多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 1

松本　圭司 (北海道大学)

Sep. 02,03, 超幾何学校 2013, 神戸大学理学部

0　Introduction

Gauss の超幾何級数

$$F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)}x^n,\quad (a,n)=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$$

は, $c\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$ のとき $\{x\in\mathbb{C}\mid |x|<1\}$ 上の正則関数を定める. この正則関数は, 積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_1^{\infty}t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a}\frac{dt}{t-1}$$

$(\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0)$ を持つ. ものの本に載っている積分表示は, 積分区間が $[0,1]$ になっているものが多いが, それに変数変換 $t\mapsto 1/t$ を施すとこの表示が得られる. そしてこの正則関数は, 超幾何微分方程式

$$\left[x(1-x)(\frac{d}{dx})^2+\{c-(a+b+1)x\}(\frac{d}{dx})-ab\right]f=0 \tag{1}$$

をみたす. この微分方程式は, Pfaffian 方程式と呼ばれる 1 階連立微分方程式系 $d\mathbf{f}=\Omega\mathbf{f}$ と同値である, ここで

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} F(a,b,c;x) \\ \frac{d}{dx}F(a,b,c;x)\end{pmatrix},\quad \Omega=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ab}{x(1-x)} & -\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)}\end{pmatrix}dx.$$

未知関数 $\mathbf{f}$ を $G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{x-1}{b}\end{pmatrix}$ により $\varphi=G\mathbf{f}$ に変換すると φ のみたす Pfaffian 方程式は

$$\begin{aligned} d\varphi &= dG\cdot\mathbf{f}+G\cdot d\mathbf{f}=dG\cdot G^{-1}\varphi+G\Omega G^{-1}\varphi \\ &= \left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ -a & -c\end{pmatrix}\frac{dx}{x}+\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & c-a-b\end{pmatrix}\frac{dx}{x-1}\right]\varphi\end{aligned}$$

となる. なお, 変換行列 G や $d\log x = \frac{dx}{x}$, $d\log(x-1) = \frac{dx}{x-1}$ の係数行列の幾何学的な意味については, 超幾何学校 2014 で解説する予定である.

領域 $X = \mathbb{C} - \{0,1\}$ の任意の点 x の小さな近傍 U_x では, (1) の１価正則な解全体 $Sol(U_x)$ は 2 次元の線型空間となる. 点 $\dot{x}$ を開区間 $(0,1)$ からとり固定. 点 $\dot{x}$ を始点とする X 内の曲線 γ に沿って, $Sol(U_{\dot{x}})$ の任意の元 f は解析接続できる. 道 γ と γ' が X で homotopic であれば, ２つの曲線に沿った f の解析接続は一致する. 道 ρ が $\dot{x}$ を始点とする loop の場合, ρ に沿って解析接続した $\mathcal{M}_\rho(f)$ は一般には元の f と一致しないが, $Sol(U_{\dot{x}})$ の元になっていて

$$\mathcal{M}_\rho(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{M}_\rho(f_1) + c_2 \mathcal{M}_\rho(f_2)$$

$(f_1, f_2 \in Sol(U_{\dot{x}}),\ c_1, c_2 \in \mathbb{C})$ をみたすので, $\mathcal{M}_\rho$ は $Sol(U_{\dot{x}})$ の線型変換である. loop ρ のあとに loop ρ' をつないでできる loop を $\rho' \cdot \rho$ とすると

$$\mathcal{M}_{\rho'\cdot\rho}(f) = \mathcal{M}_{\rho'}(\mathcal{M}_\rho(f))$$

をみたす. つまり $\pi_1(X, \dot{x}) \ni \rho \mapsto \mathcal{M}_\rho \in GL(Sol(U_{\dot{x}}))$ は, 群としての準同型写像となる. これを超幾何微分方程式 (1) のモノドロミー表現という. 領域 X の基本群は $\dot{x}$ を出発して 0 を正の向きに１回まわる loop ρ_0 と 1 を正の向きに１回まわる loop ρ_1 で生成される. 線型変換 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{\rho_0}$ と $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{\rho_1}$ の $Sol(U_{\dot{x}})$ 基底の取り方によらない表示を与える. $Sol(U_{\dot{x}})$ の基底を指定して $\mathcal{M}_0$ と $\mathcal{M}_1$ のその基底に関する表現行列 M_0 と M_1 も与える. 表現行列 M_0 と M_1 については古くからよく知られている. しかし, 基底の取り方によらない表現 $\mathcal{M}_0$ と $\mathcal{M}_1$ についてはあまり扱われていない. それらを超幾何微分方程式の解の積分表示に関する twisted homology group についての交点形式を用いて鏡映として表示する.

前半の講義では, twisted homology group と交点形式ついて解説をし, 後半の講義で超幾何微分方程式のモノドロミー表現を決定し, ２変数幾何微分方程式系 $\mathcal{F}_1$ のモノドロミー表現についても解説する予定である. また, 演習では, 交点数の計算, モノドロミー表現の計算, その他の多変数超幾何微分方程式系のモノドロミー表現についても言及する.

1 ねじれ Stokes 定理

超幾何関数 $F(a,b,c;x)$ の積分表示で現れる $\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0,1,x\}$ 上の多価正則 1 次形式 $u(t)\varphi(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a} = (t-x_0)^{\alpha_0}(t-x_1)^{\alpha_1}(t-x_2)^{\alpha_2}, \\ \varphi(t) &= \frac{dt}{t-1}, \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_0 = 0, & x_1 = x, & x_2 = 1, & x_3 = \infty, \\ \alpha_0 = b-c, & \alpha_1 = -b, & \alpha_2 = c-a, & \alpha_3 = a, \end{array} \right. \end{aligned}$$

の取り扱いの工夫から始める. ここで $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ を仮定し, x は固定し変数は t だけであるとする.

集合 $\mathbb{C}_x$ 内の単連結な k 次チェイン Δ 上の k 次微分形式 ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_\Delta u(t)\psi$ を考える. その積分を多価関数 $u(t)$ と ψ と分離し ψ と Δ とその上の

枝 $u(t)|_\Delta$ を組み合わせた Δ^u との pairing $\langle \psi, \Delta^u \rangle$ とみなす．このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_D d(u(t)\psi) = \int_{\partial D} u(t)\psi$$

がどうなるか調べる．左辺は

$$d(u(t)\psi) = du(t) \wedge \psi + u(t)d\psi = u(t)(\omega \wedge \psi + d\psi),$$

$$\omega = d\log(u(t)) = \left(\frac{b-c}{t} + \frac{-b}{t-x} + \frac{c-a}{t-1}\right)dt = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha_i dt}{t-x_i},$$

となるので，$\langle \nabla_\omega \psi, D^u \rangle$ となる，ここで $\nabla_\omega = d + \omega \wedge$ は，$\mathbb{C}_x$ 上の１価正則 1-form ω により，ねじられた外微分作用素とする．一方，右辺は前記のルールに従い，$\langle \psi, (\partial D)^u \rangle$ である．そこでねじれ境界作用素 ∂_ω を $\partial_\omega(D^u) = (\partial D)^u$ として定める，ここで ∂D 上の $u(t)$ の枝は D 上の $u(t)$ の枝の ∂D への制限 $u(t)|_{\partial D}$ として指定する．Stokes 定理は，∇_ω, ∂_ω を用いると以下のようになる．

Theorem 1 (ねじれ Stokes 定理)

$$\langle \nabla_\omega \psi, D^u \rangle = \langle \psi, \partial_\omega (D^u) \rangle.$$

$\nabla_\omega \psi = 0$ をみたす $\mathbb{C}_x$ 上の C^∞ 級 k 次微分形式 ψ をねじれ閉 k 次微分形式といい，k 次チェイン D_j とその上に指定された $u(t)$ の分枝との組の有限和 $\gamma = \sum_{j \in J} D_j^u$ をねじれ k 次チェインといい，それら全体を $\mathcal{C}_k^u(\mathbb{C}_x)$ で表す．$\partial_\omega(\gamma) = 0$ をみたすものをねじれ k 次サイクルという．

超幾何関数の積分表示に表れる $\varphi = \frac{dt}{t-1}$ は，ねじれ閉１次微分形式である．実のところ $dt \wedge dt = 0$ なので $\mathbb{C}_x$ 上の正則１次微分形式はねじれ閉となる．

開区間 $(1,\infty)$ と $u(t)$ の枝の組 $(1,\infty)^u$ は，この設定ではねじれ１次チェインとならない．1, ∞ が $\mathbb{C}_x$ に属していないので，$(1,\infty)$ が１次チェインの有限和として表示できないからである．点 $x \in (0,1)$ に対して，$\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle = \displaystyle\int_1^\infty u(t)\varphi$ をみたすねじれ１次サイクル γ_0^u を構成する．小さい正数 ε と大きな正数 R をとり，$I_{1+\varepsilon,R}$ を $1+\varepsilon$ から R へ至る線分，C_1 は 1 を中心とし $1+\varepsilon$ を始点とする半径 ε の正の向きの円，C_∞ は 0 を中心とし R を始点とする半径 R の負の向きの円である．

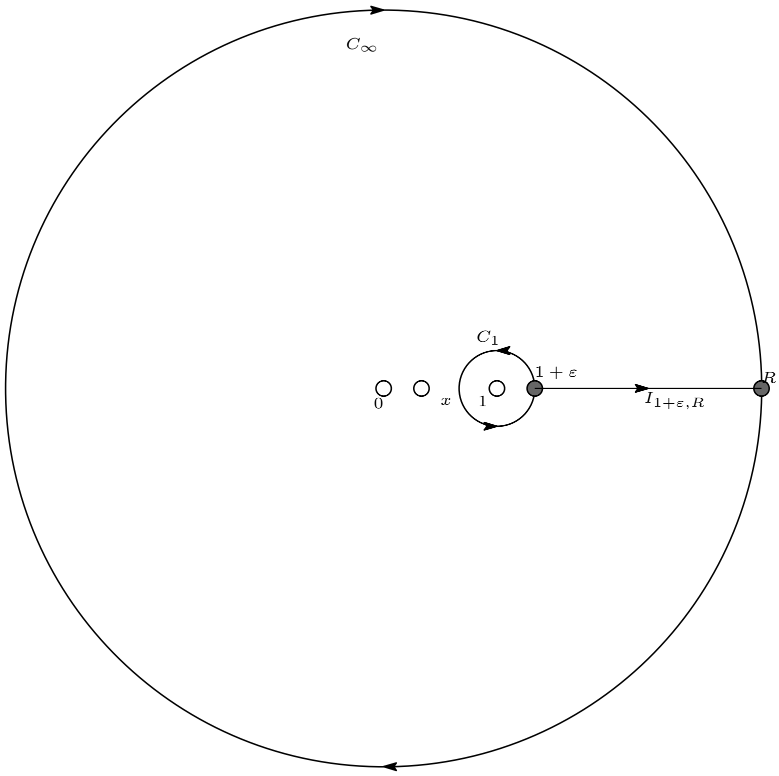
$$\gamma_0^u = I_{1+\varepsilon,R}^u - \frac{1}{1-\lambda_2} C_1^u + \frac{1}{1-\lambda_3} C_\infty^u, \quad \lambda_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i}$$

多価関数 $u(t)$ の枝は，各道の始点で t, $t-1$, $t-x$ の偏角が 0 であるとする．

Cauchy の積分定理から $\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle$ は ε, R の大きさによらず値は一定．$\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$ の条件下で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{C_1} u(t)\varphi = \lim_{R \uparrow \infty} \int_{C_\infty} u(t)\varphi = 0$$

なので $\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle = \displaystyle\int_1^\infty u(t)\varphi$ が成立．



$\partial_\omega(\gamma_0^u)$ を計算する．定義より $\partial_\omega(I^u_{1+\varepsilon,R}) = R^{u(R)} - (1+\varepsilon)^{u(\varepsilon+1)}$．$C_1$ は始点と終点は一致しているが, 終点での $t-1$ の偏角は 2π 増えているので, その分を係数としてくくりだし $\partial_\omega(C_1^u) = \lambda_2(1+\varepsilon)^{u(1+\varepsilon)} - (1+\varepsilon)^{u(1+\varepsilon)}$ を得る．C_∞ は始点と終点は一致しているが, 終点での t, $t-x$, $t-1$ の偏角は 2π 減っているので, その分を係数としてくくりだし $\partial_\omega(C_\infty^u) = \lambda_3 R^{u(R)} - R^{u(R)}$．かかっている係数をかけて加えると, $\partial_\omega(\gamma_0^u) = 0$．ゆえに γ_0^u はねじれ１次サイクルである.

Problem 1 点 $x \in (0,1)$ に対して, $\mathbb{C}_x$ 空間の上半空間で $x_0 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = 1$, $x_3 = \infty$ を結ぶ道 γ_{ij} $(0 \leq i < j \leq 3)$ からねじれ１次サイクルを γ_{ij}^u を構成せよ.

2 ねじれホモロジー群と交点形式

ねじれサイクル γ_0^u は正数 ε, R が異なっても, $\langle \varphi_0, \gamma_0^u \rangle$ の値は変化しなかった．そのような違いは同じものとみなす同値関係を定義して, 超幾何微分方程式の局所解空間と線型同型なるものを設定する.

ねじれ閉微分１形式 $\varphi_0 = \frac{dt}{t-1}$ と $D^u \in \mathcal{C}_2^k(\mathbb{C}_x)$ に対する $\partial_\omega(D^u)$ との pairing $\langle \varphi_0, \partial_\omega(D^u) \rangle$ は, Theorem 1 より

$$\langle \varphi_0, \partial_\omega(D^u) \rangle = \langle \nabla_\omega \varphi_0, D^u \rangle = 0$$

となる．ねじれ１次サイクルたちの空間を $\mathcal{C}_2^u(\mathbb{C}_x)$ の ∂_w の像で割った空間として, ω に対するねじれ１次ホモロジー群 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ を定める:

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) = \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1^u(\mathbb{C}_x) \to \mathcal{C}_0^u(\mathbb{C}_x)) / \partial_\omega(\mathcal{C}_2^u(\mathbb{C}_x)).$$

Theorem 2 (喜多-野海)
$$\dim_{\mathbb{C}} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) = 2.$$

$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ は固定された x について設定されたものなので, これではまだ超幾何微分方程式 (1) の局所解空間 $Sol(U_x)$ と同一視できない. $u(t,x)$ を

$$\tilde{X} = \{(t,x) \in \mathbb{P}^1 \times X \mid t(t-x)(t-1) \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

上の多価関数とみなし, $\mathbb{C}_x$ のこの空間への埋め込み $\imath_x : \mathbb{C}_x \hookrightarrow pr^{-1}(x)$ を指定しておく, ここで $pr : \tilde{X}(t,x) \mapsto x \in X$. 局所系

$$\mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

に対して定まる

$$\mathcal{H}_1(\partial_\omega, U_x) = \bigcup_{x \in U_x} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

が $Sol(U_x)$ と線型同型になる. 制限写像の帰納的極限を $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と同一視して $Sol(U_x)$ の x での germ $Sol(x)$ とみなす. 具体的な対応は φ_0 との pairing で, x の周りの微小な動きを込めてあると考える.

$u(t)$ の代わりに $1/u(t)$ を考えて, １次ねじれホモロジー群と局所系

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega}), \quad \mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$$

が定義される. ここで $d\log(1/u(t)) = -\omega$ であることに注意する. $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$ には交点形式 $\mathcal{I}_h$ が定義される. 1-chains $\varDelta_+$ と $\varDelta_-$ が有限個の点 p_i で transversely に交わっているとする.

$$(\varDelta_+^u \cdot \varDelta_-^{u^{-1}}) = \sum_i (\varDelta_+ \cdot \varDelta_-)_{p_i} u(p_i) u^{-1}(p_i)$$

で定まるものを線型に拡張して, 交点形式 $\mathcal{I}_h$ を定める. ここで $(\varDelta_+ \cdot \varDelta_-)_{p_i}$ は p_i における γ_+ と γ_- の位相的な交点数. 定義より, 下記が成立する.

$$\mathcal{I}_h(\gamma_-^u, \gamma_+^{u^{-1}}) = -\mathcal{I}_h(\gamma_+^u, \gamma_-^{u^{-1}})^\vee,$$

$^\vee$ はパラメーターの符号変換作用素; $\alpha_i^\vee = -\alpha_i$, $\lambda_i^\vee = 1/\lambda_i$, $u^\vee = u^{-1}$.

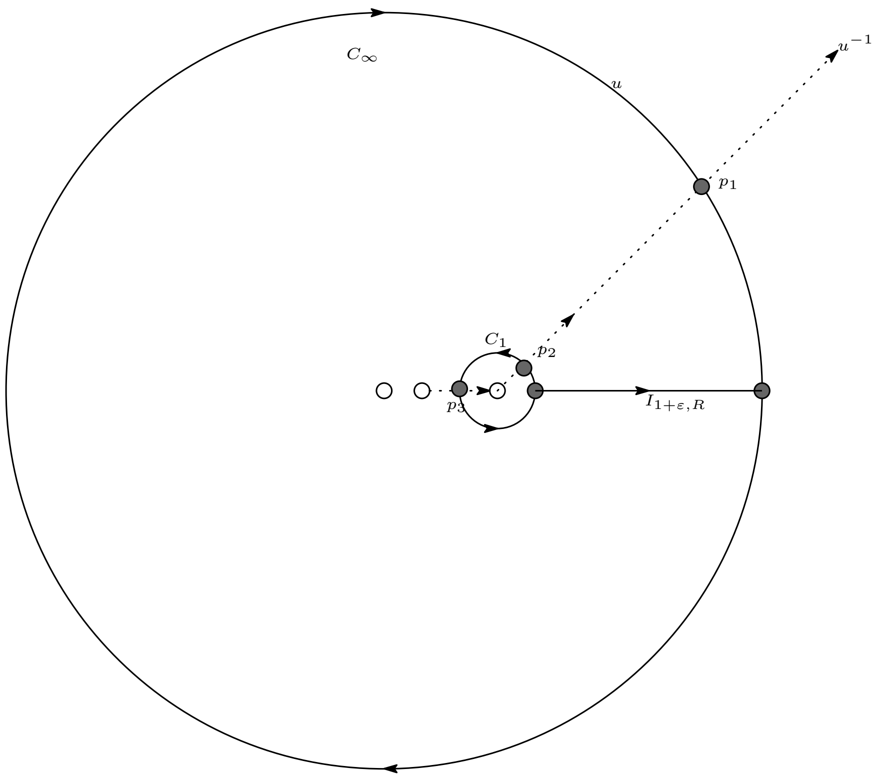
Theorem 3 $0 \le i < j \le 3$, $0 \le p < q \le 3$ に対して,

$$\mathcal{I}_h(\gamma_{ij}^u, (\gamma_{pq}^u)^\vee) = \begin{cases} \frac{1-\lambda_i\lambda_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)} & \text{if} \quad (i,j) = (p,q), \\ \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} & \text{if} \quad i = p,\ j > q, \\ \frac{-\lambda_j}{1-\lambda_j} & \text{if} \quad j = p, \\ \frac{1}{1-\lambda_j} & \text{if} \quad i < p,\ j = q, \\ 1 & \text{if} \quad i < p < j < q, \\ 0 & \text{if} \quad i < p < q < j,\ i < j < p < q. \end{cases}$$

特に $\gamma_0^u=\gamma_{23}^u$, $\gamma_1^u=\gamma_{12}^u$ と $(\gamma_0^u)^\vee=(\gamma_{23}^u)^\vee$, $(\gamma_1^u)^\vee=(\gamma_{12}^u)^\vee$ に関する交点行列は

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} & \frac{-1}{1-\lambda_2} \\ \frac{-\lambda_2}{1-\lambda_2} & \frac{1-\lambda_1\lambda_2}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \end{pmatrix}.$$

Proof.



γ_0^u と $(\gamma_0^u)^\vee$ の交点数を計算する. p_1 での位相的な交点数は 1, u は偏角が増えて $u(p_1)u^{-1}(p_1)=\lambda_3$ となり, ここでの寄与は C_∞ の係数 $\frac{1}{1-\lambda_3}$ と λ_3 との積 $\frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}$ である. p_2 での位相的な交点数は -1, u と u^{-1} との枝のずれはなく $u(p_2)u^{-1}(p_2)=1$ で, ここでの寄与は C_1 の係数 $\frac{-1}{1-\lambda_2}$ と (-1) との積 $\frac{1}{1-\lambda_2}$ となる. これらの和が $\mathcal{I}_h(\gamma_0^u,\gamma_0^{u^{-1}})$ で, その値は $\frac{1-\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}$ となる.

次に γ_0^u と $(\gamma_1^u)^\vee$ の交点数を計算する. 位相的な交点は p_3 のみで 1 である. u は上半空間で解析接続しているので p_3 では u と u^{-1} の枝のずれはなく $u(p_3)u^{-1}(p_3)=1$. C_1 の係数が交点数であり $\frac{-1}{1-\lambda_2}$. 次の演習問題を各自で計算することで定理が証明される. □

Problem 2 定理にある残りの交点数をすべて計算せよ.

Remark 1 パラメーターに関する条件 $\alpha_j\notin\mathbb{Z}$ $(j=0,1,2,3)$ 下で

$$\det(H)=\frac{1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}\neq 0.$$

交点形式は非退化である.

3 モノドロミー表現

基点 $\dot{x}$ を開区間 $(0,1)$ $(\subset X = \mathbb{C} - \{0,1\})$ から選び固定し, $\pi_1(X,\dot{x})$ の元を代表する loop ρ をとる. 超幾何微分方程式 (1) の局所解空間 $Sol(U_{\dot{x}})$ を表現空間とするモノドロミー表現による ρ の像を $\mathcal{M}_\rho$ とし, 基底 (γ_0^u, γ_1^u) についての M_ρ の表現行列を M_ρ, i.e., $(\mathcal{M}_\rho(\gamma_0^u), \mathcal{M}_\rho(\gamma_1^u)) = (\gamma_0^u, \gamma_1^u)M_\rho$, とする. $\mathcal{M}_\rho$, M_ρ に対して, パラメーター a, b, c の符号を変えたものを $\mathcal{M}_\rho^\vee$, $M_\rho^\vee$ とし, 基底 (γ_0^u, γ_1^u), $(\gamma_0^u, \gamma_1^u)^\vee$ に対する交点行列を $H = \left(\mathcal{I}_h(\gamma_i^u, (\gamma_j^u)^\vee)\right)_{i,j}$ とする.

Theorem 4 以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma_+^u), \mathcal{M}_\rho^\vee(\gamma_-^{u^{-1}})) = \mathcal{I}_h(\gamma_+^u, \gamma_-^{u^{-1}})$, $\forall \gamma_\pm^{u^{\pm 1}} \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{\pm\omega})$.

(2) ${}^tM_\rho\, H\, M_\rho^\vee = H$.

(3) $\mathcal{M}_\rho$ の固有値 β は, その固有ベクトル γ^u が $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) \neq 0$ ならば $\beta \cdot \beta^\vee = 1$ をみたす.

(4) $\mathcal{M}_\rho$ の固有値 β_1, β_2 の固有ベクトルを γ_1^u, γ_2^u とする.

$$\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1 \Rightarrow \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) = 0.$$

Proof. (1) $\dot{x}$ の近傍 $U_{\dot{x}}$ では, ねじれサイクル γ_+^u, γ_-^u は自然に接続されていて, その交点数は変化しない. 交点数は局所定数なので, それをどこまでも接続してもその値は変化しない.

(2) γ^u を (γ_0^u, γ_1^u) の 1 次結合 $(\gamma_0^u, \gamma_1^u)\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$ $(g_0, g_1 \in \mathbb{C})$ で表示すると,

$$\mathcal{M}_\rho(\gamma^u) = (\gamma_0^u, \gamma_1^u)M_\rho \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) = (g_0, g_1)H \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma^u), (\mathcal{M}_\rho(\gamma^u))^\vee) = (g_0, g_1)\, {}^tM_\rho H M_\rho^\vee \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}.$$

(1) より

$$(g_0, g_1)\, {}^tM_\rho H M_\rho^\vee \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix} = (g_0, g_1)H \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}$$

で, g_0, g_1 は任意なので ${}^tM_\rho\, H\, M_\rho^\vee = H$.

(3) $\mathcal{M}_\rho(\gamma^u) = \beta\gamma^u$ であり, (1) より

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) &= \mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma^u), \mathcal{M}_\rho^\vee((\gamma^u)^\vee)) = \mathcal{I}_h(\beta\gamma^u, \beta^\vee(\gamma^u)^\vee) \\ &= (\beta \cdot \beta^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee). \end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) \neq 0 \Rightarrow \beta \cdot \beta^\vee = 1$.

(4) (1) より

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) &= \mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma_1^u), \mathcal{M}_\rho^\vee((\gamma_2^u)^\vee)) = \mathcal{I}_h(\beta_1\gamma_1^u, \beta_2^\vee(\gamma_2^u)^\vee) \\ &= (\beta_1 \cdot \beta_2^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee).\end{aligned}$$

ゆえに $\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1 \Rightarrow \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) = 0.$ □

Remark 2 Theorem 4 (4) において, $\mathcal{I}_h(\gamma_2^u, (\gamma_2^u)^\vee) \neq 0$ ならば $\beta_2^\vee = 1/\beta_2$ であり, 仮定 $\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1$ は $\beta_1 \neq \beta_2$ と同値である.

Lemma 1 $\mathcal{M}_0$ の固有値は 1 と $\lambda_0\lambda_1 = e^{-2\pi\sqrt{-1}c}$. $\mathcal{M}_0$ の固有値 1 の固有ベクトルは γ_{23}^u, $\mathcal{M}_0$ の固有値 $\lambda_0\lambda_1$ の固有ベクトルは γ_{01}^u. $\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ ならば $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) = 0$ で γ_{01}^u, γ_{23}^u は１次独立である.

Proof. 積分区間 $(1, \infty)$ が ρ_0 の動きで変化しないことは明らかである. $u(t) = t^{\alpha_0}(t-x)^{\alpha_1}(t-1)^{\alpha_2}$ の値が $x = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$ $(\theta \in [0,1])$ の変化でどうなるかを追跡する. 変化するのは $(t-x)^{\alpha_1}$ だけである. x は絶対値の小さい複素数で動き, 積分区間 $t \in (1, \infty)$ 上では t はそれに比べて大きな正数なので $\arg(t-x)$ は 0 の近くを動くだけで ρ_0 の終点でのその値は 0. ゆえに $\mathcal{M}_1(\gamma_{23}^u) = \gamma_{23}^u$.

次に γ_{01}^u の ρ_0 に沿った接続を追跡する. 点 $t = 0$ と $t = x = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$ $(\theta \in [0,1])$ を結ぶ道 γ_{01} を開区間 $(0,1)$ からの写像として表示すると

$$\gamma_{01} : t = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s \quad s \in (0,1).$$

γ_{01} は ρ_0 に沿った接続で, γ_{01} に戻ってくる. $u(t)$ をこの写像で開区間 $(0,1)$ に引き戻して, ρ_0 に沿った接続での枝の変化をみる.

$$\begin{aligned}&\gamma_{01}^*(u(t)) \\ =\ & (\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s)^{\alpha_0}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})^{\alpha_1}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - 1)^{\alpha_2} \\ =\ & e^{2\pi\sqrt{-1}\theta(\alpha_0+\alpha_1)}\dot{x}^{\alpha_0+\alpha_1}s^{\alpha_0}(s-1)^{\alpha_1}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - 1)^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

ρ_0 で接続すると θ が 0 から 1 に変わるので $u(t)$ の枝は $\lambda_0\lambda_1$ が掛けられたものとなり, $\mathcal{M}_1(\gamma_{01}^u) = \lambda_0\lambda_1\gamma_{01}^u$.

$\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ ならば Theorem 4 より, $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) = 0$. Theorem 3 より, $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{01}^u)^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) \neq 0$ なので, これらは１次独立. □

Lemma 2 $\mathcal{M}_1$ の固有値は 1 と $\lambda_1\lambda_2 = e^{2\pi\sqrt{-1}(c-a-b)}$. $\mathcal{M}_1$ の固有値 1 の固有ベクトルは γ_{03}^u, $\mathcal{M}_1$ の固有値 $\lambda_1\lambda_2$ の固有ベクトルは γ_{12}^u. $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ ならば $\mathcal{I}_h(\gamma_{03}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) = 0$ で γ_{03}^u, γ_{12}^u は１次独立.

Problem 3 Lemma 2 を Lemma 1 と同様に証明せよ.

Theorem 5 (超幾何微分方程式のモノドロミー表現) 線型変換 $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ は交点形式を用いて, 以下のように表せる:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_0(\gamma^u) &= \gamma^u - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u_{01})^\vee)\gamma^u_{01} \\
&= \lambda_0\lambda_1\left[\gamma^u - (1-\lambda_2)(1-\lambda_3)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u_{23})^\vee)\gamma^u_{23}\right], \\
\mathcal{M}_1(\gamma^u) &= \gamma^u - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u_{12})^\vee)\gamma^u_{12} \\
&= \lambda_1\lambda_2\left[\gamma^u - (1-\lambda_0)(1-\lambda_3)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u_{03})^\vee)\gamma^u_{03}\right].
\end{aligned}
$$

Proof. $\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ を仮定して, 上記の第一表示 $\mathcal{M}_0$ の固有値 $1, \lambda_0\lambda_1$ の固有ベクトルが $\gamma^u_{23}, \gamma^u_{01}$ であることを示す.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_0(\gamma^u_{01}) &= \gamma^u_{01} - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u_{01}, (\gamma^u_{01})^\vee)\gamma^u_{01} \\
&= \gamma^u_{01} - \frac{(1-\lambda_0)(1-\lambda_1)(1-\lambda_0\lambda_1)}{(1-\lambda_0)(1-\lambda_1)}\gamma^u_{01} = \lambda_0\lambda_1\gamma^u_{01}, \\
\mathcal{M}_0(\gamma^u_{23}) &= \gamma^u_{23} - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u_{23}, (\gamma^u_{01})^\vee)\gamma^u_{01} = \gamma^u_{23}.
\end{aligned}
$$

他も同様. $\lambda_0\lambda_1 = 1$ の場合も自然に拡張されている. □

Remark 3 $\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ のとき,

$$
\mathcal{M}_0(\gamma^u) = \gamma^u - (1-\lambda_0\lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u_{01})^\vee)\mathcal{I}_h(\gamma^u_{01}, (\gamma^u_{01})^\vee)^{-1}\gamma^u_{01}
$$

は法線ベクトル γ_{01} と固有値 $\lambda_0\lambda_1$ を有する $\mathcal{I}_h$ に関する鏡映変換.

Corollary 1 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ の基底を $(\gamma^u_0, \gamma^u_1) = (\gamma^u_{23}, \gamma^u_{12})$ でとると $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ の表現行列 M_0, M_1 は

$$
\begin{aligned}
M_0 &= I_2 - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)r_{01}\ {}^t r^\vee_{01}\ {}^t H \\
&= \lambda_0\lambda_1[I_2 - (1-\lambda_2)(1-\lambda_3)e_0\ {}^t e_0\ {}^t H] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0\lambda_1\lambda_2 - 1 \\ 0 & \lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}, \\
M_1 &= I_2 - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)e_1\ {}^t e_1\ {}^t H \\
&= \lambda_1\lambda_2[I_2 - (1-\lambda_0)(1-\lambda_3)r_{03}\ {}^t r^\vee_{03}\ {}^t H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda_1 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

ここで I_2 は2次単位行列で, $e_0 = {}^t(1,0)$, $e_1 = {}^t(0,1)$,

$$
r_{01} = \frac{-1}{1-\lambda_0}\begin{pmatrix} 1-\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \\ 1-\lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r_{03} = \frac{-\lambda_0}{1-\lambda_0}\begin{pmatrix} 1-\lambda_1\lambda_2 \\ 1-\lambda_1 \end{pmatrix}.
$$

Proof. (γ^u_0, γ^u_1) を基底にとると, $\gamma^u = g_0\gamma^u_0 + g_1\gamma^u_1 \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ とが対応し, γ^u_i と単位ベクトル e_i が対応する $(i = 0, 1)$. $\gamma^u_{01} \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ を γ^u_0, γ^u_1 の1次

結合 $g_0\gamma_0^u + g_1\gamma_1^u$ で表示する. Theorem 3 より

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & \mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) & = & g_0\mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) + g_1\mathcal{I}_h(\gamma_{12}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) \\ & & & = & H_{00}\ g_0 + H_{10}\ g_1, \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} & = & \mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) & = & g_0\mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) + g_1\mathcal{I}_h(\gamma_{12}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) \\ & & & = & H_{01}\ g_0 + H_{11}\ g_1. \end{array}$$

連立方程式 $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} \end{pmatrix} = {}^tH \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$ を解いて, γ_{01}^u に対応する列ベクトル

$$r_{01} = {}^tH^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} \end{pmatrix} = \frac{-1}{1-\lambda_0} \begin{pmatrix} 1-\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \\ 1-\lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}$$

を得る. Theorem 5 の $\mathcal{M}_0(\gamma^u)$ に対応する列ベクトルを $M_0 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ で表示する. γ^u と γ_{01}^u に対するベクトルは $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ と上記で求めた r_{01} である.

$$\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{01}^u)^\vee) = (g_1, g_2)\ H\ r_{01}^\vee = {}^tr_{01}^\vee\ {}^tH \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

より, $\mathcal{M}_0(\gamma^u)$ に対応する列ベクトルは

$$\left[I_2 - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1) r_{01}\ {}^tr_{01}^\vee\ {}^tH\right] \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

他の表示も同様に得られる. ただし $e_i^\vee = e_i$ なので $^\vee$ は省略している. □

M_0 の計算では第２式, M_1 の計算では第１式を利用すると簡単に表現行列が得られる. また, $\lambda_0\lambda_1 = 1$ や $\lambda_1\lambda_2 = 1$ でも有効.

4 ２変数超幾何関数 Appell's F_1

Appell's F_1 は $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) < 1\}$ で広義一様絶対収束する級数

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^2} \frac{(a, n_1+n_2)(b_1, n_1)(b_2, n_2)}{(c, n_1+n_2)(1, n_1)(1, n_2)} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$$

で定義される, ここで $c \neq 0, -1, -2, \cdots$. この級数には積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^\infty t^{b_1+b_2-c}(t-x_1)^{-b_1}(t-x_2)^{-b_2}(t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1}$$

$(\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0)$ がある. 変数 $x_0 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$ を導入し, $t = x_i$ での exponent としてパラメーター α_i $(i = 0, \ldots, 4)$ を以下のように導入:

$$\begin{array}{ccccc} x_0 = 0, & x_1, & x_2, & x_3 = 1, & x_4 = \infty; \\ \alpha_0 = b_1 + b_2 - c, & \alpha_1 = -b_1, & \alpha_2 = -b_2, & \alpha_3 = c - a, & \alpha_4 = a. \end{array}$$

$F_1(a, b_1, b_2, c; x)$ は, 以下の微分作用素を施すと 0 になる:

$$\begin{aligned} & x_1(1-x_1)\partial_1^2 + x_2(1-x_1)\partial_1\partial_2 + [c-(a+b_1+1)x_1]\partial_1 - b_1 x_2 \partial_2 - a b_1, \\ & x_2(1-x_2)\partial_2^2 + x_1(1-x_2)\partial_1\partial_2 + [c-(a+b_2+1)x_2]\partial_2 - b_2 x_1 \partial_1 - a b_2, \\ & (x_1 - x_2)\partial_1\partial_2 - b_2\partial_1 + b_1\partial_2. \end{aligned}$$

これらの微分作用素で生成される微分方程式系 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ を超幾何微分方程式系 Appell's F_1 という.

Fact 1 $S = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_1 - x_2) = 0\}$ とする. $X = \mathbb{C}^2 - S$ の任意の点 x の X 内の近傍 U_x における $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ の１価正則関数解全体のなす線型空間 $Sol(U_x)$ は３次元.

X の基点 $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ は $\dot{x}_0 = 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2 < 1 = \dot{x}_3$ をみたすとする. ρ_{ij} $(0 \le i < j \le 3, (i, j) \ne (0, 3))$ を X 内の $\dot{x}$ を基点とする loop で x_j は固定し x_i が上半空間経由で $\dot{x}_j$ に近づき, その点を正の向きに回り, 来た道を引き返すものとする. ただし, $i = 0$ のときは i, j の役目を変える.

Fact 2 $\pi_1(X, \dot{x})$ は ρ_{ij} で生成される.

5 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ に対するねじれホモロジー群

$\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0, x_1, x_2, 1\}$, $u(t) = t^{\alpha_0}(t - x_1)^{\alpha_1}(t - x_2)^{\alpha_2}(t - 1)^{\alpha_3}$ とみなして, 超幾何関数のときと同様にして, ねじれホモロジー群と局所系

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega), \quad \mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

が定義され, germ $Sol(x)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ が同一視される.

x_i と x_j を上半空間で結ぶ道 γ_{ij} $(0 \le i < j \le 4)$ から１０個のねじれサイクル γ_{ij}^u が構成できる.

$u(t)^{-1}$ に対して,

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega}), \quad \mathcal{H}_1(\partial_{-\omega}) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$$

が定義され, $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$ に交点形式 $\mathcal{I}_h$ が定義される.

交点数に関する公式 Theorem 3 が $0 \le i < j \le 4$, $0 \le p < q \le 4$ として成立する. ここで $\lambda_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i}$ $(0 \le i \le 4)$ とする.

6 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ のモノドロミー表現

解析接続による群準同型写像 $\pi_1(X, \dot{x}) \ni \rho \mapsto \mathcal{M}_\rho \in GL(Sol(\dot{x}))$ を $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ のモノドロミー表現という. $\mathcal{M}_{\rho_{ij}} = \mathcal{M}_{ij}$ $(0 \le i < j \le 3,\ (i,j) \ne (0,3))$ を決定する. Theorem 4 は, そのまま成立する.

Lemma 3 $\mathcal{M}_{ij}$ の固有値は 1, $\lambda_i\lambda_j$ である. 固有値 1 の固有空間は 2 次元で, 固有値 $\lambda_i\lambda_j$ の固有ベクトルは γ_{ij}^u.

Proof. Lemma 1 で示したように, 固有値 $\lambda_i\lambda_j$ の固有ベクトルは γ_{ij}^u. $\{i, j, k, l, m\} = \{0, \ldots, 4\}$ となる k, l, m に対して x_k と x_l を下半平面で結ぶ道と x_k と x_m を下半平面で結ぶ道から得られるねじれサイクルたちが固有値 1 の固有空間を張る. □

Theorem 6 $0 \le i < j \le 3,\ (i,j) \ne (0,3)$ に対して

$$\mathcal{M}_{ij}(\gamma^u) = \gamma^u - (1-\lambda_i)(1-\lambda_j)\gamma_{ij}^u \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee).$$

Proof. $\lambda_i\lambda_j \ne 1$ とする. Theorem 4 から $\mathcal{M}_{ij}$ の 1 の固有空間は

$$\{\gamma^u \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) \mid \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) = 0\}.$$

γ^u が $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) = 0$ をみたせば, 上記右辺は γ_u であり, 固有値 1 の固有ベクトルである. $\gamma^u = \gamma_{ij}$ のとき, Theorem 3 より上記右辺は

$$\begin{aligned} & \gamma_{ij}^u - (1-\lambda_i)(1-\lambda_j)\gamma_{ij}^u \mathcal{I}_h(\gamma_{ij}^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) \\ = \ & \gamma_{ij}^u - \frac{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)(1-\lambda_i\lambda_j)}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\gamma_{ij}^u = (\lambda_i\lambda_j) \cdot \gamma_{ij}^u \end{aligned}$$

であり, γ_{ij} は $\lambda_i\lambda_j$ の固有ベクトル. Lemma 3 より, $\mathcal{M}_{ij}$ と一致する. □

Problem 4 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ の基底を定めて, その基底に関する交点行列 $H = (\mathcal{I}_h(\gamma_i^u, (\gamma_i^u)^\vee))_{ij}$ を計算せよ. また, その基底に関する $\mathcal{M}_{ij}$ の表現行列を与えよ.

Problem 5 $\rho_{14} \in \pi_1(X, \dot{x})$ を x_1 が上半空間内で $R\sqrt{-1}$ $(R >> 0)$ に向かい, そのあと原点中心, 半径 R の円を負の向きに回り, 上半空間内で $\dot{x}_1$ に戻るとする. $\mathcal{M}_{14} = \mathcal{M}(\rho_{14})$ の固有値を求めよ. また, 固有空間は 1 次元と 2 次元になり, 1 次元固有空間は γ_{14}^u で張られることを示せ.

Problem 6 $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ で定まる実 m 次元 *simplex*

$$\Delta_x = \{t = (xs_1, \ldots, xs_m) \in \mathbb{C}^m \mid s_1, \ldots, s_m > 0, s_1 + \cdots + s_m < 1\}$$

上の関数

$$u(t, x) = (x - t_1 - \cdots - t_m)^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m}$$

は, x が 0 の周りを正の向きに 1 周すると, $e^{2\pi\sqrt{-1}(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_m)}u(t, x)$ になることを示せ.

Problem 7 合流型超幾何微分方程式系の場合, モノドロミー表現と交点形式の関係を解明せよ.

References

[Apk] Appell P. and Kampé de Fériet M. J., *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynomes d'Hermite* , Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[AoK] Aomoto K. and Kita M., translated by Iohara K., *Theory of Hypergeometric Functions* , Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2011.

[CM] Cho K. and Matsumoto K., Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, *Nagoya Math. J.*, **139** (1995), 67–86.

[G] Goto Y., The monodromy representation of Lauricella's hypergeometric function F_C, *preprint*, 2014, http://arxiv.org/abs/1403.1654 [math.AG].

[GM] Goto Y. and Matsumoto K., The monodromy representation and twisted period relations for Appell's hypergeometric function F_4, to appear in *Nagoya Math. J.*

[KN] Kita M. and Noumi M., On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions. *Japan. J. Math.*, **9** (1983), 113–157.

[L] Lauricella G., Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Rend. Circ. Mat. Palermo* , **7** (1893), 111–158.

[M1] Matsumoto K., Monodromy and Pfaffian of Lauricella's F_D in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups, *Kyushu J. Math.*, **67** (2013), 367–387.

[M2] Matsumoto K., Pfaffian of Lauricella's hypergeometric system F_A, *preprint*, 2013.

[MY] Matsumoto K. and Yoshida M., Monodromy of Lauricella's hypergeometric F_A-system, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **13** (2014), 551–577.

[Y] Yoshida M., *Hypergeometric functions, my love, -Modular interpretations of configuration spaces-*, Aspects of Mathematics E32., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.