解析接続の数値計算による
Stokes係数の近似的確かめ

高山信毅

Hankel 関数 $H^{(2)}_{\nu}(z)$ を上半平面から下半平面へ負の実軸を横切るように解析接続した関数を考える ($\arg z > \pi$ への解析接続)．高野の本（常微分方程式，朝倉）によれば，この関数は

$$-(1 + e^{2\pi i \nu}) T_1(z) + T_2(z)$$

に漸近展開される．$T_1(z)$，$T_2(z)$ の定義は本 p.159 を参照（$\sqrt{2}$ を右辺にかけしておくこと）．これらの関数は関数があらわれるが，$\arg z > \pi$ であることに注意．

1 準備

数学ソフトを使いこなす第一歩は手計算/自分の知識とソフトの計算が一致する/矛盾しないのを確かめることであろう．

Maple のコマンド diff(微分)，dsolve(微分方程式を解く)，subs(置き換え) などが自分の知識で想定される答と同一のものを出すかまず確かめる．

```maple
> diff(cos(2*x),x);
-2 sin(2 x)
> diff(cos(2*x),x$2);
-4 cos(2 x)
> subs(x=2,x+y);
2 + y
> subs({x=2,y=3},x+y);
5
```

次に常微分方程式の近似解を求めるコマンドを試してみよう．

```maple
with(DEtools):
test0x:=proc() RETURN( dsolve({diff(y0(x),x)=y1(x), diff(y1(x),x)=-y0(x),y0(0)=1, y1(0)=0},
numeric, range=0..5) ); end:
```

振動の方程式 $y''_0 = y_1, y'_1 = -y_0, y_0(0) = 1, y_1(0) = 0$ ($y''_0 + y_0 = 0, y_0(0) = 1, y_0'(0) = 0$) を解く．$y_0$ は $\cos(x)$ に等しいはず．
\[ A := \text{test0x}(); \]
\[ A := \text{proc(rkf45_x) \ldots end proc} \]
\[ A(0); \]
\[ [x = 0., y0(x) = 1., y1(x) = 0.] \]
\[ A(1); \]
\[ [x = 1., y0(x) = 0.540302304342744399, y1(x) = -0.841471136026033961] \]
\[ \text{evalf(cos(1));} \]
\[ 0.5403023059 \]

2. Analytic Continuation of Numerical Calculation

Hankel 関数 \( H^{(2)}_\nu(z) \) が \( z = -2 + 2i \) から \( z = -2 - 2i \) へ解析接続される時の値を調べよう (\( \arg z = \pi \) を越える時の解析接続)。Maple の関数 \( z^\alpha = e^{\alpha \log z} \) は、次のグラフで示されるように \(-\pi < \arg z \leq \pi \) で定義されている（負の実軸を横切るとき不連続点がある)。

plotsetup(x11):
plot(Im((-2-x*I)^(1/2)),x=-2..2);

同じように Maple の関数 HankelH2 は次のプログラムの出力にみるように arg z = \pi のところで branch cut がある。

with(DEtools):
pplotsetup(x11):
h2g:=proc()
plot(Im(HankelH2(1/3,-2-I*x)),x=-2..2);
end:

多くの文献では \( H^{(2)}_\nu(z) \) は \(-2\pi < \arg z < \pi \) で定義された関数となっておりが、Maple の HankelH2 は \(-\pi < \arg z < \pi \) で定義されている。Maple は \(-2\pi < \arg z < -\pi \) での値、別の言い方をすれば Maple はこの領域での解析接続を計算してくれない。解析接続の近似計算のために Hankel 関数のみたす微分方程式 \( z^2f'' + zf' + (z^2 - \nu^2)f = 0 \) を \( z = -2 - xi \) と変数変換した微分方程式を差分法で数値計算する。Maple の差分法の関数 dsolve, numeric は独立、従属変数とともに実数値しか認めないので、\( f \) を実部と虚部に分けて、連立微分方程式を解く。これが関数 test1() である。（長いプログラムはテキストエディタで書いて、read 'ファイル名'；で読み込む。シンギュラオートでなくその逆向きの記号であることに注意。)

test0:=proc(Nu,RR)
local F,F1,F2,G1,G2;
F:=-(-r-I*x)^2*(p2+I*q2)+(-r-I*x)*I*(p1+I*q1)+(-r-I*x)^2-Nu^2)*(p+I*q);
F:=subs(r=RR,F);
F:=expand(F);
F1:=coeff(F,I,0);
F2:=coeff(F,I,1);
# print(expand(F-F1-F2*I));
G1:=solve({F1=0,F2=0},{p1,q1});
return(G1);
end:

2
vv:=proc(Nu,RR,X)
local Rule,P;
P:=-RR-I*X;
Rule:={x=X,
p=Re(evalf(HankelH2(Nu,P))),
p1=Re(evalf(subs(x=X,diff(subs(z=-RR-I*x,HankelH2(Nu,z)),x)))),
p2=Re(evalf(subs(x=X,diff(subs(z=-RR-I*x,HankelH2(Nu,z)),x$2)))),
q=Im(evalf(HankelH2(Nu,P))),
q1=Im(evalf(subs(x=X,diff(subs(z=-RR-I*x,HankelH2(Nu,z)),x)))),
q2=Im(evalf(subs(x=X,diff(subs(z=-RR-I*x,HankelH2(Nu,z)),x$2))))};
return(Rule);
end:
test1:=proc()
local Eqs,G1,Ans,P,Nu,RR,PP,Rule;
Nu:=1/3;
RR:=2;
PP:=-2;
P:=-RR-PP*I;
Rule:=vv(Nu,RR,PP);
G1:=test0(Nu,RR);
G1:=subs(p=f0(x),p1=f1(x),q=g0(x),q1=g1(x),G1);
print(G1);
Eqs:={diff(f0(x),x)=f1(x),diff(f1(x),x)=p2,
       diff(g0(x),x)=g1(x),diff(g1(x),x)=q2,
       f0(PP)=subs(Rule,p),f1(PP)=subs(Rule,p1),
       g0(PP)=subs(Rule,q),g1(PP)=subs(Rule,q1)};
Eqs:=subs(G1,Eqs);
print(Eqs);
Ans:=dsolve(Eqs,numeric,range=-2..2);
return(Ans);
end:
test1();
A(-2);
A(-1);
A(0);
A(0.1);
A(0.2);
A(0.5);
A(2);
3.039689313
0.11
0.009
-0.31
-3.0473
補足。プログラムを正しく動かすまでには、bug と今に苦労した。たとえば、
最初は方程式の形、初期値の取り方で間違えをした。間違いい発見に使ったプロ
グラムは以下のとおり。

## test0 で導出した方程式が正しいか数値的に調べる。debug 方法 1.
test0a:= proc()
local A,B,RR,Nu;
Nu:=1/3;
RR:=2;
A:=test0(Nu,RR); # p,q,p1,q1,p2,q2 の関係式を求める。
R:=vv(Nu,RR,-2); # p,q,p1,q1,p2,q2 の -RR+2+1 での値を求める。
print(A);
print(R);
return(subs(R,A));
end:

## 3 漸近展開と Stokes 係数の公式を数値的に確かめ
たい

hc:=proc(Nu,z)
local V;
V:=evalf((1+exp(2*Pi*I*Nu))*HankelH1(Nu,z)-HankelH2(Nu,z));
return(V);
end:

# 漸近展開と Stokes 係数の公式を使って arg z > pi の値を計算 . Maple では
# -pi < arg z <= pi なので、argz >= pi の公式のために補正 exp(-2 pi i /2)=-1 を
入れる。
hc0:=proc(Nu,z)
local V;
V:=evalf((1+exp(2*Pi*I*Nu))*hc1(Nu,z,10)-hc2(Nu,z,10));
return(V);
end:

# HankelH1 |Z|>=10, N=10
hc1:=proc(Nu,Z,N)
local V0,i;
V0:=evalf((2/(Pi*Z))^(1/2)*exp(I*(Z-Pi*Nu/2-Pi/4)));
V:=1;
for i from 1 to N do
V:=V+evalf(pochhammer(1/2-Nu,i)*pochhammer(1/2+Nu,i)/
((i!)*(2*I*Z)^i));
od:
return (V0*V);
end:

# HankelH2 |Z|>=10, N=10
hc2:=proc(Nu,Z,N)
local V0,i;
V0:=evalf((2/(Pi*Z))^(1/2)*exp(-I*(Z-Pi*Nu/2-Pi/4)));
V:=1;
for i from 1 to N do
V:=V+evalf((-1)^i*pochhammer(1/2-Nu,i)*pochhammer(1/2+Nu,i)/
((i!)*(2*I*Z)^i));
od:
return (V0*V);
end:
＞read 'han.ml';
＞A:=test1();
＞A(2);
[x = 2., f0(x) = -1.51328441042763684, f1(x) = -1.48735192378470416,
g0(x) = -1.11336029731131414, g1(x) = -1.01637269155876275]
＞hc0(1/3,-10-2*I);
-1.513285354 - 1.113360632 I
＞hc(1/3,-10-2*I);
-1.546315208 - 1.120338558 I

と Hankel 間数を使う方は一致せず、謎... (解決編を参照).
[この section の残りの部分は失敗の記録] ちなみによ
＞evalf(HankelH2(1/3,-10-I*2));
0.03302985750 + .006977927300 I
＞evalf(HankelH1(1/3,-10-I*2));
-1.720841265 + .7538632410 I
＞evalf((1+exp(2*Pi*I*1/3))*HankelH1(1/3,-10-I*2));
-1.513285350 - 1.113360631 I

(1 + e^{2πiν}H^{(1)}_{ν}(z) で見ると値がなぜかほぼ一致。
hc1 と hc2 の値と HankelH1 と HankelH2 を比べるとさらに謎が...
下半平面では不一致、-100-2*I で比べても 10^-(-2)..10^-(-3) の誤差あり。
＞hc1(1/3,-10-2*I,10);
-1.698283277 + .7287475124 I
＞evalf(HankelH1(1/3,-10-2*I));
-1.720841265 + .7538632410 I

(Matlab でもつぎのように計算できる (Maple を疑った...).
＞besselh(1/3,1,-10-2*i)
ans =
-1.7208 + 0.7539i
) 上半平面では近似がよい。
＞hc1(1/3,-10+2*I,10);
0.03302985745 - 0.006977927375 I
＞evalf(HankelH1(1/3,-10+2*I));
0.03302985750 - 0.006977927300 I
下半平面でも実軸から離れていれば近似はよさそう。

\[
> \text{evalf}(\text{HankelH1}(1/3, -10-10*I));
-3579.298446 + 3029.928829 I
\]

\[
> \text{hc1}(1/3, -10-10*I, 10);
-3579.298438 + 3029.928822 I
\]

すこし怪しくなってくる??

\[
> \text{evalf}(\text{HankelH1}(1/3, -10-5*I));
-30.46468777 + 18.24056288 I
\]

\[
> \text{hc1}(1/3, -10-5*I, 10);
-30.46378268 + 18.23923963 I
\]

4 解決編

Stokes 現象の公式の \( H^{(1)}_\nu(z) \) は \( \arg z > \pi \) での値なので、Maple の HankelH1 は直接使ってはいけない。（testh1() のソースは han.ml を参照）。

\[
> \text{read 'han.ml'};
> \text{A:=testh1();} \quad # \text{testh1() は負の実軸を越える解析接続を計算。}\ f0+g0*I=H1
> \text{A(2);}
[x = 2., f0(x) = 1.69828092354717474, f1(x) = 1.64786670065829410, 
\quad g0(x) = -.72874556379356200, g1(x) = -.804190807042612920] 
\]

\[
> -\text{hc1}(1/3, -10-2*I, 10);
-\text{hc1}(1/3, -10-2*I, 10); 
1.698283277 + .7287475124 I
\]

\[
> \text{evalf}(\text{HankelH1}(1/3, -10-2*I)); \quad # \text{符号を変えても一致せず。}
> \text{evalf}(\text{HankelH1}(1/3, -10-2*I));
-1.720841265 + .7538632410 I
\]

なお \( H^{(1)}_\nu(z) \) の渐近展開は \(-\pi < \arg z < \pi\) で \( \text{hc1, } \pi < \arg z < 2\pi\) で 
\(-\text{hc1}\) であるが、\(-\pi < \arg z < 0\) ではあまり近似がよくないようだ。