数学通論 確認テスト 2, 答案の解説

問 2.1 実数成分の 2×2 行列 A が与える $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像

$$f_A : \mathbf{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$$

が全単射である必要十分条件 (これは証明も).

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. $|A| = ad - bc$ と定義.
必要十分条件としては (1) “A に逆行列が存在する”, (2) “$|A| \neq 0$”, などがある.
“(1) ならば f_A が全単射”, “(2) ならば f_A が全単射” の証明は, レポート 4 の解答編をみよ. 証明が半分できていれば一応合格となっている. 再試験の人はまずこの証明をよく理解しておこう. 逆の証明は線形代数の基本である. 合格だった人も逆の証明をよく考えておこう. 逆の証明の例を以下に書く.

“f_A が全単射ならば (2)” を証明しよう. f_A が全射なので, $f_A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および $f_A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ が存在する. $B = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ とおくと f_A の定義から, $AB = E$ である. $|AB| = |A|\,|B|$ が一般の 2×2 行列 A, B に対して成り立つことに注意すると (計算で確かめる. この解説の最後に計算の概要を掲載.), $AB = E$ より $|A|\,|B| = |E| = 1$ である. よって $|A| \neq 0$.

(注意: この証明から f_A が全射ならば単射であることがわかる. これは一次変換特有の驚愕すべき性質であるといえよう.)

次に “f_A が全単射ならば (1)” を証明しよう. (注意: 上で, $AB = E$ なので B が逆行列と結論はできない. $AB = BA = E$ となる行列 B があればそれを A の逆行列というが, $BA = E$ が言えてない.) 上の議論で $|A| \neq 0$ なので, 逆行列の公式から A には逆行列が存在する. なお $AB = E$ に左から A^{-1} をかけると $B = A^{-1}$ を得る.

その他いろいろな解答があり得る. 何通りも証明を考えてみるのは線形代数のよい演習である.

次の証明 “f_A が全単射ならば (2)” は不完全である. 不完全な点を指摘せよ.

“f_A が全単射のとき $|A| \neq 0$” の対偶は “$|A| = 0$ ならば, f_A は 全射でない かまたは 単射でない”. 対偶を証明する. $|A| = 0$ なので, ある実数 k が存在して $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ となる. よって $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(kx+y) \\ d(kx+y) \end{pmatrix} = (kx+y)\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. x, y が実数全体を動いても, これは原点を通る直線上しか動かない. よって全射でない.

これは図形的な証明で全射ということを直感的に理解しているよい証明だと思うが, 残念ながら, “$|A| = 0$ なので, ある実数 k が存在して $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ となる.” で場合分けが足りない. $b \neq 0, d \neq 0$ ならば, $ad = bc$ より $a/b = c/d$ なので $k = a/b = c/d$ とおけばよいので上の解答で OK. $b = 0$ または $d = 0$ の場合を別途考える必要がある. $b = 0$ なら $ad = 0$ となる. $a = 0$ なら $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ なので像の x 座標は常に 0. よって f_A は全射でない. $d = 0$ なら $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ なので像は $x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (x は任意定数) の形にかける. よって像は原点をとおる直線上しか動かないのでやはり f_A は全射でない. $d = 0$ の場合も同様に f_A が全射でないことを言える.

$|AB| = |A||B|$ の証明.
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと $AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$.
$|AB| - |A||B| = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) - (ad-bc) - (ps-qr) =$ 計算して $= 0$.