

## 超幾何関数と統計への応用

2013年9月2日,3日.

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2013/hgs-2013>

問 1.1 [10]  $F_k = \{(m_1, m_2) \in \mathbf{N}_0^2 \mid m_1 + m_2 \leq k\}$  と置く.  $p, q \in \mathbf{N}_0^2$  の時,  $F_k \setminus (p + \mathbf{N}_0^2) \cup (q + \mathbf{N}_0^2)$  の要素の数を  $k$  の多項式として表せ ( $k$  が十分大きいとき).  $n$  変数の時に同様な数えあげをすると?

問 1.2 [10] 微分作用素環  $\mathbf{Q}\langle x, \partial \rangle$  において次の等式を示せ.

1.  $x^k \partial^k = \theta(\theta - 1) \cdots (\theta - k + 1)$ , ここで  $\theta = x\partial$ .
2.  $b(\theta)x^k = x^k b(\theta + k)$ . ここで  $b(\theta)$  は変数  $\theta = x\partial$  の一変数多項式.
3.  $\partial^k x^k = x^k \partial^k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} (k(k-1) \cdots (k-i+1))^2 x^{k-i} \partial^{k-i}$ .

問 1.3 [10]  $e^{xt-t^n}$  の満す微分方程式系の  $t$  についての積分イデアルを計算せよ.

問 1.4 [15]  $\int_0^{700} T_{500}(t) dt$  の値を適当なプログラム言語で近似計算せよ.

問 1.5 [20]

1. 不完全ガンマ関数を合流型超幾何級数  ${}_1F_1(a, c; x)$  で表せ.
2. この級数の隣接関係式 ( $a, c$  についての漸化式) を用いて不完全ガンマ関数の連分数表示を一つ求めよ.

問 1.6 [45] 多次元正規分布に対する  $\chi^2$  分布相当のものを考察すると行列引数の超幾何関数  ${}_1F_1$  が得られる. 古典的  ${}_1F_1$  のモノミアルを zonal 多項式に, 積分領域を positive definite symmetric matrix のある集合にすると, 積分表示と級数展開が得られる. この多変数関数に現代的な超幾何関数論の種々の手法を適用して新しい公式達を導きだせ.

参考:

1. A.G.Constantine, Some Non-Central Distribution Problems in Multivariate Analysis, The Annals of Mathematical Statistics 34 (1963), 1270-1285.
2. H.Hashiguchi, Y.Numata, N.Takayama, A.Takemura, The holonomic gradient method for the distribution function of the largest root of a Wishart matrix, Journal of Multivariate Analysis, 117, (2013) 296-312.

参考書

1. D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer. 日本語訳もあり. グレブナー基底の基礎を知るにはこの本の1章を読んでから次のグレブナー道場の1章を読む, のが一つの方法.
2. JST CREST 日比チーム, グレブナー道場, 共立出版.
3. Björk, Rings of Differential Operators. この本の一章で Weyl 代数の初歩.
4. 大阿久, D 加群と計算数学, 朝倉.
5. T.Kimura, Hypergeometric Functions of Two Variables. ネットで検索して下さい. ガウスの超幾何関数を含む多変数超幾何関数の入門書.
6. 竹村, 統計, 第2版, 共立. R システムを用いた統計の入門書.
7. 小針, 確率・統計入門, 岩波. 上記の本に書いてない証明等がきちんと書いてある.