A-超幾何方程式系の Pfaffian 系

日比孝之, 大阪大学/JST CREST
西山絢太, 大阪大学/JST CREST
高山信毅, 神戸大学/JST CREST

2013.03.20, arxiv:1212.6103

$$\boxed{f'' + xf = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix} F}$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}.$$

問題: 連立線形偏微分方程式系ではどのように書き換える?

例: cos(xy) の方程式系

$$
\begin{aligned}
(\partial_x^2 + y^2) f &= 0 \\
(\partial_y^2 + x^2) f &= 0 \\
(x\partial_x - y\partial_y) f &= 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$
$F = (f, \partial_y \bullet f)^T$ とおくと

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & y/x \\ -xy & 1/x \end{pmatrix} F, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix} F
$$

Pfaffian 系

問題設定

有理式係数の微分作用素環

$$R_n = \mathbf{C}(s,x)\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle. \quad (1)$$

I を R_n の左イデアルとする．$R_n/(R_n I)$ を体 $\mathbf{C}(s,x)$ の上のベクトル空間とみなす．この次元が有限値 r だとする．その基底は解空間の基底, Pfaffian 系の基底とみなすことができる．
$u_1, \ldots, u_r$ を基底, f を I の 解とするとき, $F = (u_1 f, \ldots, u_r f)$ とおくと,

$$\partial_i F = P_i F$$

となる有理式成分の行列 P_i が存在する．

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} + P_i P_j = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + P_j P_i \quad (2)$$

問題 1: $\{u_i\}$ を求めよ．問題 2: P_i を求めよ．
応用: Fisher の最尤推定法のための Holonomic Gradient Descent ([N_3OST_2; 2011]).

先行研究

1. R_n のグレブナ基底を用いる．一般的にできる．パッケージ yang.rr (Risa/Asir) [小原; 2004].
2. Lauricella の多変数超幾何関数 F_D, たとえば [岩崎-木村-下村-吉田; 1991] (typo あり).
3. 解に積分表示がある場合．Twisted cohomology の基底計算による方法 [青本], [三町], ...
4. Twisted cohomology の intersection number による方法 [松本など; 2011–].

材料: 整数成分の $d \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$. A の第 i 列ベクトル a_i を $\mathbf{Z}^d$ の元とみたとき, この列ベクトル達は $\mathbf{Z}^d$ を生成していると仮定. $s_1, \ldots, s_d$ を不定元. 微分作用素環

$$D[s] = \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_d]\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$$

において

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\partial_j - s_i =: E_i - s_i, \qquad (i = 1, \ldots, d) \tag{3}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \partial_i^{u_i} - \prod_{j=1}^{n} \partial_j^{v_j} \tag{4}$$

(u, v は $Au = Av$ を満す, すべての $u, v \in \mathbf{N}_0^n$, $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$)

により生成される左イデアルを $H_A[s]$ と書く. (4) により生成されるイデアルを affine toric ideal といい, I_A と書く. この方程式系は A-超幾何方程式系, または GKZ-方程式系 (GKZ = Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky) とよばれている.

結果 1

$H_A[s]$ の基底は次のように計算できる.

Theorem

$w \in \mathbf{Z}^n$ を *affine toric ideal* I_A に対する *generic* な重みベクトルで $\deg \mathrm{in}_w(I_A) = \deg I_A$ となるものだとする. $\mathrm{in}_w(I_A)$ および $E_i - s_i$, $(i = 1, \ldots, d)$ が R_n で生成する左イデアルを J とおく. J のグレブナー基底の *standard monomials* の集合が $u_1, \ldots, u_r$ であるとき, 集合 $\{u_1, \ldots, u_r\}$ はベクトル空間 $R_n/(R_n H_A[s])$ の基底となる.

J (より簡単な ideal, 本質的に可換環の ideal) の基底で, $H_A[s]$ の基底が書ける. 主部できまる

例: $x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4 - s_1$, $x_2\partial_2 + x_4\partial_4 - s_2$, $x_3\partial_3 + x_4\partial_4 - s_3$, $I_A = \langle \underline{\partial_1\partial_4} - \partial_2\partial_3 \rangle$. $w = (1, 0, 0, 0)$.
$J = \langle E_i - s_i$ および $\partial_1\partial_4 \rangle$. $u_1 = 1$, $u_2 = \partial_4$. 計算機でのデモ.

発展

1. 訂正: 予稿の定理２はあやまり. $E(3,6)$ で反例?
2. Order polytope に付随する A-超幾何系.
3. $E(k,n)$ の twisted cohomology の基底構成. J の standard monomials を可換環論的に決定する.

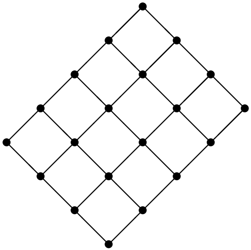

Figure:

参考文献

1. JST CREST 日比チーム編, グレブナー道場, 共立出版, 2011.
2. T. Hibi, K. Nishiyama, N. Takayama, Pfaffian Systems of A-Hypergeometric Systems, arxiv:1212.6103
3. [$N_3 3OST_2$] H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, A. Takemura ; Holonomic gradient descent and its application to Fisher-Bingham integral, Advances in Applied Mathematics 47 (2011), 639–658.
4. M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, Springer, 2000.