Non-Kähler complex structures on $\mathbb{R}^4$

粕谷　直彦　(青山学院大学社会情報学部)*

1. 主定理とその背景

本稿では，筆者が Antonio J. Di Scala (Politecnico di Torino), Daniele Zuddas (KIAS) とともに [1] において構成した $\mathbb{R}^4$ に微分同相な non-Kähler complex surfaces の例およびそれらが満たす様々な性質について解説する.

はじめに，Kähler 性の定義を確認しておこう.

定義 1. (M, J) を complex manifold とする．M 上に complex structure J と両立する symplectic form ω が存在するとき，(M, J) は Kähler であるという．ただし，ω が J と両立するとは以下の 2 つの条件を満たすことを言う.

(1) 任意の 0 でない接ベクトル $u \in TM$ に対して，$\omega(u, Ju) > 0$ が成立 (tamedness).

(2) 任意の接ベクトル $u, v \in TM$ に対して，$\omega(u, v) = \omega(Ju, Jv)$ が成立 (J-invariance).

任意の complex manifold は局所的には Kähler であるから，問題は complex structure と両立する ω が大域的に取れるかどうかである．その意味において，Kähler 性および non-Kähler 性は complex manifold の大域的な性質である（ここで言う Kähler 性は固定した Hermite 計量に関する Kähler 性のことではなく，Kähler 計量の存在と同値であることに注意されたい）．実際，小平 [3]–[9]，宮岡 [11]，Siu[16] による以下の定理が知られている.

定理 2. Compact complex surface に関して，Kähler であることと first Betti number b_1 が偶数であることは同値である.

つまり，compact complex surface の場合は b_1 というトポロジーの情報のみから Kähler 性，non-Kähler 性が決まってしまう．一般の次元においても，compact Kähler manifold の奇数次 Betti number b_{2j+1} は偶数である，という Hodge theory からの帰結があった．ところが，non-compact な場合にはもはやこのような性質は成り立たない．実際，任意の connected open orientable 4-manifold は Kähler complex structure を許容することが知られている．さらに一般次元の場合にも，b_1 が奇数の Stein manifolds が存在することはすぐにわかる．このように，non-compact complex manifold の場合，そのトポロジーの情報だけでは non-Kähler 性を示すうえで役に立たない．唯一の手がかりは次の補題である.

補題 3. ホモロジカルに自明な compact holomorphic curve を含む complex manifold は non-Kähler である.

証明は極めて容易である．Kähler manifold (M, J) 内の compact complex curve C は J と両立する symplectic form ω に対し，$\int_C \omega > 0$ を満たすから，ホモロジカルに非自

* e-mail: nkasuya@si.aoyama.ac.jp

明であるというだけのことである．しかし，この簡単な補題がこの話における1つの重要な鍵となる．さて，我々の問題は次の通りである．

問題 1. $\mathbb{R}^{2n}$ 上に non-Kähler complex structure は存在するか？

この問題は $n=2$ の場合のみ未解決であった．これについて簡単に説明したい．まず $n=1$ の場合，全ての complex curve は Kähler なので答えは明らかに No である．一方，$n\geq 3$ の場合は Calabi と Eckmann によって Yes であることが示されている．彼らは1953年に2つの奇数次元球面の直積上の complex structure を以下のような方法で構成した．まず，2つの Hopf 写像 $h_p\colon S^{2p+1}\to\mathbb{C}P^p$, $h_q\colon S^{2q+1}\to\mathbb{C}P^q$ の直積写像 $h_{p,q}\colon S^{2p+1}\times S^{2q+1}\to\mathbb{C}P^p\times\mathbb{C}P^q$ をとると，これは T^2 fiber bundle である．ここで modulus τ の elliptic curve $S(\tau)$ をとる．$\mathbb{C}P^p\times\mathbb{C}P^q$ の標準的な座標近傍系 $\{U_i\times U_j\}$ $(0\leq i\leq p,\ 0\leq j\leq q)$ に対し，$U_i\times U_j\times S(\tau)$ を貼り合せることによって $h_{p,q}$ が holomorphic T^2 fiber bundle となるような $S^{2p+1}\times S^{2q+1}$ 上の complex structure が構成される．これが有名な Calabi-Eckmann manifold $M_{p,q}(\tau)$ である．この $M_{p,q}(\tau)$ の open subset を次のように取ることで $\mathbb{R}^{2n}$ $(n\geq 3)$ 上の non-Kähler complex structure が得られるのである．まず，$S^{2p+1}\times S^{2q+1}$ の自然な胞体分割を取り，その最大次元セルに対応する $M_{p,q}(\tau)$ の open subset を $E_{p,q}(\tau)$ と表す．もしも $p>0$, $q>0$ ならば，$E_{p,q}(\tau)$ は $h_{p,q}$ のほとんどの elliptic fiber を含んでおり，しかも $\mathbb{R}^{2(p+q+1)}$ と微分同相だから，上で示した補題 3により，non-Kähler であることが従う ($n\geq 3$ という条件は，$n=p+q+1$, $p>0$, $q>0$ から来ている)．

では同様にして $\mathbb{R}^4$ 上の non-Kähler complex structure を構成できるではないか，と思うかもしれないが，それは不可能である．というのも $M_{0,1}(\tau)$ は Hopf surface と一致するため，$E_{0,1}(\tau)$ は $\mathbb{C}^2$ の open subset だからである．従って $n=2$ の場合には，別のアプローチが必要となる．

そこで我々が注目したのが，松本幸夫氏と深谷賢治氏によって発見された S^4 から S^2 への genus-one achiral Lefschetz fibration の例である．これを Matsumoto-Fukaya fibration と呼ぶことにする．この例は4次元トポロジー論においてはよく知られたものだが，positive singularity と negative singularity を1つずつ持つため，一見すると複素幾何とは全く関係がないように思われる．しかし実は，その唯一の negative singularity を含む 4-ball を取り除いてしまえば，残りの部分は $\mathbb{R}^4$ と微分同相であり，しかも fibration のそこへの制限が holomorphic となるように complex structure を入れることができる．すると，その holomorphic fibration の regular fiber として elliptic curve が含まれるので，補題 3より $\mathbb{R}^4$ 上の non-Kähler complex structure であることが分かる．これが今回の構成法の概要である．即ち，主定理は以下の通りである．

定理 4. $1<\rho_2<\rho_1^{-1}$ を満たす任意の実数の組 (ρ_1,ρ_2) に対し，以下の条件を満たす complex manifold $E(\rho_1,\rho_2)$ および surjective holomorphic map $f\colon E(\rho_1,\rho_2)\to\mathbb{C}P^1$ が存在する．

(1) $E(\rho_1,\rho_2)$ は $\mathbb{R}^4$ と微分同相.

(2) $f^{-1}(0)$ は f の唯一つの singular fiber であり，node を1つ持った immersed holomorphic sphere である．

(3) f の regular fiber は2種類あり，embedded holomorphic torus と embedded holomorphic annulus である．

勿論この定理を証明するためには complex manifold $E(\rho_1, \rho_2)$ を構成しなくてはならないので，トポロジカルな情報だけでは不十分である．しかし，先ほどの Matsumoto-Fukaya fibration の全空間から negative Lefschetz singularity の近傍をくりぬくというアイディアによって，$\mathbb{R}^4$ を2つのピースへ非自明に分解することができる．この分解が $E(\rho_1, \rho_2)$ を貼り合せで構成するための設計図を与えてくれるのである．そしてその2つのピースそれぞれに complex structure を入れ，互いに biholomorphic な貼り合せ領域を指定し，biholomorphism によって解析的貼り合せを行う．その際，設計図を睨みながら，トポロジカルには貼り合せが Matsumoto-Fukaya fibration と同じになるよう適切に貼り合せ領域を指定しておけば，構成した complex manifold が $\mathbb{R}^4$ と微分同相になるようにコントロールできるということである．その詳細については，２章・３章で述べることとする．

４章では complex manifold $E(\rho_1, \rho_2)$ の性質および応用について詳しく述べる．そのうち顕著なものをいくつか先行して紹介しておこう．

まず $(\rho_1, \rho_2) \neq (\rho'_1, \rho'_2)$ ならば，$E(\rho_1, \rho_2)$ と $E(\rho'_1, \rho'_2)$ は互いに biholomorphic でない，ということが挙げられる．このことは，$E(\rho_1, \rho_2)$ 上の compact holomorphic curve の分類を用いて証明することができる．結果として，$\mathbb{R}^4$ 上には非可算無限個の non-Kähler complex structure があることが分かる．

さらにこれを利用すれば，任意の connected open orientable 4-manifold は非可算無限個の non-Kähler complex structure を許容することが分かる．先ほども述べた通り，Kähler complex structure の存在については知られているが，その基本的考え方は $\mathbb{C}P^2$ へのはめ込みを使って complex structure を引き戻すというものであった．これと同じことを行き先を $E(\rho_1, \rho_2)$ の１点 blow up にとりかえて行うのである．

境界の持つ性質についても述べておこう．$E(\rho_1, \rho_2)$ の境界は3次元球面に微分同相であるが，complex manifold の内側へ少しだけ摂動することによって，strictly pseudoconcave boundary にすることが出来る．こうしてできた新たな境界は overtwisted contact 3-sphere であることが容易に示される．つまり，$E(\rho_1, \rho_2)$ の境界の近傍を少しだけ削ることで，overtwisted contact 3-sphere の concave holomorphic filling を構成することができる．これは overtwisted contact 3-manifold の concave holomorphic filling の初めての例である．さらに副産物として，$E(\rho_1, \rho_2)$ はいかなる compact complex surface にも埋め込まれないということも分かる．なぜなら，overtwisted contact manifold は convex holomorphic filling を持たないからである．

このように4次元トポロジー・微分位相幾何学の立場から複素幾何や接触幾何の分野に大きく貢献できるという点が本稿で最も伝えたいことである．それでは，その話の根幹となる $E(\rho_1, \rho_2)$ の構成を詳しく見ていこう．

2. The Matsumoto-Fukaya fibration

1980年代前半に松本幸夫氏と深谷賢治氏は以下のような構成によって S^4 から S^2 への genus-one achiral Lefschetz fibration を発見した [10]．まず Hopf fibration $H\colon S^3 \to \mathbb{C}P^1$ とその suspension $\Sigma H\colon S^4 \to S^3$ を用意し，その合成 $f_{MF} := H \circ \Sigma H$ をとる．すると，f_{MF} の regular fiber は 2-torus となり，suspension の 2 つの pinched point がちょうど正と負の Lefschetz singularity となる．この torus fibration $f_{MF}\colon S^4 \to S^2$ を Matsumoto-Fukaya fibration と呼ぶ.

f_{MF} にはただ 2 つの singular fiber がある．正の singularity を持つ方を F_1, 負の singularity を持つ方を F_2 としよう．すると，S^4 は F_1 の tubular neighborhood N_1 と F_2 の tubular neighborhood N_2 の貼り合わせとして表せることが分かる．実際，S^2 を $S^2 = D_1 \cup D_2$（ただし，$f_{MF}(F_j) \in D_j$, $\partial D_1 = \partial D_2$）と 2 つの disk の和に分解したとき，$N_1 := f_{MF}^{-1}(D_1)$, $N_2 := f_{MF}^{-1}(D_2)$ と定義すれば確かにそのようになっている.

f_{MF} の N_j への制限を f_j とおこう $(j = 1, 2)$．すると，$f_1\colon N_1 \to D_1$ は正の singularity を 1 つだけ持つ genus-one Lefschetz fibration であり，$f_2\colon N_2 \to D_2$ は負の singularity を 1 つだけ持つ genus-one achiral Lefschetz fibration である．Monodromy はそれぞれ vanishing cycle に沿った right-handed Dehn twist, left-handed Dehn twist となる．従って，∂N_1 と ∂N_2 は確かに互いに orientation reversing diffeomorphic である.

次に，∂N_1 と ∂N_2 はどのような diffeomorphism で貼り合わされているのかをはっきりさせよう．そのために Kirby diagram を見る．Matsumoto-Fukaya fibration の Kirby diagram は図 1 の通りであることがよく知られている（例えば [13], Figure 8.38 を参照）.

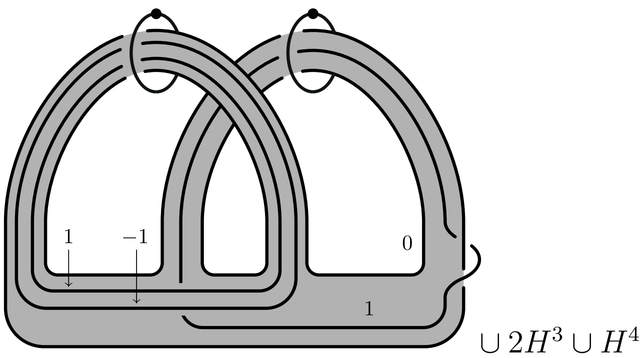

図 1: The Matsumoto-Fukaya fibration on S^4.

この diagram を説明しよう．まず，グレーの部分は 0-handle に 2 つの 1-handle を貼り合わせた once punctured torus となっている．ここへ 4 つの 2-handle が以下のように貼り付けられる．まず，framing 0 の 2-handle によって，once punctured torus の穴がふさがれて torus となる．これが torus fibration の regular fiber に相当する．さらに左側の 1-handle を通る形で framing -1, framing 1 の 2 つの 2-handle が貼り付けられる．これらはそれぞれ正と負の Lefschetz singularity の vanishing cycle に対応する 2-handle である．最後に，右側の 1-handle を通る形で framing 1 の 2-handle が貼り付けられる．結局この 2-handle が ∂N_1 と ∂N_2 を貼り合わせる際にどうひねっているかを表しているのである．従って，この diagram から分かることをまとめると次のようになる．ま

ず，正と負の singularity に対応した 2 つの vanishing cycle は一致している．そこでそれが表す T^2 fiber の 1 次ホモロジーを meridian と見ることにすれば，∂N_1 と ∂N_2 の貼り合わせは T^2 fiber の longitude に沿った 1 回ひねり（正確には自明な貼り合わせの後に multiplicity-1 logarithmic transformation を行うということ）である．従って，この貼り合わせを絵で表すと図 2 のようになる．

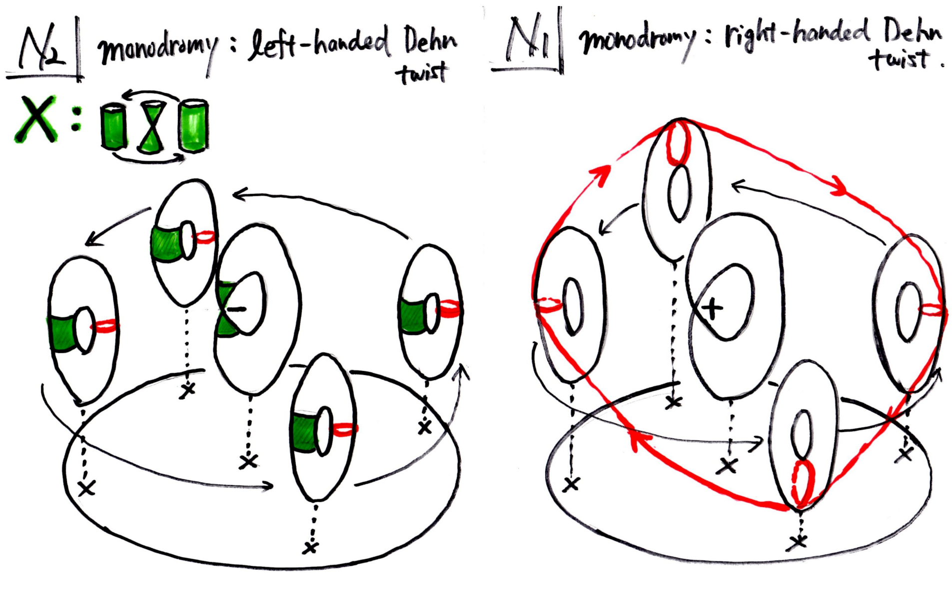

図 2: The gluing of N_1 and N_2.

さてこの貼り合わせによって，$N_1 \cup N_2 = S^4$ となることが分かったから，今度は N_2 から negative singularity の近傍 $X \cong B^4$ を取り除くことを考えよう（X は緑色の部分）．X は D_2 上の negative singularity を 1 つだけ持つ annulus fibration (monodromy は left-handed Dehn twist) の全空間なので，確かに negative Lefschetz singularity の近傍の standard model であり，B^4 と微分同相である．よって，その補集合 $N_1 \cup (N_2 \backslash X)$ は $\mathbb{R}^4$ と微分同相になる．

ところで，$N_2 \backslash X$ にはもはや singularity はないので，D_2 上の trivial annulus fibration の全空間，即ち $A \times D^2$ (A は annulus) と微分同相である．これに注意すれば，以下の補題が得られる．

補題 5. $A \times D^2$ を N_1 に以下のように貼り合せる．各 $t \in \partial D^2 = -\partial D_1 \cong S^1$ に対し，$A \times \{t\}$ は各ファイバー $f_1^{-1}(t) \cong T^2$ の thickened meridian として埋め込まれ，$t \in S^1$ が 1 周する間に T^2 の longitude 方向に 1 周する．得られる多様体は $\mathbb{R}^4$ に微分同相である．

このようにして，$\mathbb{R}^4$ を N_1 と $A \times D^2$ の和という形で非自明に分解することが出来た．これが $E(\rho_1, \rho_2)$ の設計図である．また，$f \colon E(\rho_1, \rho_2) \to \mathbb{C}P^1$ はトポロジカルには f_{MF} を $N_1 \cup (N_2 \backslash X)$ へ制限したものである．あとはこれらを complex manifold によって実現していけばよい訳である．

最後に$N_1 \cup (N_2 \setminus X) \cong \mathbb{R}^4$のKirby diagramを記しておこう．それは図3のようになる．図1と比較したとき，取り除くべきXはvanishing cycleを表すframing 1の2-handle, 3-handle, 4-handleの和に他ならないからである．

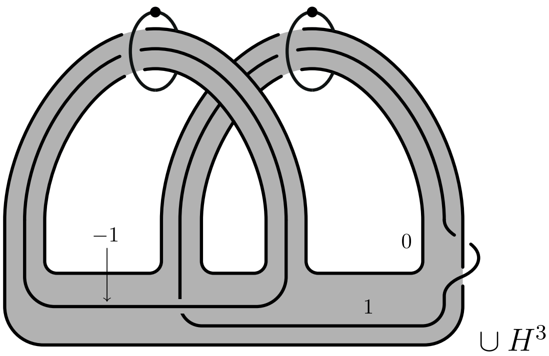

図 3: The map f on $S^4 \setminus X \cong \mathbb{R}^4$.

3. $E(\rho_1, \rho_2)$の構成

前章で得られた結果を踏まえ，この章ではcomplex manifold $E(\rho_1, \rho_2)$の構成を行う．具体的には，補題5で得られた2つのピースN_1と$A \times D^2$へcomplex structureを入れ，それぞれに貼り合せ領域を適切に指定するということを行う．

以下，次のような記号を用いる．

$$\Delta(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}, \quad \Delta(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}.$$

また，ρ_0, ρ_1, ρ_2は$0 < \rho_0 < \rho_1 < 1 < \rho_2 < \rho_1^{-1}$という条件を満たす実数とする．

まずはそれぞれのピースにcomplex structureを入れる．$A \times D^2$の方は簡単で，holomorphic annulusとholomorphic diskの直積$\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$を取ればよい．一方，$N_1$はgenus-one Lefschetz fibration $f_1 \colon N_1 \to D_1$の全空間だから，これがelliptic fibrationとなるようなcomplex structureを入れればよい．そのためには以下のelliptic surface内のI_1型singular fiberの近傍モデルが適している．まず，$\Delta(0, \rho_1)$上のelliptic fibration

$$\pi : \mathbb{C}^* \times \Delta(0, \rho_1)/\mathbb{Z} \to \Delta(0, \rho_1)$$

を考える．ただし, $n \in \mathbb{Z}$の作用は

$$n \cdot (z, w) = (zw^n, w)$$

で与えられている．これを$\Delta(\rho_1)$上に延長し，singular elliptic fibration $g_1 \colon W \to \Delta(\rho_1)$を得る．これが小平による$\mathrm{I}_1$型singular fiberの近傍モデルである ([4]) ．

このWと直積$\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$を複素解析的に貼り合せることによって, $E(\rho_1, \rho_2)$を構成する．直積の方からは$\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1})$を貼り合せ領域として取ってくる．$W$の方からは$\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1)$とbiholomorphicな貼り合せ領域を以下のようにして取る．多価正則関数$\varphi : \Delta(\rho_0, \rho_1) \to \mathbb{C}^*$を

$$\varphi(w) = \exp\left(\frac{1}{4\pi i}(\log w)^2 - \frac{1}{2}\log w\right)$$

によって定める．すると，

$$\varphi(re^{i(\theta+2\pi)}) = re^{i\theta}\varphi(re^{i(\theta)}) = w\varphi(w) \tag{1}$$

を満たすので，φ は $1 \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{C}^*$ への作用と両立し，π の holomorphic section を定める．そこで，この φ を用いて

$$Y := \{(z\varphi(w), w) \in \mathbb{C}^* \times \Delta(\rho_0, \rho_1) \mid z \in \Delta(1, \rho_2)\}$$

とすれば，Y は $\mathbb{Z}$ の作用で不変であり，$V := Y/\mathbb{Z}$ は φ の定める holomorphic section に沿った $\Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_0,\rho_1)$ と biholomorphic な領域となる．この V が W 内の貼り合せ領域である．貼り合せ領域同士の biholomorphism j は

$$j : V \cong \Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_0,\rho_1) \to \Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1},\rho_0^{-1});\ (z,w) \mapsto (z, w^{-1})$$

によって与える．あとは

$$E(\rho_1,\rho_2) := W \cup_j \left(\Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})\right)$$

と定義すればよい．

これが $\mathbb{R}^4$ に微分同相であることは以下のように示される．貼り合せ領域 V は $\Delta(1,\rho_2)$ を fiber とする φ によって自明化された直積だから，φ が満たす条件 (1) に注目すれば，w が 0 のまわりを 1 周するたびに $\Delta(1,\rho_2)$ は elliptic curve の longitude 方向へ 1 周回っていることが分かる．というのも (1) から，φ の値は w の偏角を 2π 増やすと w の積によって変化するが，それは $\Delta(1,\rho_2)$ が elliptic curve $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ の中で次の基本領域へ移動することに対応するからである（ただし，$\mathbb{C}^*$ の偏角方向が meridian, 動径方向が longitude に対応していることに注意せよ）．従って，W と $\Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$ の貼り合わせはトポロジカルには補題 5 のものと一致しており，$E(\rho_1,\rho_2)$ は $\mathbb{R}^4$ に微分同相である．

最後に f を構成する必要があるが，これは単に $\Delta(\rho_1)$, $\Delta(\rho_0^{-1})$ への射影をとればよい．即ち，W 上では g_1, $\Delta(1,\rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$ 上では 2nd factor への射影として定義する．$\Delta(\rho_1)$ と $\Delta(\rho_0^{-1})$ は貼り合せ領域の biholomorphism

$$\Delta(\rho_0,\rho_1) \to \Delta(\rho_1^{-1},\rho_0^{-1});\ w \mapsto w^{-1}$$

によって貼り合わさって $\mathbb{C}P^1$ をなすから，$f\colon E(\rho_1,\rho_2) \to \mathbb{C}P^1$ が定義されるのである．

このようにして構成された $E(\rho_1,\rho_2)$ および f が主定理の条件を満たしていることはもはや明らかであろう．

4. $E(\rho_1,\rho_2)$ の性質および応用

最後に，これまでに明らかとなっている $E(\rho_1,\rho_2)$ と f の性質（[1], [2] を参照）について述べる．まず以下のように，compact holomorphic curve を容易に分類することができる．

補題 6. $E(\rho_1,\rho_2)$ 内の compact holomorphic curve は f の compact fiber である．

Proof. $i\colon C \to E(\rho_1, \rho_2)$ を compact holomorphic curve とする．即ち，C は compact Riemann surface, i は holomorphic immersion とする．このとき，合成 $f \circ i\colon C \to \mathbb{C}P^1$ が constant map であることを示せばよい．$f \circ i$ は compact Riemann surface の間の holomorphic map であるから，branched covering map か constant map のいずれかである．ところが，この写像は $C \to E(\rho_1, \rho_2) \to \mathbb{C}P^1$ と contractible space $E(\rho_1, \rho_2) \cong \mathbb{R}^4$ を経由しているため null-homotopic であり，branched covering map とはなり得ない．よって，$f \circ i$ は constant map である． □

つまり，compact holomorphic curve は $f^{-1}(w)$ $(w \in \Delta(\rho_1))$ のみである．$w \neq 0$ ならば，$f^{-1}(w)$ は modulus が $\dfrac{1}{2\pi i}\log w$ の elliptic curve である．この分類を踏まえると，$\mathbb{R}^4$ 上に非可算無限個の non-Kähler complex structure が存在することが証明できる．

定理 7. $(\rho_1, \rho_2) \neq (\rho_1', \rho_2')$ ならば，$E(\rho_1, \rho_2)$ と $E(\rho_1', \rho_2')$ は互いに biholomorphic でない．

Proof. 対偶を示す．即ち，biholomorphism $\Phi\colon E(\rho_1, \rho_2) \to E(\rho_1', \rho_2')$ が存在すると仮定して，$\rho_1 = \rho_1'$, $\rho_2 = \rho_2'$ であることを示す．Φ は compact curve を compact curve に写すから，$\Phi(W) = W'$ となる．さらに，elliptic curve は同じ modulus の elliptic curve に写るから，Φ は W 上 fiberwise biholomorphism であり，base map $\Delta(\rho_1) \to \Delta(\rho_1')$ は identity である．よって，$\rho_1 = \rho_1'$ である．さらに analytic continuation により，Φ は $E(\rho_1, \rho_2)$ 全体で fiberwise biholomorphism であることが分かる．従って，annulus fiber $\Delta(1, \rho_2)$ は annulus fiber $\Delta(1, \rho_2')$ と biholomorphic となり，$\rho_2 = \rho_2'$ である． □

次に，Picard group $\mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$ が非可算であることを示す．ここで，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$ は $\mathbb{C}P^1$ 上の first Chern class k の holomorphic line bundle, L_k はその f による引き戻し（$E(\rho_1, \rho_2)$ 上に誘導される line bundle）とする．また f による line bundle の引き戻しによって定まる Picard group の間の homomorphism を f^* で表す.

定理 8. $f^*\colon \mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^1) \to \mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$ は injective であり，$\mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$ は非自明な complex vector space である．

Proof. L_k が自明であることを仮定して，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$ が自明であることを示せばよい．L_k の nonvanishing holomorphic section τ をとる．一方，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$ も $\Delta(\rho_1)$, $\Delta(\rho_0^{-1})$ それぞれの上では自明なので，σ_1, σ_2 という部分的な nonvanishing holomorphic section がとれる．これらを f で引き戻せば，$W_1 := W$ 上の nonvanishing section $f^*(\sigma_1)$ と $W_2 := \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$ 上の nonvanishing section $f^*(\sigma_2)$ を得る．従って，W_j 上の holomorphic function τ_j $(j = 1, 2)$ が

$$\tau|_{W_j} = \tau_j f^*(\sigma_j)$$

によって定まる．ところが $W_1 = W$ は compact fibers で foliate されているから，τ_1 は fiberwise constant である，つまり $\Delta(\rho_1)$ 上の holomorphic function u_1 が存在して，$\tau_1 = f^*(u_1)$ となる．共通部分 $V = W_1 \cap W_2$ においては

$$f^*(u_1\sigma_1) = \tau_2 f^*(\sigma_2)$$

が成り立つから，τ_2 も V 上においてはやはり fiberwise constant である．ここで analytic continuation を用いれば，τ_2 は W_2 全体で fiberwise constant, 即ち $\Delta(\rho_0^{-1})$ 上の holomorphic function u_2 が存在して，$\tau_2 = f^*(u_2)$ となる．すると，$u_1\sigma_1$ と $u_2\sigma_2$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$ の nonvanishing holomorphic section を定めるから，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$ は自明となる．これで f^* の injectivity が示された．

よく知られている通り $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$ なので，$\mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$ は $\mathbb{Z}$ を含む．さらに，sheaf cohomology の long exact sequence を見れば，

$$\mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2)) = H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O}^*) \cong H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O})$$

であることが分かる．$H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O})$ は complex vector space だから，$\mathrm{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$ も complex vector space と見なせ，しかも $\mathbb{Z}$ を含むので非自明である． □

同じような議論により，$E(\rho_1, \rho_2)$ 上の holomorphic vector bundle $L_{k_1} \oplus L_{k_2} \oplus \cdots \oplus L_{k_n}$ $(k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n)$ は全て異なることが分かる．さらにその全空間をとれば $\mathbb{R}^{2n+4}$ 上の互いに biholomorphic でない non-Kähler complex structure が得られる．これらが Calabi と Eckmann によって構成された complex structure と異なることは compact holomorphic curve の分類を見れば明らかである ([2], Theorem 4)．

さて次に，以下の定理を証明しよう．

定理 9. 任意の connected open orientable 4-manifold M^4 は非可算無限個の non-Kähler complex structure を許容する．

これを証明するためには次の Phillips の定理 [15] が重要となる．

定理 10. M を open manifold とする．このとき微分をとる写像

$$d\colon \mathrm{Sub}(M, V) \to \mathrm{Epi}(TM, TV);\ f \mapsto df$$

は弱ホモトピー同値である．ただし，$\mathrm{Sub}(M, V)$ は M から V への submersion 全体の空間，$\mathrm{Epi}(TM, TV)$ は TM から TV への surjective homomorphism 全体の空間である．

これを用いると例えば，M が parallelizable ならば M から $\mathbb{R}^n$ $(n \leq \dim M)$ への submersion が存在する，ということが分かる．従って，M^4 が parallelizable open 4-manifold (open spin 4-manifold と言っても同値) ならば $\mathbb{C}^2$ への immersion $g\colon M^4 \to \mathbb{C}^2$ が存在することが分かる．この g を使って $\mathbb{C}^2$ の complex structure を引き戻せば，M^4 に Kähler complex structure を入れることができる．M^4 が一般の connected open orientable 4-manifold である場合は，行き先を $\mathbb{C}P^2$ に変更すれば同様の議論ができる．尚，M^4 上の alomost complex structure の存在は Teichner-Vogt [17] および Gompf [12] によって示されている．このことを踏まえて，定理 9 を証明する．

Proof. M^4 が spin の場合 (つまり paralleizable な場合) のみ証明を与えることとする．定理 10 より，M^4 から $E(\rho_1, \rho_2) \cong \mathbb{R}^4$ への immersion $h\colon M^4 \to E(\rho_1, \rho_2)$ が存在する．ここで以下のようにして，$h(M^4)$ が elliptic curve を含むように rescaling しておけ

ば，引き戻しによって得られる M^4 上の complex structure は non-Kähler となる．h は immersion だから，十分小さい 4-ball $B \subset M^4$ をとれば，その上で embedding となる．ここで，$\rho_1' < \rho_1$, $\rho_2' < \rho_2$ を満たす $E(\rho_1', \rho_2')$ をとると，$E(\rho_1', \rho_2') \subset E(\rho_1, \rho_2)$ となって，$\mathbb{R}^4$ 内に open 4-ball が埋め込まれた形となる．$h(B) \subset E(\rho_1, \rho_2)$ も $\mathbb{R}^4$ 内の open 4-ball だから，$h(B)$ を $E(\rho_1', \rho_2')$ へ写す $\mathbb{R}^4$ の diffeomorphism が存在する．この diffeomorphism との合成をとって rescaling することにより，元々 $h(B) = E(\rho_1', \rho_2')$ であるとしてよい．この h によって $E(\rho_1, \rho_2)$ の complex strcutre を引き戻して M^4 上に complex structure を入れると，そこには $E(\rho_1', \rho_2')$ が holomorphic に埋め込まれている．よって，M^4 は non-Kähler complex structure を許容する．(ρ_1, ρ_2) と (ρ_1', ρ_2') を変えることで含まれる elliptic curve の modulus をコントロールできるから，非可算無限個存在することもすぐにわかる．また，M^4 が non-spin の場合には，$E(\rho_1, \rho_2)$ の代わりにその 1 点 blow up を用いれば同様の議論を行うことができる． □

最後に，$E(\rho_1, \rho_2)$ の境界の性質について述べる．

定理 11. 境界 $\partial E(\rho_1, \rho_2)$ のカラー近傍 A であって，$\partial(E(\rho_1, \rho_2) \setminus A)$ が strictly pseudoconcave boundary となるものが存在する．このとき，新たな境界は negative overtwisted contact 3-sphere となる．

即ち，$E(\rho_1, \rho_2)$ の境界のカラー近傍 A を削ることにより，overtwisted contact 3-sphere の concave holomorphic filling が得られるということである．この contact structure は negative Hopf band に対応する negative contact structure, 言い換えると，S^3 上の standard contact structure を Hopf fiber に沿って half Lutz twist したものに negative orientation を入れたものである．このことは，$E(\rho_1, \rho_2)$ を構成する過程で取り除いた X が negative Lefschetz singularity の近傍の standard model であったことを考えれば，自然なことに感じられるだろう．

証明の際には，strictly pseudoconcavity のみを示せば十分である．というのも，strictly pseudoconcave boundary には complex tangency によって negative contact structure が誘導される，というのは一般論であるし，さらに d_3-invariant を見れば contact structure のホモトピー類が決まってしまうからである．従って，$E(\rho_1, \rho_2)$ 内に境界の S^3 を内側に摂動した形の concave hypersurface を作ればよい．その構成については本予稿では省略し，トポロジーシンポジウムの講演において詳しく述べることとしたい．

参考文献

[1] A. J. Di Scala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on* $\mathbb{R}^4$, arXiv:1501.06097 (2015).

[2] A. J. Di Scala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on* $\mathbb{R}^4$ *II*, arXiv:1511.08471 (2015).

[3] K. Kodaira, *On Compact Complex Analytic Surfaces: I*, Ann. of Math. **71** (1960), 111–152.

[4] K. Kodaira, *On Compact Analytic Surfaces: II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.

[5] K. Kodaira, *On Compact Analytic Surfaces: III*, Ann. of Math. **78** (1963), 1–40.

[6] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.

[7] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: II*, Amer. J. Math. **88** (1966), 682–721.

[8] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: III*, Amer. J. Math. **90** (1968), 55–83.

[9] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: IV*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1048–1066.

[10] Y. Matsumoto, *On* 4*-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), no. 7, 298–301.

[11] Y. Miyaoka, *Kähler metrics on elliptic surfaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **50** (1974), 533–536.

[12] R. E. Gompf, *Spin^c-structures and homotopy equivalences*, Geom. Topol. **1** (1997), 41–50.

[13] R. E. Gompf and A. I. Stipcitz, 4*-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society (1999).

[14] A. Phillips, *Submersions of open manifolds*, Topology **6** (1967), 171–206.

[15] Y. T. Siu, *Every $K3$ surface is Kähler*, Inv. Math. **73** (1983), 139–150.

[16] P. Teichner and E. Vogt, *All oriented* 4*-manifolds have spin^c-structures*, preprint (1994).