

A, B を $r \times r$ 行列値の x, y の形式巾級数とする. つまり,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,q \in \text{bf } N_0^2} A_{pq} x^p y^q \\ A &= \sum_{p,q \in \text{bf } N_0^2} B_{pq} x^p y^q \end{aligned}$$

とかけているとする. 以下 p, q が動く範囲が文脈から明らかな時は省略する.

定理 1 積分可能条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} + AB = \frac{\partial B}{\partial x} + BA$$

が成立すると仮定する. C を $r \times r$ の定数行列とする. このとき,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AF, \frac{\partial F}{\partial y} = BF, F(0,0) = C \quad (1)$$

をみたす x, y の行列値形式巾級数 F が一意的に存在する.

以下, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$ と略記する. $F = \sum F_{m,n} x^m y^n$ において, 上の微分方程式系に代入すれば $F_{0,0} = C$ から $F_{m,n}$ を決めていく漸化式 (差分方程式) が得られる. 実際にこの漸化式を求めてみよう. 漸化式を求めるには, $x\partial_x x^m y^n = m x^m y^n$, $y\partial_y x^m y^n = n x^m y^n$ の関係式を使うのが便利である. $\partial_x F = AF$ の両辺に x をかけて, $x\partial_x F = xAF$. 上の関係式を使えば,

$$x\partial_x F = \sum m F_{m,n} x^m y^n$$

である. 一方

$$\begin{aligned} xAF &= x \left(\sum A_{p,q} x^p y^q \right) \left(\sum F_{r,s} x^r y^s \right) \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}_0^2} x^{m+1} y^n \sum_{p+r=m, q+s=n} A_{p,q} F_{r,s} \end{aligned}$$

となる. $x^{m+1} y^n$ の係数を比較すると

$$F_{m+1,n} = \sum_{p+r=m, q+s=n} A_{p,q} F_{r,s} \quad (2)$$

を得る. 同様に $\partial_y F = BF$ より,

$$F_{m,n+1} = \sum_{p+r=m, q+s=n} B_{p,q} F_{r,s} \quad (3)$$

を得る.

練習.

(1) (3) を導出せよ (なるべく詳しく書くように).

さて、ここで問題になるのは、漸化式が多すぎることである。たとえば、 $F_{1,1}$ を決定するのに、 $F_{0,0}$ から (2) で $F_{1,0}$ をきめてそれから (3) で $F_{1,1}$ をきめてもいいし、 $F_{0,0}$ から (3) で $F_{0,1}$ をきめてそれから (2) で $F_{1,1}$ をきめてもいい。このときどちらのきめた方でも $F_{1,1}$ は一意的に決まることをいわないといけない。これに使われるのが積分可能条件である。

練習.

積分可能条件がみたされないと、 $F_{1,1}$ が一意的にきまらないかもしれない。そのような A, B の例を具体的にあげよ。

したがって、ここではまず解 F が存在することを変換で示す。方針は以下のとおり。

1. F を $(1 - x^m y^n Q_{m,n})G$ で変換して、 G についての方程式を求める。
2. G についての方程式も積分可能条件を満たすことを示す。ヒント 1: 正方行列 P, Q に対して $(PQ)' = P'Q + PQ'$ なので、とくに Q を P の逆行列にとると、 $(P^{-1})' = -P^{-1}P'P^{-1}$ が成り立つ。ヒント 2: $H = (1 - x^m y^n Q_{m,n})$ において議論しないと計算が煩雑。
3. 定数行列 $Q_{m,n}$ をうまく選び、1 の変換を合成して方程式を $\partial_x F = 0, \partial_y F = 0$ に変換できることを示す。

練習.

一旦解の存在が保証されたら、実際の計算には漸化式で解をきめれば十分である。積分可能条件をみたす A, B の例を与え、その解を作れ。