局所 Gröbner Fan とその応用

Rouchdi Bahloul, 高山信毅

Department of Mathematics, University of Lyon, 神戸大学理学系研究科数学専攻

要約

Cette note résume des résultats portant sur l'éventail de Gröbner local. Nous montrons que l'éventail de Gröbner associé à un idéal d'un anneau de séries ou de l'anneau des opérateurs différentiels formels ou analytiques est un éventail polyédral. Nous comparons également les notions d'éventail de Gröbner global et local et discutons des applications de nos résultats. *Pour citer cet article : R. Bahloul, N. Takayama, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

フランス語による概要

Le but de cette note est d'exposer des résultats portant sur l'éventail de Gröbner local. Les démonstrations se trouvent dans [5].
Étant donné un idéal polynomial $I \subset \mathbf{k}[x] = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ ($\mathbf{k}$ étant un corps de caractéristique nulle), Mora et Robbiano [10] ont introduit l'éventail de Gröbner. Il s'agit, étant donné un système de poids $u \in \mathbf{R}^n$ sur les variables x_i de considérer l'ensemble $C_I[u]$ des poids u' pour lesquels l'idéal initial $\mathrm{in}_{u'}(I)$ égale $\mathrm{in}_u(I)$. L'ensemble des $C_I[u]$ est l'éventail de Gröbner de I, que l'on qualifie d'ouvert ici et qu'on note $\mathcal{E}(I)$. En effet, l'ensemble des adhérences des $C_I[u]$ noté $\bar{\mathcal{E}}(I)$ s'appelle l'éventail de Gröbner fermé. Quand I est homogène, Sturmfels [12] a montré que ce dernier est un éventail polyédral (cf. Def. **??**).
Dans le cas d'un idéal de $\mathbf{k}[[x]]$ (ou $\mathbf{C}\{x\}$) on peut faire une construction analogue mais où les systèmes de poids u doivent être dans $\mathbf{R}^n_{\leq 0}$ pour que les choses aient un sens (en effet, le poids d'une série est définie comme le maximum des poids des monômes qui la composent). On peut alors montrer que l'éventail de Gröbner est un éventail polyédral. Nous montrons ce même résultat pour un idéal de l'anneau (homogénéisé) des opérateurs différentiels formels (ou analytiques). Dans ce cas, les poids portent sur les x_i et les dérivées partielles avec des conditions de compatibilité. Ce dernier résultat complète ceux de Assi et al. [3] (où ils montrent seulement que l'éventail de Gröbner ouvert est une ensemble fini de cônes polyédraux rationels convexes). Mentionnons en passant que Saito et al. [11] ont fait de même dans le cas algébrique en complétant les résultats de Assi et al. [2]. Ces résultats sont rappelés dans la section 1 de la version anglaise.
Étant donné un idéal I du localisé (en 0 par exemple) $\mathcal{O}^{alg}$ de $\mathbf{k}[x]$, on peut montrer que l'éventail de Gröbner coïncide avec celui de l'extension formelle $\mathbf{k}[[x]]I$ de I. Si I est polynomial, on définit alors l'éventail de Gröbner local de I comme celui associé à $\mathcal{O}^{alg}I$. Il existe des liens entre l'éventail de Gröbner global et local. Par exemple, si I est homogène, ils sont égaux modulo la stratification par les gradués de $\mathbf{k}[[x]]$. Sinon, on peut donner un exemple pour lequel cela n'a pas lieu. Ceci est présenté dans la section 2 de la version anglaise.
Dans la dernière section, on explique l'intérêt des résultats ci-dessus et évoque des applications. Ainsi on propose un algorithme de calcul de l'éventail de Gröbner local en se basant sur le fait qu'il soit polyédral. En effet, un éventail polyédral est entièrement défini par ses cônes maximaux ce qui réduit sensiblement la phase d'énumération des cônes. On évoque aussi l'application aux polynômes de Bernstein-Sato suivant [4] et celle par N. Touda à la notion de variété tropicale locale, cf [13].

局所Gröbner fan は polyhedral fan である.

Here we describe the two main results of the first part of [5].
Commutative case
For simplicity, we consider the formal version only. Let I be an ideal in $\mathbf{k}[[x]] = \mathbf{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Define $\mathcal{U}_{loc} = \{u \in \mathbf{R}^n | u_i \leq 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$ as the space of local weight vectors. For a non-zero $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbf{k}[[x]]$, the support is $\mathrm{supp}\,(f) := \{\alpha \in \mathbf{N}^n | c_\alpha \neq 0\}$, the u-order is $\mathrm{ord}^{\,u}(f) := \max_{\mathrm{supp}\,(f)}\{u \cdot \alpha\}$, the initial form is $\mathrm{in}_{\,u}(f) := \sum_{u\cdot\alpha = \mathrm{ord}^{\,u}(f)} c_\alpha x^\alpha$.
As in the introduction, the u-order naturally defines a filtration F^u on $\mathbf{k}[[x]]$, and a graded ring. Notice that, in contrast to the global case, $\mathrm{gr}^{\,u}(\mathbf{k}[[x]])$ is not isomorphic to $\mathbf{k}[[x]]$.

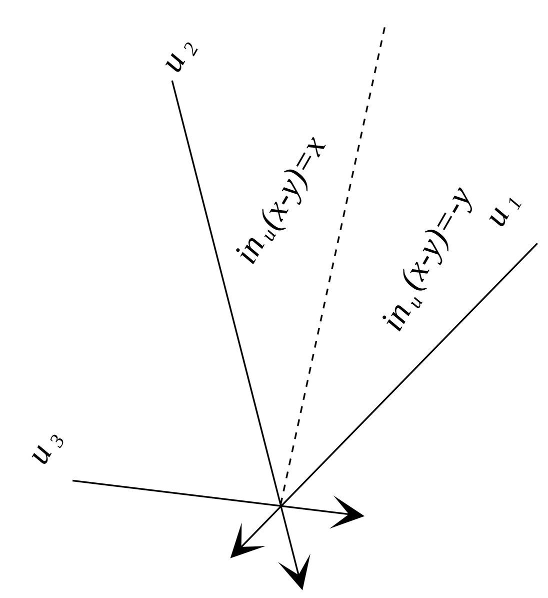

FIGURE 1: Local Gröbner fan is different from global one.

In fact we can identify it with $\mathbf{k}[[x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n}]][x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$ where: $u_i < 0 \iff i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$. The induced filtration on I gives rise to a graded ideal $\mathrm{in}_{\,u}(I) \subset \mathrm{gr}^{\,u}(\mathbf{k}[[x]])$. Notice that $\mathrm{in}_{\,u}(I)$ is generated by the set of $\mathrm{in}_{\,u}(f)$ when f runs over I.

The definition of the (open or closed) Gröbner fan is stated as follows. Two local weight vectors u and u' are said to be equivalent if $\mathrm{gr}^{\,u}(\mathbf{k}[[x]])$ identifies to $\mathrm{gr}^{\,u'}(\mathbf{k}[[x]])$ (in the above sense) and if $\mathrm{in}_{\,u}(I)$ equals $\mathrm{in}_{\,u}(I)$. This last condition makes sense since these ideals are in the "same" ring by the first condition.
If $C_I[u]$ denotes the equivalence class of some $u \in \mathcal{U}_{loc}$, the local open (resp. closed) Gröbner fan denoted by $\mathcal{E}(I) = \mathcal{E}(I, \mathcal{U}_{loc})$ (resp. $\bar{\mathcal{E}}(I) = \bar{\mathcal{E}}(I, \mathcal{U}_{loc})$) is the set of all distinct $C_I[u]$ (resp. $\overline{C_I[u]}$) when u runs over $\mathcal{U}_{loc}$.

Theorem 1 ([5, Th. 2.0.3]) *The set $\bar{\mathcal{E}}(I)$ is a rational polyhedral fan.*

Similar results occur for an ideal in $\mathbf{C}\{x\}$.

Example 1 *The local Gröbner fan $\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{k}[[x,y,z]]\langle x-y, 1-z\rangle)$ is the collection of all faces of the negative orthant $Q = \{(u_1,u_2,u_3) | u_i \leq 0\}$, but $\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{k}[x,y,z]\langle x-y, 1-z\rangle) \cap Q$ is not a rational polyhedral fan. (see figure 1).*

References

[1] A. Assi, Some remarks on universal standard bases, preprint, 1993.

[2] A. Assi, F.-J. Castro-Jiménez and M. Granger, The Gröbner fan of an A_n-module, J. Pure Appl. Algebra 150 (2000), no. 1, 27–39.

[3] A. Assi, F.-J. Castro-Jiménez and M. Granger, The analytic standard fan of a D-module, J. Pure Appl. Algebra 164 (2001), no. 1-2, 3–21.

[4] R. Bahloul, Démonstration constructive de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato pour plusieurs fonctions analytiques, Compos. Math. 141 (2005), no. 1, 175–191.

[5] R. Bahloul and N. Takayama, Local Gröbner fan: polyhedral and computational approach, preprint math.AG/0412044, 2004.

[6] F. J. Castro-Jiménez, M., Granger, Explicit calculations in rings of differential operators. Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, 89-128, Sémin. Congr., 8, Soc. Math. France, Paris, 2004.

[7] K. Fukuda, A. N. Jensen and R. Thomas, Computing Gröbner fans, preprint math.AC/0509544, 2005.

[8] A. N. Jensen, A non-regular Groebner fan, preprint math.CO/0501352, 2005.

[9] A. N. Jensen, Gfan, a software system for Gröbner fans, see http://home.imf.au.dk/ajensen/software/gfan/gfan.html.

[10] T. Mora and L. Robbiano, The Gröbner fan of an ideal, J. Symbolic Comput. 6 (1988), no. 2-3, 183–208.

[11] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama, Gröbner deformations of hypergeometric differential equations, Algorithms and Computation in Mathematics, 6. Springer-Verlag, 2000.

[12] B. Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes, University Lecture Series, 8. AMS, Providence, RI, 1996.

[13] N. Touda, Local Tropical Variety, preprint math.AG/0511486, 2005.