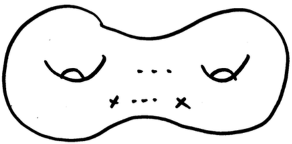
写像類群上のランダムウォーク

正井　秀俊 (Hidetoshi Masai)

東京大学大学院数理科学研究科，JSPS(PD)

トポロジーシンポジウム
2016 年 7 月 7 日，七夕

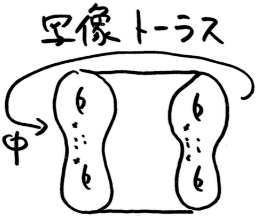
写像類群

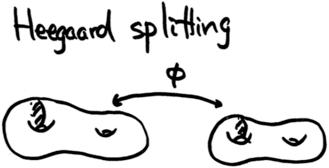


S : **有限型の向きづけ可能曲面**
（種数 g, n **個の穴）**
$3g - 3 + n > 0$ **を仮定**

写像類群

$\mathrm{MCG}(S) := \mathrm{Homeo}^+(S)/\text{homotopy}$





群上のランダムウォーク

G:**可算群，** $\mu : G \to [0,1]$ **確率測度** (i.e. $\sum_{g \in G} \mu(g) = 1$)

- μ **という "サイコロ" を振って新しく得た元を右からかける．**

例

$G = \langle A \rangle, |A| < \infty$ **のとき，** $\mu_A(a) = 1/|A|$ *if* $a \in A$.
$\Rightarrow$ **ケーリーグラフ上のランダムウォーク.**

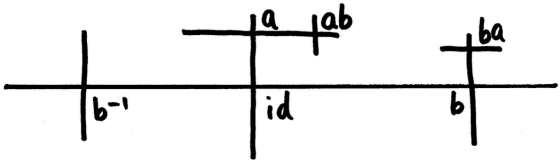


Figure: $F_2 = \langle a, b, a^{-1}, b^{-1} \rangle$

ランダム…

× 群 G の元が等確率で得られる．

○ ランダムに複雑さを増していく，元の列が得られる．

ランダム •••

✕ 群 G の元が等確率で得られる．

◯ ランダムに複雑さを増していく，元の列が得られる．

G 上の確率測度 $\mu \to G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \mu(x_1)\mu(x_1^{-1}x_2)\cdots\mu(x_{n-1}^{-1}x_n)$$

ランダム…

✕ 群 G の元が等確率で得られる．

◯ ランダムに複雑さを増していく，元の列が得られる．

G 上の確率測度 $\mu \to G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \mu(x_1)\mu(x_1^{-1}x_2)\cdots\mu(x_{n-1}^{-1}x_n)$$

Definition (Bernoulli shift)

元 $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{Z}>0}$ に対して $(\omega)_n = \omega_n$ とする．

$$(\theta^k\omega)_n := \omega_k^{-1}\omega_{n+k}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

$\boxed{\text{Bernoulli shift は ergodic!}}$

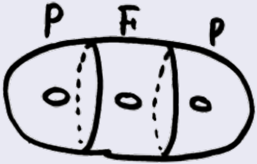
Nielsen-Thurston 分類

写像類 $\phi \in \mathrm{MCG}(S)$ **は次のいずれかにホモトピック**

周期的

$\exists n \neq 0$ s.t. $\phi^n = \mathrm{id}$

可約



$\exists \Omega \subset S$ simple closed curves (s.c.c.s) s.t. $\phi(\Omega) = \Omega$

- **擬アノソフ：その他 …**

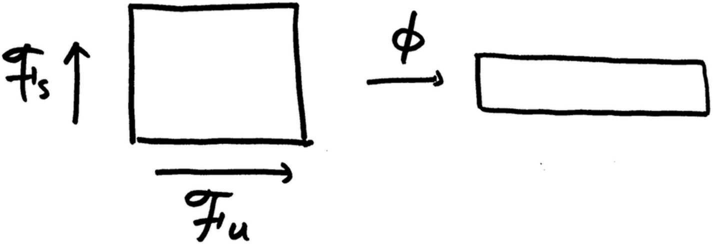
擬アノソフ

$\phi : S \to S$ が**擬アノソフ写像**である．

$:\Leftrightarrow \exists(\mathcal{F}_u, \mu_u), (\mathcal{F}_s, \mu_s) \in \mathcal{MF}(S)$：（不）安定測度付葉層

$\exists\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ：dilatation s.t.

- $\phi(\mathcal{F}_s, \mu_s) = (\mathcal{F}_s, \mu_s/\lambda)$
- $\phi(\mathcal{F}_u, \mu_u) = (\mathcal{F}_u, \lambda\mu_u)$



Random mapping classes

Theorem

（適切な条件のもと）ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- **擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ** *[Kowalski, Maher, Rivin]*，

Random mapping classes

Theorem

（適切な条件のもと）ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- 擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ *[Kowalski, Maher, Rivin]*，
- *Heegaard* 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ *[Maher, Lubotzky-Maher-Wu]*，

Random mapping classes

Theorem

（適切な条件のもと）ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- **擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ** *[Kowalski, Maher, Rivin]*，
- *Heegaard* **分解で得られる多様体が双曲構造を持つ** *[Maher, Lubotzky-Maher-Wu]*，
- **１つ穴あき曲面の場合，写像トーラスが例外的手術をもたない，** *[Rivin]*，

Random mapping classes

Theorem

（適切な条件のもと）ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- 擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ *[Kowalski, Maher, Rivin]*，
- *Heegaard* 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ *[Maher, Lubotzky-Maher-Wu]*，
- １つ穴あき曲面の場合，写像トーラスが例外的手術をもたない，*[Rivin]*，
- 他の写像類のベキとならない，有限被覆に関する持ち上げにならない *[M.]*
- 写像トーラスが非算術的となる，写像トーラスの対称群が自明となる *[M.]*

Random mapping classes

Theorem

（適切な条件のもと）ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- 擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ *[Kowalski, Maher, Rivin]*，
- *Heegaard* 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ *[Maher, Lubotzky-Maher-Wu]*，
- １つ穴あき曲面の場合，写像トーラスが例外的手術をもたない，*[Rivin]*，
- 他の写像類のベキとならない，有限被覆に関する持ち上げにならない *[M.]*
- 写像トーラスが非算術的となる，写像トーラスの対称群が自明となる *[M.]*

Coarse theory v.s. Random theory

Coarse theory

Random theory

Coarse theory v.s. Random theory

Coarse theory

有限の誤差を無視する

$A \asymp B :\Leftrightarrow \exists C > 0$ s.t.
$A/C - C \leq B \leq CA + C$

Random theory

Coarse theory v.s. Random theory

Coarse theory

有限の誤差を無視する

$A \asymp B :\Leftrightarrow \exists C > 0$ s.t.

$A/C - C \leq B \leq CA + C$

Random theory

低い確率でおきる事象を無視する

$\exists K > 0, c < 1$ s.t

$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \mid \omega_n \text{ is good}) > 1 - Kc^n$

Coarse theory v.s. Random theory

様々の発展

Coarse theory

有限の誤差を無視する

$A \asymp B :\Leftrightarrow \exists C > 0$ s.t.

$A/C - C \leq B \leq CA + C$

Random theory

低い確率でおきる事象を無視する

$\exists K > 0, c < 1$ s.t

$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \mid \omega_n \text{ is good}) > 1 - Kc^n$

Coarse theory v.s. Random theory

様々の発展 $\xRightarrow{\text{枡植}}$ 統計的情報

Coarse theory

有限の誤差を無視する

$A \asymp B :\Leftrightarrow \exists C > 0$ s.t.

$A/C - C \leq B \leq CA + C$

Random theory

低い確率でおきる事象を無視する

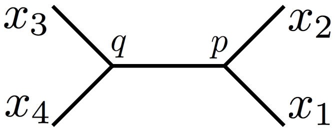
$\exists K > 0, c < 1$ s.t

$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \mid \omega_n \text{ is good}) > 1 - Kc^n$

有限の誤差 $\longleftrightarrow$ 低い確率でおきる事象

Gromov hyperbolicity

(X, d_X) : geodesic,
δ-hyperbolic space



Theorem (folklore)

$\exists K > 0$ *(δ* **にのみ依存***)* *s.t.*
$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$,
$\exists T$: **4 点を結ぶ埋め込まれた木** *s.t.*

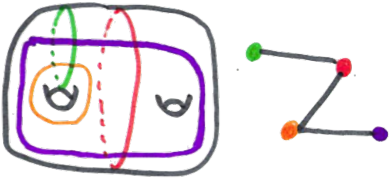
$$d_T(x_i, x_j) \leq d_X(x_i, x_j) + K$$

for $1 \leq i, j \leq 4$. **ここで，**d_T **は** T **上で測る距離**.

Curve Graph $\mathcal{C}(S)$

Vertex (homotopy class of) ess. s.c.c.

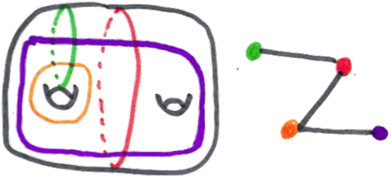
Edge **交わらないように曲面上に描ける.**



Curve Graph $\mathcal{C}(S)$

Vertex (homotopy class of) ess. s.c.c.

Edge **交わらないように曲面上に描ける.**



Theorem (Masur-Minsky 1999)

Curve graph $\mathcal{C}(S)$ **は** *Gromov hyperbolic.*

- $\mathcal{C}(S)$ **は** locally infinite.
- $\mathrm{MCG}(S) \curvearrowright \mathcal{C}(S)$ **は** NOT properly discontinuous.

Acylindricity

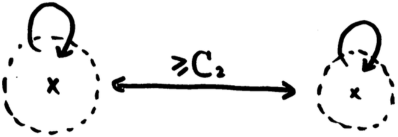
Theorem (Bowditch 2008)

$\forall C_1 > 0$, $\exists C_2, C_3$ such that
for $a, b \in \mathcal{C}(S)$ with $d_{\mathcal{C}}(a, b) \geq C_2$,

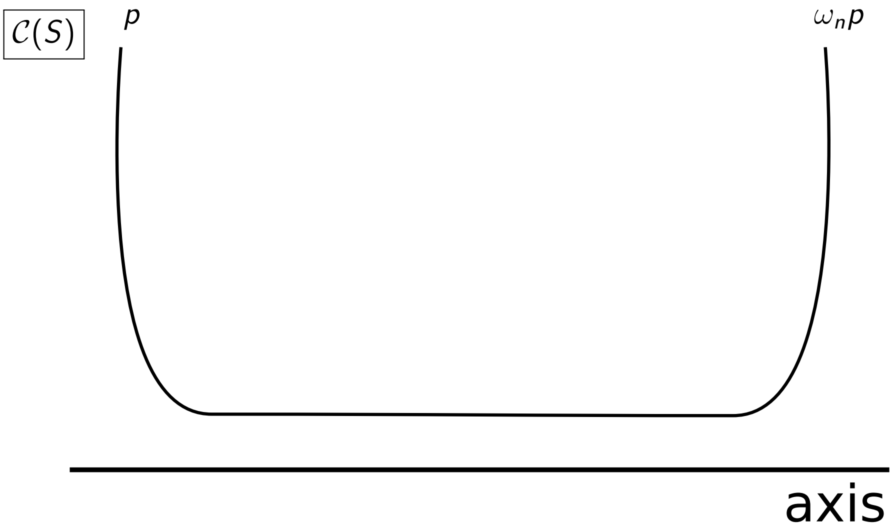
$$|\{h \in G \mid d_{\mathcal{C}}(a, ha) \leq C_1 \text{ and } d_{\mathcal{C}}(b, hb) \leq C_1\}| \leq C_3$$

Properly disconti.

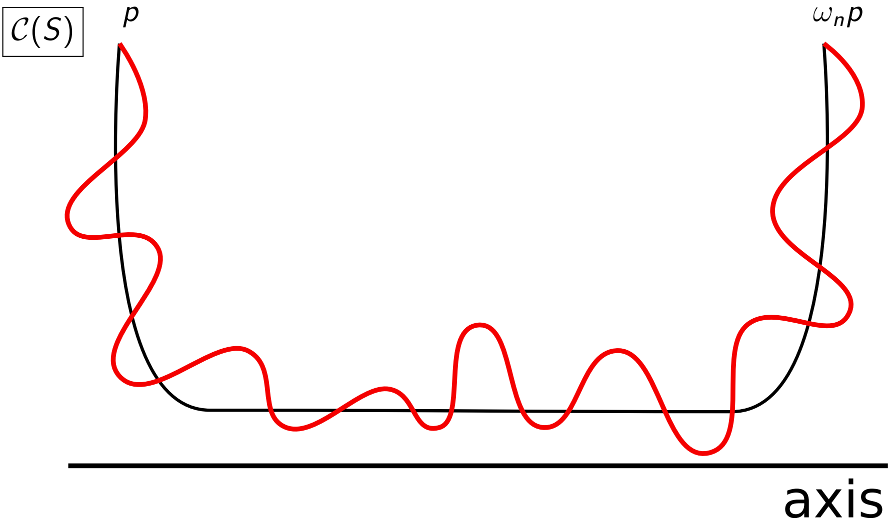
Acylindricity



Random mapping class is not any power

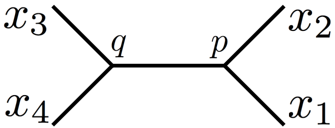


Random mapping class is not any power



Gromov hyperbolicity

(X, d_X) : δ-hyperbolic space



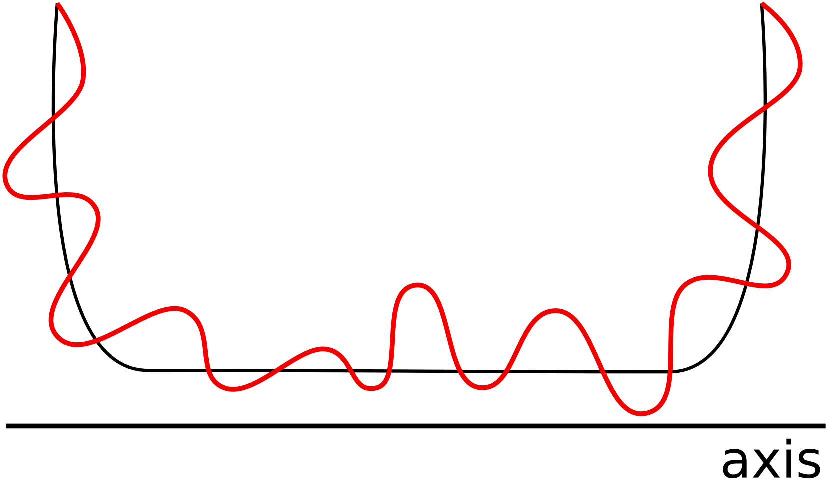
Theorem (Bowditch?)

$\exists K > 0$ (δ **にのみ依存**) s.t.
$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$,
$\exists T$: **4 点を結ぶ埋め込まれた木** s.t.

$$d_T(x_i, x_j) \leq d_X(x, y) + K_1$$

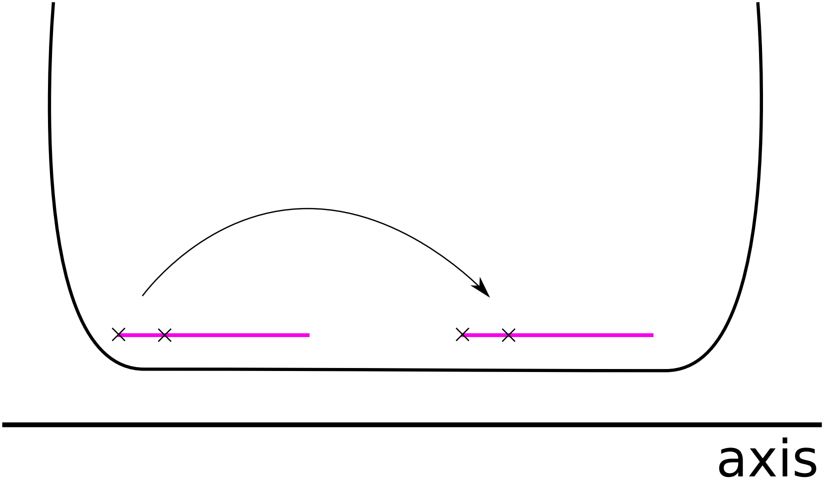
for $1 \leq i, j \leq 4$. **ここで，**d_T **は** T **上で測る距離**.

Random mapping class is not any power

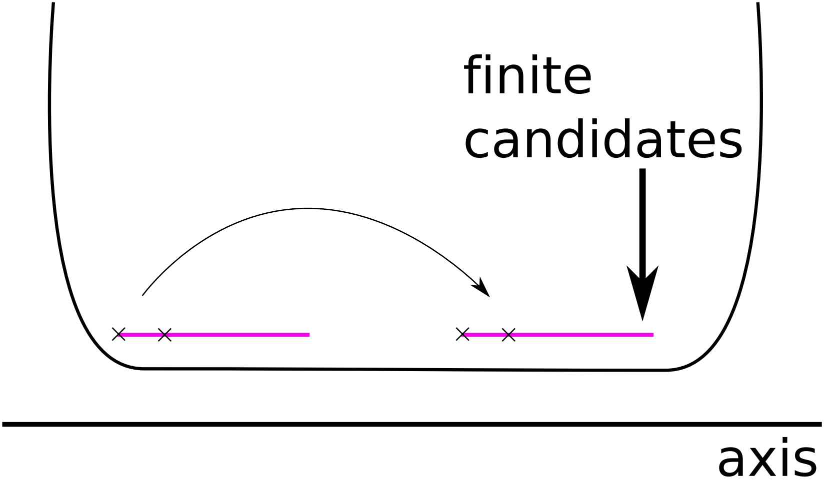


Random mapping class is not any power

Random mapping class is not any power



Random mapping class is not any power



Random mapping classes

Theorem

ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率１で

- 擬アノソフである，写像トーラスが双曲構造を持つ *[Kowalski, Maher, Rivin]*，
- *Heegaard* 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ *[Maher, Lubotzky-Maher-Wu]*，
- １つ穴あき曲面の場合，写像トーラスが例外的手術をもたない，*[Rivin]*，
- 他の写像類のベキとならない，有限被覆に関する持ち上げにならない *[M.]*
- 写像トーラスが非算術的となる，写像トーラスの対称群が自明となる *[M.]*

Drifts (Translation distance)

(X, d_X):G-距離空間 ($G \curvearrowright X$)
$\mu : G \to [0,1]$: 確率測度

Definition (有限一次モーメント)

$$\forall x \in X, \ \sum_{g \in G} \mu(g) d_X(x, gx) < \infty$$

Corollary (Kingman の劣加法的エルゴード定理の系)

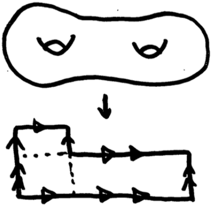
μ が有限一次モーメントを持つ $\Rightarrow$
$\mathbb{P}$-$a.e.$ $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{d_X(x, \omega_n x)}{n}$ が存在する．これを**ドリフト**と呼ぶ．

Teichmüller 空間

S:有限型曲面，
X:リーマン面（Sと同相）

標識付きリーマン面

Xと同相写像 $f : S \to X$ の組
(X, f)

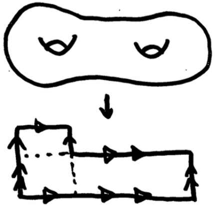


Teichmüller 空間

S:有限型曲面，
X:リーマン面（S と同相）

標識付きリーマン面

X と同相写像 $f : S \to X$ の組 (X, f)



Teichmüller 空間，Teichmüller 距離

Teichmüller 空間：

$\mathcal{T}(S)$“=” $\{$ 標識付きリーマン面 $\}$/homotopy

Teichmüller 距離：

標識付きリーマン面の “変形の度合い” を測る距離．

写像類群 $\mathrm{MCG}(S)$ は Teichmüller 空間に標識の取り換えとして等長的に作用する．

Sublinear tracking

仮定

$\mathrm{MCG}(S)$ **上の確率測度** μ **は** Teichmüller **距離に関して有限一次モーメントを持つ．**
L : **ドリフト** w.r.t Teichmüller **距離．**

Theorem (Tiozzo 2015)

$\mathbb{P}$-*a.e.* $\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$**，** $\exists \Gamma$: *Teichmüller* **測地線** *s.t.*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_{\mathcal{T}}(\omega_n X, \Gamma(nL))}{n} = 0$$

注意

Teichmüller **空間は** Gromov **双曲的ではない．**

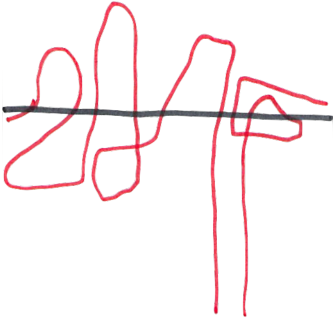
Theorem (Bers)

ϕ:擬アノソフ
$\exists! \Gamma$: *Teichmüller* 測地線 *s.t.*

- $\phi(\Gamma) = \Gamma$,
- *translation* 距離は $\log \lambda$ で Γ 上で実現される.

擬アノソフ

ランダムウォーク



Work of Karlsson

S : **閉曲面** $(g \geq 2)$

Theorem (Thurston)

ϕ : *dilatation* λ **を持つ 擬アノソフ**
$\forall\alpha$: **本質的単純閉曲線，** $\forall\rho$: **計量**

$$\lim_{n\to\infty} \log(l_\rho(\phi^n\alpha))/n = \log\lambda$$

が成り立つ．ここで， l_ρ **は** ρ **に関する** α **の長さ．**

Theorem (Karlsson 2014)

$\mathbb{P}$-*a.e.* $\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$

$$\lim_{n\to\infty} \log l_\rho(\omega_n^{-1}\alpha)/n = L$$

位相的エントロピー

S:閉曲面（コンパクト）

Notations

- $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}, \mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$: S の開被覆
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \{A_i \cap B_j\}_{i \in I, j \in J}$
- $N(\mathcal{A}) := \min(n \mid A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} = S)$

Property

$$N(\mathcal{A}) \leq N(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{A}) \cdot N(\mathcal{B})$$

位相的エントロピー

Definition (Adler-Konheim-McAndrew)

$\phi \in \mathrm{MCG}(S)$: **写像類，** $f : S \to S$: ϕ **の表現，**
$\mathcal{A}$: **開被覆**

$$h(f, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee f^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\mathcal{A})$$

$$h(f) := \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A})$$

ここで sup **は** S **のすべての開被覆に対してとる．位相的エントロピーを**

$$h(\phi) := \inf_{f\in\phi} h(f)$$

と定義する．

位相的エントロピー（ランダム）

Definition (c.f. Adler-Konheim-McAndrew)

$\omega \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$, $\mathbf{w} = (w_n) \in \mathrm{Homeo}^{+}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$: ω **の表現**,
$\mathcal{A}$: **開被覆**

$$h(\mathbf{w}, \mathcal{A}) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee w_1 \mathcal{A} \vee \cdots \vee w_{n-1} \mathcal{A})$$

$$h(\mathbf{w}) := \sup_{\mathcal{A}} h(\mathbf{w}, \mathcal{A})$$

ここで sup **は** S **のすべての開被覆に対してとる．位相的エントロピーを**

$$h(\omega) := \inf_{\mathbf{w} \in \omega} h(\mathbf{w})$$

と定義する．

位相的エントロピー

Theorem (Thurston + Bers)

ϕ:*dilatation* λ の擬アノソフ．このとき

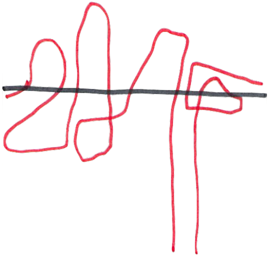
$$h(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_{\mathcal{T}}(X, \phi^n X) = \log \lambda$$

Theorem (M.)

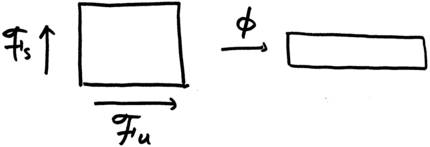
$\mathbb{P}$-*a.e.* $\omega \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$，

$$h(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_{\mathcal{T}}(X, \omega_n X) =: L$$

擬アノソフ v.s. ランダムウォーク（Idea）



Markov partition



Question

適切な条件を満たす確率測度 $\mu : \mathrm{MCG}(S) \to [0,1]$ の下，

- $\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \mathrm{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}} \mid \omega_n$は性質 P をもつ$)$ が $n \to \infty$ としたとき，どのように振る舞うか．
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n \text{に対する V の値}}{F(n)} = ?$, ($F(n)$ は n の関数)
- ある性質を満たす多様体の無限個の例の存在？（c.f. Lubotzky-Maher-Wu）

ありがとうございました