やりたいことの例による説明

$$g(x,t) = e^{xt - t^3}$$

問　$f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$ は x の関数としてどんな関数か？

$x \in [0,5]$ における $f(x)e^{-x+1}$ の最小値を求めよ。

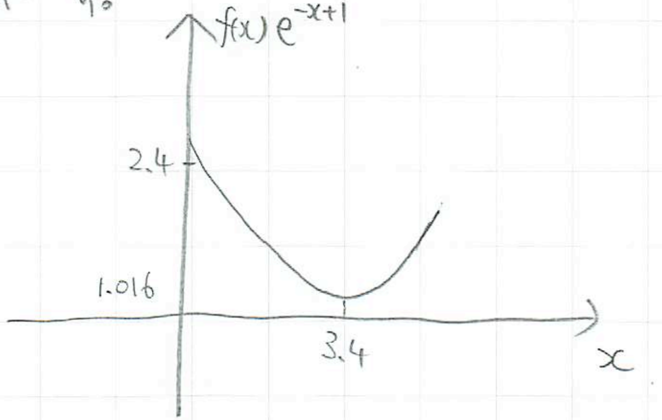
$x - 3t^2 = 0$

$f(x) \fallingdotseq e^{x\sqrt{x/3} - (\sqrt{x/3})^3}$

最小値 $x=3$ あたり.

Step 1. （微分作用素環 D のアルゴリズムで）$f(x)$ のみたす微分方程式を求める。

Step 2. 上の方程式からさらに $f(x)e^{-x+1}$ のみたす微分方程式を求め、差分法で近似的に解くことにより最小値をさがす。



Step1.

$\boxed{1}$ $g(x,t)$ のみたす線型微分方程式系を求める。

$\boxed{2}$ 上から. $\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ が x についてみたす線型微分方程式系を求める。

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (x-3t^2)g \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} - x + 3t^2 \quad \text{——— ①}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = t g \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} - t \quad \text{——— ②}$$

Prop [Oaku, p.166] [SST, p227] ↙ 積分消去

$$\left[l\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t} l_1\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] \cdot g = 0 \quad \text{——— ③}$$

$$\Rightarrow \quad l \cdot \int_a^b g(x,t)dt + \left[l_1 \cdot g \right]_a^b = 0$$

∵

$$\int_a^b \left(l\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t} l_1 \right) \cdot g\, dt = 0 \qquad \therefore \ l \int_a^b g(x,t)dt + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(l_1 \cdot g)\, dt}_{= \left[l_1 \cdot g \right]_a^b} = 0 \qquad //$$

①②より③の形の微分作用素をつくればよい。← Gröbner basis.

tをけす

① $+3t\times$②

$$\frac{\partial}{\partial t}-x+3t\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{------} ④$$

④$+3\frac{\partial}{\partial x}$②

$$\frac{\partial}{\partial t}-x+3\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Prop より. $\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x\right)\cdot f(x)+\left[e^{xt-t^3}\right]_0^{+\infty}=0$

つまり $\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x\right)\cdot f(x)=1$

Step 2. $\tilde{f}(x)=f(x)e^{-x+1}$ のみたす方程式

$$\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2}+6\frac{\partial}{\partial x}+(3-x)\right)\cdot\tilde{f}(x)=e^{-x+1} \quad \text{------} ⑤$$

$\tilde{f}(0)\fallingdotseq 2.427$ ← 数値積分.

$\tilde{f}'(0)\fallingdotseq -1.200$

⑤を差分法で解いて、最小値の近似値を求る。

ex1.ml

holonomic 関数.

より複雑なパラメータ付積分でも使える。

Step 1. を D のイデアルの概念で整理

$D = \mathbb{Q}\langle x, t, \partial_x, \partial_t \rangle$ 微分作用素環

t 私 tをけす。
(たかや案)

∂_t 家内が左ならのさす。

$\partial_t t = t\partial_t + 1$ $\partial_t x = x\partial_t$ $xt = tx$

$\partial_x x = x\partial_x + 1$ $\partial_x t = t\partial_x$ $\partial_x\partial_t = \partial_t\partial_x$

Dの元は x, t の関数に作用する。

$\partial_x \cdot f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}$ $\partial_t \cdot f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}$

$x \cdot f(x,t) = x f(x,t)$, $t \cdot f(x,t) = t f(x,t)$

$I = \mathrm{Ann}_D f = \{ \ell \in D \mid \ell \cdot f = 0 \}$

I は D の左イデアル. つまり. $\ell_1, \ell_2 \in I \Rightarrow \ell_1 - \ell_2 \in I$
$\ell \in I, \tilde{\ell} \in D \Rightarrow \tilde{\ell}\ell \in I$

有限生成

積分消去で $\ell(x, \partial_x)$ をみつけることは.

cf. 消去法
[CLO, 2章3章]

$(\underset{\text{左}}{I} + \underset{\text{右}}{\partial_t D}) \cap \mathbb{Q}\langle x, \partial_x \rangle$ の生成元をみつけることに他ならない。

積分消去のアルゴリズム, 適用範囲 (どんな積分に使えるのか?)

<u>Def</u> [SST, §1.1] $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ $u_i+v_i\geq 0$

$(u,v)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ weight ベクトル

$$\mathrm{in}_{(u,v)}\Bigl(\overbrace{\sum c_{\alpha\beta st}\, x^\alpha t^\beta \partial_x^s \partial_t^t}^{\ell}\Bigr)$$

$= \underbrace{\alpha u_1+\beta u_2+s v_1+t v_2}_{\text{べキと}(u,v)\text{の内積}}$ が最大となる ℓ の項の和

initial term とよぶ

ただし

$u_1+v_1>0$ なら、∂_x を ξ に

$u_1+v_1=0$ 〃 ∂_x は ∂_x のまま

t も同様 $\partial_t\to\eta$

$\mathbb{Q}[x,t,\xi,\eta]$

<u>例</u> $\mathrm{in}_{(0,1,0,-1)}(\overset{-1}{\partial_t} - \overset{0}{x} + \overset{2}{3t^2}) = 3t^2$

$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(\partial_t - x+3t^2)=\eta$.

◎ 順序 $\overset{\to\,\mathrm{def}}{<}_{(u,v)}$ について、多項式環のグレブナ基底とほぼ同様の議論が可能

Th [SST, Th 1.1.6] G を D の左イデアル I の $<_{(u,v)}$ についての Gröbner basis とすると、$\{\mathrm{in}_{(u,v)}(g)\mid g\in G\}$ が $\mathrm{in}_{(u,v)}(I)$ の生成元

← initial ideal

Def. Dの左イデアル I が holonomic イデアル [SST, p.29]

$I \neq \langle 1 \rangle$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I) \subset \mathbb{Q}[x,t,\xi,\eta]$ のKrull次元が2

Th (Bernstein不等式) [Björk 一章], [SST, Chap 2], [堀田 代数入門 5章]

$D \supsetneq I \Rightarrow \dim \mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I) \geq 2$

◦ $J \subset \mathbb{Q}[x,t,\xi,\eta]$ の(Krull)次元とは？

$V(J) = \{ (p,q,r,s) \in \mathbb{C}^4 \mid f(p,q,r,s)=0 \text{ for all } f \in J \}$ の次元 ←直観的

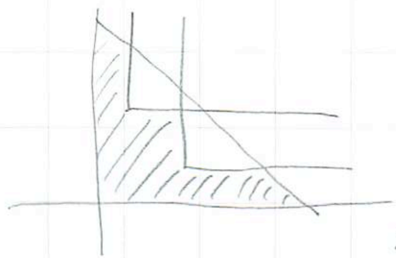
Jが0次元 $\Leftrightarrow$ $V(J)$が有限個の点のあつまり

F_k = 全次数がk以下の多項式

$\dim_{\mathbb{Q}} F_k$ = $\alpha+\beta+s+t \leq k$ をみたす $(\alpha,\beta,s,t) \in \mathbb{N}_0^4$ の個数

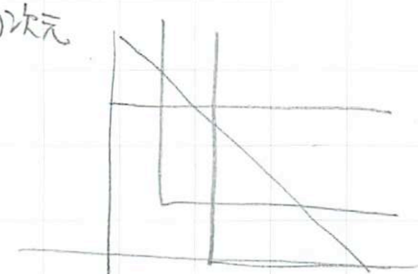
$= \binom{k+4}{4}$ = kの4次式

$\dim_{\mathbb{Q}} F_k / J \cap F_k$ は kが十分大でkの多項式　この多項式の次数をKrull次元とよぶ。



k次以下の std monomial の個数

0次元



$H(k)$ = 定数

☆ 0次元 $\Leftrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbb{Q}[x,t,\xi,\eta]}{J} < +\infty$.

例. $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(\partial_t - x + 3t^2) = \eta$, $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(\partial_x - t) = \xi$

$\dim \langle \xi, \eta \rangle = 2$. $I = \langle \partial_t - x + 3t^2, \partial_x - t \rangle$ は holonomic ideal

$\cap$

$\mathbb{Q}[x, t, \xi, \eta]$

Th [Björk. 一章]

I が holonomic 行アル $\Rightarrow$ $(I + \partial_t D) \cap \mathbb{Q}\langle x, \partial_x \rangle$ は $\mathbb{Q}\langle x, \partial_x \rangle$ の

holonomic ideal or trivial ideal (全体)

$\to \dim = 1$

Fourier 変換 (Laplace 変換) [Oaku, p.88]

$F : t \longmapsto -\partial_t$, $\partial_t \longmapsto t$ 　　 D の環準同型 　　 t が左なのでみやすい。

$(I + \partial_t D) \cap \mathbb{Q}\langle x, \partial_x \rangle = (F(I) + tD) \cap \mathbb{Q}\langle x, \partial_x \rangle$ 　　 制限消去.

$\mathbb{C}^n$ の Zariski open set

<u>Def.</u> $(\mathbb{C}^n \setminus V)$ 上の (多価) 正則関数 f が holonomic 関数 とは. $\exists I$ holonomic ideal

$\subset \mathbb{Q}\langle x_1, \cdots, x_n, \partial_1, \cdots, \partial_n \rangle$ s.t. $\ell \cdot f = 0$ for all $\ell \in I$. 　　 ☆ $+, *, \int$ について安定

<u>例.</u> $n=1$. 線型 O.D.E. の解となってる (特殊) 関数, $n \geq 1$ $(多項式)^{\alpha} \cdot e^{多項式}$ は holonomic 関数.

Th-Alg. [Oaku, p.145–p.159] [SST, p.119–p.211]

制限消去は以下の手続きで計算可能

① I の $(0,-1,0,1)$-Gröbner 基底を計算（∂_t をけす）

生成元を $g_1, \cdots, g_p$ とする。

② $0 \le i \le m_j$ に対して

$$\partial_x^i g_j = \sum_s l_{js}^i(x,\partial_x)\partial_t^s + t(\cdots) \text{ と書く。}$$

$\sum_s l_{js}^i(x,\partial_x)\partial_t^s$ 達から ∂_t^s, $s \ge 1$ を消去

↑ $\mathbb{Q}\langle x,\partial_x\rangle$ 自由加群の元とみなす。$\partial_t^{\circledS}$ をかけてはいけない。

[CLO2, 5章]

m_j のとり方

$\theta_t = t\partial_t$

$I \cap \mathbb{Q}[\theta_t]$ の生成元を $l(\theta_t)$ とする。

$l(s)=0$ が非負整数根をもたない。$\Longrightarrow$ 制限は trivial（全体）

r_0 が $l(s)=0$ の最大整数根

$m_j + \mathrm{ord}_{(0,-1,0,1)} g_j = r_0$

となるように m_j をえらぶ。

例. $t - x + 3\partial_t^2 = \underline{3\partial_t^2} - x + t = g_1$

$\underline{\partial_t} + \partial_x = g_2$

$$Sp(L_1, L_2) = L_1 - 3\partial_t L_2 = -x + t - 3\partial_t\partial_x \xrightarrow[L_2]{} -x + t - 3\partial_x^2 = g_3 \qquad g_4 = \cdots$$

Step 2.

$$D = \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle \supset J$$

例 $f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt+yt^2-t^4} dt$

$f(x,y)e^{-x-y}$ も holonomic fct.

Prop. J が holonomic ideal $\Rightarrow$ $J \cap \mathbb{Q}[x, y, \partial_x] \neq \{0\}$

∵

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \sum_{\alpha+\beta+s+t \leq k} c_{\alpha\beta st}\, x^\alpha y^\beta \partial_x^s \partial_y^t \right\}$$

$$\mathcal{G}_k = \left\{ \quad \cdot\cdot \quad x^\alpha y^\beta \xi^s \eta^t \right\}$$

$\mathbb{Q}$-線型写像

$$g : \mathcal{F}_k \cap \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_x \rangle \longrightarrow \mathcal{G}_k / \mathcal{G}_k \cap \mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(J)$$ を考える。

$$\ell \longmapsto \mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(\ell)$$

$\binom{k+3}{3} = O(k^3)$

$\dim_{\mathbb{Q}}$ 右 $= O(k^2)$ $\quad k \gg 0$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}\, g + \underbrace{\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Im}\, g}_{\leq O(k^2)} = O(k^3)$$

$\therefore \mathrm{Ker}\, g \neq \{0\}$ //

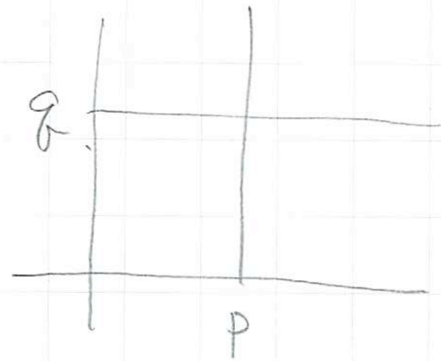
$R = \mathbb{Q}(x,y)\langle \partial_x, \partial_y \rangle$　　　　Rで G.b. の理論 OK.

$\underbrace{\mathbb{Q}(x,y)}_{\text{有理式}}$

<u>Prop</u> J が holonomic $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J < +\infty$

∵
$J \cap \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_x \rangle \ni a(x,y)\partial_x^{p} + \cdots$

$J \cap \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_y \rangle \ni b(x,y)\partial_y^{q} + \cdots$



$\dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J \leq pq$ //

以下、例で説明

$J\cdot f = 0$ とする。　　RJ の std monomial を $1, \partial_x, \partial_y$ とする。

Ⓐ
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x\cdot f \\ \partial_y\cdot f \end{pmatrix} = {}^{\exists}A(x,y)\begin{pmatrix} f \\ \partial_x\cdot f \\ \partial_y\cdot f \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \partial_x^2 \text{ の normal form} \\ \leftarrow \partial_x\partial_y \quad 〃 \end{matrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x\cdot f \\ \partial_y\cdot f \end{pmatrix} = {}^{\exists}B(x,y)\begin{pmatrix} f \\ \partial_x\cdot f \\ \partial_y\cdot f \end{pmatrix} \end{cases}$$

<u>Th</u>・f は holonomic 関

・$[a,b]\times[c,d]$ に特異点なし.

・$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0)$ となる点は1点のみ、ここで最小値

・初期値計算できる.

Ⓐを用いて、最小値をさがせる。