2013 年 5 月 23 日
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2013/calc1/ref.html

Laudau の O (大文字) の公式

m, n を非負整数とするとき
$$O(x^m) \pm O(x^n) = O(x^{\min(m,n)})$$
が $x \to 0$ で成り立つ.

証明. $f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$ と置く. $m, n \geq 0$ である. O の定義から, ある定数 $M, N, 0 < \delta < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta$ において, $|f(x)/x^m| < M$ および $|g(x)/x^n| < N$ が成り立つ. 以下, $m \geq n$ として一般性を失わない.
$$|(f(x) \pm g(x))/x^n| \leq |f(x)/x^n| + |g(x)/x^n|$$
が成り立つ. ここで $|x| < \delta < 1$ なので, $m \geq n$ より $|1/x^m| \geq |1/x^n|$. したがって,
$$|f(x)/x^n| + |g(x)/x^n| \leq |f(x)/x^m| + |g(x)/x^n| \leq M + N$$
O の定義より, $f(x) \pm g(x) = O(x^n)$. $\square$

n, m を整数とする. このとき
$$x^m O(x^n) = O(x^{m+n})$$

証明. $g(x) = O(x^n)$ と置く. O の定義から, ある定数 $N, 0 < \delta < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta$ において, $|g(x)/x^n| < N$ が成り立つ. 今 $|x^m g(x)/x^{m+n}| < N$ が成り立つので, これは $x^m g(x) = O(x^{m+n})$ を意味する. $\square$
注意: $O(x^n)/x^m = O(x^{n-m})$ だが, $O(x^n)/O(x^m) = O(x^{n-m})$ とは限らない. 反例は o (小文字) の場合と同様. たとえば $x^2 = O(x^2) = O(x) = O(1)$, $x = O(x)$ である (O の定義を満してる). x/x^2 に $x^2 = O(x)$ と思い公式を適用すると $x/x^2 = O(x^{1-1}) = O(1)$ となってしまうが, x/x^2 は $x \to 0$ で無限大に発散する.

2013.05.28 補足
上記の

> $f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$ と置く. $m, n \geq 0$ である. O の定義から, ある定数 $M, N, 0 < \delta < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta$ において, $|f(x)/x^m| < M$ および $|g(x)/x^n| < N$ が成り立つ.

の部分はもうすこし詳しく書くと, 以下のようになる.
$f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$ と置く. $m, n \geq 0$ である. O の定義から, ある定数 $M, 0 < \delta_1 < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta_1$ において, $|f(x)/x^m| < M$ が成り立つ. 同じく, O の定義から, ある定数 $N, 0 < \delta_2 < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta_2$ において, $|g(x)/x^n| < N$ が成り立つ. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと, $0 < |x| < \delta$ において, $|f(x)/x^m| < M$ および $|g(x)/x^n| < N$ が成り立つ.

2013.05.28 補足 2
$o(x^n)$ とは異り, $\lim_{x\to 0} O(x^n)/x^n = M$ とは限らない. $O(x^n)/x^n$ は $x = 0$ の近傍で有界となるだけ.
$x^m O(x^n) = O(x^{m+n})$ の証明.
$f(x) = O(x^n)$ と置く. O の定義から, ある定数 $M, 0 < \delta < 1$ が存在して, $0 < |x| < \delta$ において, $|f(x)/x^n| \leq M$ がなりたつ. よって, $0 < |x| < \delta$ において,
$$\left|\frac{x^m f(x)}{x^{m+n}}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \leq M$$

が成り立つ．これは $x^m O(x^n) = O(x^{m+n})$ を意味する．これは m が負の時も成り立つことに注意.
補足.

$$O(x^m)O(x^n) = O(1)x^m O(x^n) = O(1)O(x^{m+n}) = O(x^{m+n})$$