測度νは$\mathcal{UE}(S)$でのみ値をとることがわかる．$\mathcal{UE}(S)$はKlarreich[Kla]により曲線複体$\mathcal{C}(S)$のGromov 境界 $\partial\mathcal{C}(S)$の部分集合としてみることもできる．そのため，(2)の測度νは$\partial\mathcal{C}(S)$の上で定義されているとみなすこともできる．写像類群の曲線複体への作用により，写像類群上のランダムウォークから曲線複体上のランダムウォークを得ることができ，$\partial\mathcal{C}(S)$上の測度νとの相性が良く，様々な結果が得られている．

5. ランダム写像類の性質

ここでは，写像類群上のランダムウォークが漸近的に確率1で持つ性質として知られているものをまとめる．すべてを網羅しているわけではなく，また多くは条件4.1か4.2の下で成り立つが，細かい条件が必要な場合もある．詳しくは参照されている文献をご覧いただきたい．

ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率1で

- 擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ[Kow, Mah3, Mah4, Riv1]，
- Heegaard 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ[Mah1, LMW]，
- １つ穴あき曲面の場合，写像トーラスが例外的手術をもたない，[Riv2]，
- オープンブックとして得られる多様体が双曲構造を持つ[Ito]，
- 他の写像類のベキとならない，有限被覆に関する持ち上げにならない[Masa1]，
- 写像トーラスが非算術的となる，写像トーラスの対称群が自明となる[Masa1]．

ブレイド群は穴あき円盤の写像類群とみなすことができる．ブレイド群に対しては，閉包が双曲絡み目になる[Ma, Ito]，ブリッジ分解として得られる絡み目が双曲構造を持つ[IM]ことなどが知られている．

次に，ランダムウォークのステップ数に対して真に線形に増大することが知られている量をまとめる．同様に細かい条件などは文献に譲ることとする．

- 曲線複体の上のドリフト[Mah2]，パンツ複体， Teichmüller距離，Thurston 距離に関するドリフト，
- 曲線複体の上の translation 距離 [MT]，
- 擬アノソフとしてのdilatation [DH]．

また，次の量の増大度の評価も得られている

- 写像トーラスの双曲体積（パンツ複体の上のドリフトが正になることと，Brockの結果[Bro1, Bro2]をあわせる）
- 安定交換子長（scl） [CM]．

6. 写像類群上のランダムウォークの力学系

この節では [Masa2] の結果を説明する．一言で述べると，擬アノソフについて成り立っている幾つかの力学系に関する事実が，ランダムウォークに対しても成り立つ，という結果である．まず，擬アノソフのトポロジカルエントロピーが dilatation と一致するという Thurston の結果を復習する．ここからは，曲面 S は閉曲面であり，とくにコンパクトであると仮定する．$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}, \mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ を S の開被覆とする．このとき

$$N(\mathcal{A}) := \min\{n \mid \{A_1, \ldots, A_n\}\text{ は }S\text{ の開被覆}, \text{各 }1 \le i \le n\text{ に対して }A_i \in \mathcal{A}\}$$

とする．また $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \{A_i \cap B_j\}_{i\in I, j\in J}$ とする．次のトポロジカルエントロピーは任意のコンパクト空間の上の連続写像について同様に定義される．

定義 6.1 (トポロジカルエントロピー,[AKM])**.** 写像 $f : S \to S$ を閉曲面 S 上の同相写像とする．開被覆 $\mathcal{A}$ に対して，

$$h(f, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee f^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\mathcal{A})$$

とする．このとき，f のトポロジカルエントロピー $h(f)$ を

$$h(f) := \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A})$$

と定義する．ここで sup は S のすべての開被覆に対してとる．

さらに，写像類 $\phi \in \mathrm{MCG}(S)$ に対しては，

$$h(\phi) := \inf_{f\in\phi} h(f)$$

と定義する．

定義に含まれる極限の収束は簡単な練習問題である．

定理 6.2 (Thurston, c.f. [FLP])**.** 写像類 $\phi \in \mathrm{MCG}(S)$ が dilatation λ をもつ擬アノソフであるとき，

$$h(\phi) = \log \lambda.$$

論文 [Masa2] では，定義 6.1 を次のようにランダムウォークに対して定義し直した．

定義 6.3 (ランダムウォークのトポロジカルエントロピー)**.** 写像類の列 $\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ の表現 $\mathbf{w} = (w_n) \in \mathrm{Homeo}^+(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ が与えられたとする．すなわち w_n は ω_n の表現である．このとき，開被覆 $\mathcal{A}$ に対して，

$$h(\mathbf{w}, \mathcal{A}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee w_1\mathcal{A} \vee \cdots \vee w_{n-1}\mathcal{A})$$

とする．このとき，$\mathbf{w}$ のトポロジカルエントロピー $h(\mathbf{w})$ を

$$h(\mathbf{w}) := \sup_{\mathcal{A}} h(\mathbf{w}, \mathcal{A})$$

と定義する．ここで sup は S のすべての開被覆に対してとる．写像類の列 ω のトポロジカルエントロピーは

$$h(\omega) := \inf_{\mathbf{w}} h(\mathbf{w})$$

と定義する．ここで inf は ω の表現全体でとる．

いくつか注意を与える．まず，写像のベキのときと異なり，ランダムウォークのときは逆写像を取っていない．これは，ランダムウォークが新しい元を「右から」かけていることに起因している．また，ランダムウォークの場合，定義に出てくる極限の存在は（容易には）得られない．表現を取る必要がなければ，Kingman の劣加法的エルゴード定理が極限の存在を保証するが，表現を取った後は，様々なエルゴード定理が使えなくなる．これは，次のように定義される Bernoulli シフト θ が，表現を取ることと相性が悪いことに起因する．元 $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して，$\theta(\omega) = (\omega_1^{-1}\omega_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ として θ は定義される．定義より $\theta^i\omega = (\omega_i^{-1}\omega_{n+i})_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ となる．この Bernoulli シフト θ はエルゴード的となり，表現を取る必要のない状況では様々なエルゴード定理が用いられている．

定理 6.4 ([Masa2])**.** 確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ が条件 4.1 を満たすとする．このとき，$\mathbb{P}$-a.e $\omega \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して，

$$h(\omega) = L$$

が成り立つ．ここで L は Teichmüller 距離 $d_{\mathcal{T}}$ に関するドリフトである．

次の Karlsson による先行研究によりドリフト L は次のように特徴づけることもできる．

定理 6.5 ([Kar])**.** 確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ が条件 4.1 を満たすとする．このとき，任意の単純閉曲線 α，計量 ρ と $\mathbb{P}$-a.e. $\omega = (\omega_n)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log l_\rho(\omega_n^{-1}\alpha) = L$$

が成り立つ．

定理 6.4 と定理 6.5 は定理 6.2，定理 3.1，定理 3.2 をあわせたものランダムウォーク版としてみることができる．

7. おわりに

ランダムウォークを考えることで，写像類，３次元多様体，絡み目などの性質 P や不変量 V があったとき，容易に次のように問題設定をすることができる．

問題 7.1. 適切な条件を満たす確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ の下，

- 確率
$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}} \mid \omega_n \text{は性質 } P \text{ をもつ})$$
が $n \to \infty$ としたとき，どのように振る舞うか．

- 極限
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n \text{に対する } V \text{ の値}}{F(n)}$$
を求める．ここで $F(n)$ は n の関数である．

また，Lubotzky-Maher-Wu [LMW] ではランダムウォークを使って，ある性質を満たす多様体の無限個の例の存在が示されており，この方向への研究も考えられる．

参考文献

[AKM] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew. *Topological entropy.* Transactions of the American Mathematical Society 114 (2): 309-319.

[Ber] L. Bers, *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*, Acta. Math., 141 (1978), 73-98.

[BH] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Vol. 319. Springer, 1999.

[Bro1] J. Brock, *The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores*, J. Amer. Math. Soc., 16 (2003), pp. 495-535.

[Bro2] J. Brock, *Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori*, Comm. Anal. Geom., 11 (2003), 987-999.

[Bow1] B. Bowditch, *A course on geometric group theory*, MSJ Memoirs 16, 2006.

[Bow2] B. Bowditch, *Tight geodesics in the curve complex*, Invent. Math. 171(2) (2008), 281-300.

[Cal] D. Calegari, *The ergodic theory of hyperbolic groups.* Geometry and topology down under, Contemp. Math 597 (2013): 15-52.

[CM] D. Calegari and J. Maher, *Statistics and compression of scl*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2010): 1-47. arXiv:1008.4952.

[CR] Y. Choi and K. Rafi. *Comparison between Teichmüller and Lipschitz metrics.* J. Lond. Math. Soc. (2), 76(3):739-756, 2007. math.GT/0510136.

[DH] F. Dahmani and C. Horbez, *Spectral theorems for random walks on mapping class groups and* $\mathrm{Out}(F_N)$, arXiv:1506.06790.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru et al., *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66-67, Société Mathématique de France, 1979.

[舟木] 舟木 直久, 確率論，講座数学の考え方 (20), 朝倉書店, 2004.

[FM] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*, Princeton University Press, 2011.

[Gad] V. Gadre, *Harmonic measures for distributions with finite support on the mapping class group are singular*, to appear in Duke Math. J., arXiv:0911.2891.

[IM] K. Ichihara and J. Ma, *A random link via bridge position is hyperbolic*, preprint, arXiv:1605.07267.

[IT] 今吉洋一，谷口雅彦，タイヒミュラー空間論，新版，日本評論社 (2004).

[Ito] T. Ito *On a structure of random open books and closed braids*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 91 (2015), 160–162.

[KM] V. Kaimanovich and H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Invent. Math. 125 (1996) 221-264.

[Kar] A. Karlsson, *Two extensions of Thurston's spectral theorem for surface diffeomorphisms*, Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014), no. 2, 217-226.

[Kla] E. Klarreich, *The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space*, preprint.

[Kow] E. Kowalski, *The large sieve and its applications, Arithmetic geometry, random walks and discrete groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 175 (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

[LMW] A. Lubotzky, J. Maher and C. Wu, *Random methods in 3-manifold theory*, Proc. Steklov Inst. Math. 2016, Vol. 292, 118-142, arXiv:1405.6410.

[Ma] J. Ma, *The closure of a random braid is a hyperbolic link*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 2, 695-701.

[Mah1] J. Maher, *Random Heegaard splittings*. Journal of Topology 3.4 (2010): 997-1025.

[Mah2] J. Maher, *Linear progress in the complex of curves*. Transactions of the American Mathematical Society 362.6 (2010): 2963-2991.

[Mah3] J. Maher, *Random walks on the mapping class group*, Duke Math. J. 156 (2011), no. 3, 429-468.

[Mah4] J. Maher, *Exponential decay in the mapping class group*, J. Lond. Math. Soc. (2) 86 (2012), no. 2, 366-386. A correction for the proof of Lemma 2.11 can be found in Maher's webpage: `http://www.math.csi.cuny.edu/maher/research/index.html`

[MT] J. Maher and G. Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, to appear in J. Reine Angew. Math., arXiv:1410.4173.

[Masa1] H. Masai, *Fibered commensurability and arithmeticity of random mapping tori*, preprint, arXiv:1408.0348.

[Masa2] H. Masai, *Some dynamics of random walks on the mapping class groups*, preprint, arXiv:1604.00749.

[MM1] H. Masur and Y. Minsky, *Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity*, Invent. Math., 138(1):103-149, 1999.

[MM2] H. Masur and Y. Minsky, *Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure*, Geom. Funct. Anal. 10 (2000) 902-974.

[PT] A. Papadopoulos and G. Théret. *On Teichmüller's metric and Thurston' s asymmetric metric on Teichmüller space*. Handbook of Teichmüller theory 1 (2007): 111-204.

[Raf] K. Rafi, *Hyperbolicity in Teichmüller space*. Geometry & Topology 18.5 (2014): 3025-3053.

[Riv1] I. Rivin, *Walks on groups, counting reducible matrices, polynomials, and surface and free group automorphisms*, Duke Math. J. 142 (2008) 353-379.

[Riv2] I. Rivin, *Statistics of Random 3-Manifolds occasionally fibering over the circle* arXiv:1401.5736 (2014).

[Thu1] W. Thurston, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, preprint, arXiv:math/9801045.

[Thu2] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bulletin of the American mathematical society 19, (1988) 417-431.

[Wo] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.