

Borel 総和法を用いた常微分方程式の 漸近解析

神本晋吾 述, 加筆, 修正
小山民雄 記

2013.9.3-2013.9.4

0 Introduction

本稿は2013年に神戸大学理学研究科にて行われた超幾何学校での小山民雄氏の講義ノートを下に神本が加筆・修正を行ったものである。本稿では Gevrey 漸近解析の基礎, 及び, 常微分方程式の不確定特異点における分解定理に関して解説する。

次の線形微分方程式系を考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \phi = A(z) \phi. \quad (0.1)$$

ここで, $k \in \mathbb{Z}$ で $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$ は収束級数 $\mathbb{C}\{z\}$ を係数にもつ n 次正方行列とする。簡単のため $A(0)$ の固有方程式 $\Phi(\lambda) = \det(\lambda - A(0)) = 0$ は重根をもたないとする。このとき (0.1) を対角化することを考える。

まず, $k = 0$ の場合, つまり $z = 0$ に確定特異点と呼ばれる特異点をもつ場合を考える。このとき, $\Phi(\lambda) = 0$ の根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は $z = 0$ での特性指数と呼ばれ, (0.1) の特異点における構造を記述する上で重要な役割を果たす。特に, $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) のとき, (0.1) は収束級数係数での可逆な行列 $P(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\})$ を用いた変換 $\phi = P(z)\psi$ により次のように対角化される:

$$z \frac{d}{dz} \psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \psi. \quad (0.2)$$

この対角行列 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を Λ とすると, (0.1) の基本解系は $P(z)z^\Lambda$ により与えられる. これから, (0.1) の解の $z = 0$ における局所モノドロミーの構造が特性指数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を用いて表されることがわかる.

次に $k \geq 1$ の場合を考えてみる. このとき, 変換 $\phi = P(z)\psi$ により (0.1) を次のように対角化することを考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = \begin{pmatrix} \Lambda_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_n(z) \end{pmatrix} \psi. \quad (0.3)$$

ただし, $\Lambda_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) は $\Lambda_j(0) = \lambda_j$ を満たす多項式とする. このとき, 形式級数係数での可逆な行列 $P(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}[[z]])$ による変換により対角化は可能だが, 確定特異点の場合とは異なり, 一般に $P(z)$ は収束せず発散級数となることが知られている. $\Lambda_j(z)$ は特異点での構造を記述する上での重要な要素ではあるが, このような方程式の形式的な範疇での構造だけでは, 解析的な解の構造を記述することはできない. 本稿では, これら二つの構造を結びつける方法として Borel 総和法を用いる. Borel 総和法とは形式的逆 Laplace 変換 (Borel 変換) と Laplace 変換を組み合わせることにより, 形式級数から, その級数へと漸近展開される関数を構成する手法であるが, Borel 総和法は微分方程式との相性が良く, 特に (0.1) の形式解 $P(z) \exp\left(\int^z z^{-k-1} \Lambda(z) dz\right)$ ($\Lambda(z) = \text{diag}(\Lambda_1(z), \dots, \Lambda_n(z))$) から (0.1) の解析的な解の構造を読み取る上での有効な解析手法を与える.

1 Gevrey 漸近解析

前節では (0.1) の不確定特異点における形式級数係数の行列 $P(z)$ による対角化を考えたが, 一般に, この $P(z)$ は不確定特異点での Poincaré rank に応じた, ある増大度条件を満たすことが知られている. このような増大度条件を満たす形式級数のことを Gevrey 級数と呼ぶが, この Gevrey 級数に関する漸近解析が Gevrey 漸近解析である. 本節では主に [Ba1], 及び [Ra2] に従い Gevrey 漸近解析の基礎について解説する.

1.1 Gevrey 級数

定義 1.1 (Gevrey 級数). 形式冪級数 $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ が Gevrey order $k(> 0)$ であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \geq 0$ に対し

$$|f_n| \leq C^{n+1} \Gamma(1 + n/k) \quad (1.1)$$

となることをいう. Gevrey order k の級数のなす集合を $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ と書く.

定義から $k < k_1$ ならば $\mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, 特に, $k_1 \rightarrow \infty$ として, $\mathbb{C}[[z]]_{1/\infty} := \mathbb{C}\{z\}$ は任意の $k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となることがわかる. また,

$$\mathfrak{m} := z\mathbb{C}[[z]]_{1/k} = \{\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \mid f_0 = 0\}$$

とすると次が得られる:

命題 1.2. $(\mathbb{C}[[z]]_{1/k}, \mathfrak{m})$ は正則局所環で PID となる.

実際, $f_0 \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{\hat{f}(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{f_0^{j+1}} (f(z) - f_0)^j$$

が $\hat{f}(z)$ の逆元 $\hat{f}^{-1}(z)$ となり, 以下の命題 1.3 から $1/\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となるため, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は局所環となることがわかる. また, PID となることは明らかで, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ の \mathfrak{m} 進完備化は $\mathbb{C}[[z]]$ より正則性も明らか.

命題 1.3. $f(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, $\hat{g}(z) \in \mathfrak{m}$ ならば $f(\hat{g}(z)) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$.

また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し, その微分を

$$\frac{d\hat{f}}{dz}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(n+1)z^n$$

により定義する. このとき, $d\hat{f}/dz \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となり $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は \mathbb{C} 上の微分代数となる. また, $\mathbb{C}\{z\} \hookrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は局所環の射となるが, 次が成立する:

命題 1.4. $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は $\mathbb{C}\{z\}$ 上忠実平坦.

1.2 漸近展開

複素平面 \mathbb{C} の部分集合 S で実数 d, α, ρ ($\alpha, \rho > 0$) に対し

$$S = S(d, \alpha, \rho) = \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r < \rho, |\theta - d| < \alpha/2\}$$

と表される領域を角領域と呼ぶ。また,

$$S(d, \alpha) = S(d, \alpha, \infty) = \{z = re^{i\theta} \mid |\theta - d| < \alpha/2\}$$

とする。また, $S = S(d, \alpha, \rho)$ の閉部分角領域 \bar{S}_1 とは実数 d_1, α_1, ρ_1 ($\alpha_1, \rho_1 > 0$) に対し

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_1(d_1, \alpha_1, \rho_1) = \left\{z = re^{i\theta} \mid 0 < r \leq \rho_1, |\theta - d_1| \leq \alpha_1/2\right\}$$

と表され, $\bar{S}_1 \subset S$ となる領域とする。

S をある角領域とし, $f(z)$ を S 上の正則関数, $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ とする。このとき, $f(z), \hat{f}(z)$ に対し N 次の剰余項 $\nu_f(z, N)$ を

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right)$$

とする。

定義 1.5 (漸近展開). 関数 $f(z)$ は角領域 S 上 $\hat{f}(z)$ に Gevrey order k で漸近展開可能であるとは, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し \bar{S}_1 上

$$|\nu_f(z, N)| \leq C^{N+1} \Gamma(1 + N/k) \quad (1.2)$$

が成立することである。このとき, $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$ と表す。

$A_k(S)$ を, ある $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に S 上 Gevrey order k で漸近展開可能な関数のなす集合とする。このとき, 漸近展開の定義から $f(z) \in A_k(S)$ に対し $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ が一意的に定まる。よって, 自然な射 $T_k : A_k(S) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ が存在する。このとき T_k は次のような分解をもつ:

$$\begin{array}{ccc} A_k(S) & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{C}[[z]] \end{array}$$

この射 $A_k(S) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ も同様に T_k で表す. また, $A_k^{(0)}(S) := \text{Ker } T_k$ とする. このとき次が得られる:

命題 1.6. $A_k(S)$ は環をなし, T_k は環準同型.

特に, $A_k^{(0)}(S)$ は $A_k(S)$ のイデアルとなる. また, 定義から $k_2 > k_1 > 0$ ならば $A_{k_2}(S) \subset A_{k_1}(S)$ となる.

注 1.1. $k_2 > k_1 > 0$ とする. このとき, S の形状や k_1, k_2 によるが, 一般に $A_{k_1}^{(0)}(S) = A_{k_2}^{(0)}(S)$ は成立しない. よって, $f(z) \in A_{k_1}(S)$, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_2}$ で $f(z) \cong_{k_1} \hat{f}(z)$ でも $f(z) \in A_{k_2}(S)$ とは限らない.

注 1.2. $f(z) \in A_k(S) \setminus zA_k(S)$ は可逆とは限らない. 実際, $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$, $f_0 \neq 0$ でも $f(z_0) = 0$ となる点 $z_0 \in S$ が存在すれば $1/f(z) \notin A_k(S)$.

$A_k^{(0)}(S)$ の定義から $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ は, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C > 0$ が存在し任意の $N > 0$ に対し

$$|f(z)| \leq C^{N+1} |z|^N \Gamma(1 + N/k)$$

が \bar{S}_1 上成立する. この評価から, $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ は次の条件により特徴付けられることがわかる:

命題 1.7. $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ となるための必要十分条件は, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C, h > 0$ が存在し

$$|f(z)| \leq C e^{-h|z|^{-k}}$$

が \bar{S}_1 上成立する.

1.3 Borel 変換

形式冪級数 $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に対し, 形式的 Borel 変換 $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ を

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(1 + n/k)} \zeta^n$$

により定める. 特に $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ ならば $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ となる. また, $f(z)$ を $S(d, \alpha, \rho)$ ($\alpha > \pi/k$) で正則で有界とする. このとき, $f(z)$ の d 方向への Borel 変換 $\mathcal{B}_k(f)(\zeta)$ を

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) e^{(\zeta/z)^k} z^k d(z^{-k}) \quad (1.3)$$

により定義する. ただし, 積分路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(d, \alpha, \rho)$ は $\tilde{\rho} \in (0, \rho)$, $\beta \in (\pi/k, \alpha)$ に対し

$$\gamma(t) = \begin{cases} 3t\tilde{\rho} \exp(i(d + \beta/2)) & (0 \leq t \leq 1/3) \\ \tilde{\rho} \exp(i(d + 3(1 - 2t)\beta/2)) & (1/3 \leq t \leq 2/3) \\ 3(1 - t)\tilde{\rho} \exp(i(d - \beta/2)) & (2/3 \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (1.4)$$

により定義する. このとき, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)$ は $S(d, \alpha - \pi/k)$ で正則で exponential size k , つまり, 任意の $S(d, \alpha - \pi/k)$ の閉部分角領域 $\bar{S}_1(d, \beta, \infty)$ 上, ある定数 $C, h > 0$ が存在し

$$|\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)| \leq Ce^{h|\zeta|^k}$$

が成立する.

注 1.3. $s \geq 0$ に対し

$$\mathcal{B}_{k,d}(z^s)(\zeta) = \frac{\zeta^s}{\Gamma(1 + s/k)} \quad (1.5)$$

となる. よって, 形式的 Borel 変換 $\widehat{\mathcal{B}}_k$ は Borel 変換 \mathcal{B}_k を次のように形式的に $\mathbb{C}[[z]]$ に拡張したものである:

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathcal{B}_{k,d}(z^n).$$

このとき次が成立する:

定理 1.8. $k > k_1 > 0$, $f(z) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha > \pi/k$) で $f \cong_{k_1} \hat{f}$ とする.

$$k_2^{-1} = k_1^{-1} - k^{-1}$$

とすると, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \in A_{k_2}(S(d, \alpha - \pi/k))$ で

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$$

となる. また, $k = k_1$ のとき $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ となり $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$.

Proof. $g(\zeta) = \mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)$ とする. このとき

$$\nu_g(\zeta, N) = \zeta^{-N} \left(g(\zeta) - \widehat{\mathcal{B}}_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right) \right)$$

とすると (1.5) から

$$\nu_g(\zeta, N) = \zeta^{-N} \mathcal{B}_{k,d}(z^N \nu_f(z, N))(\zeta).$$

ここで, $\nu_f(z, N)$ は (1.2) を満たすので, $\mathcal{B}_{k,d}$ の積分表示 (1.3) から $\nu_g(\zeta, N)$ に関する次の評価が得られる: $S(d, \alpha - \pi/k)$ の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 上ある定数 $\tilde{C} > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) / \Gamma(1 + N/k).$$

よって, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \cong_{k_2} \hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$. また, $k = k_1$ のときは $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ の収束性から主張が得られる. \square

注 1.4. $f(z)$ に対し $f^{(k)}(z) = f(z^{1/k})$ とすると, $\mathcal{B}_{1,kd}$ と $\mathcal{B}_{k,d}$ との関係は

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \mathcal{B}_{1,kd}(f^{(k)})(\zeta^k)$$

により与えられる. また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に対し $\hat{f}^{(k)}(z) = \hat{f}(z^{1/k}) \in \mathbb{C}[[z^{1/k}]]$ とし, (1.5) により $\hat{\mathcal{B}}_1$ を $\mathbb{C}[[z^{1/k}]]$ に形式的に拡張すると

$$\hat{\mathcal{B}}_k(f)(\zeta) = \hat{\mathcal{B}}_1(f^{(k)})(\zeta^k).$$

1.4 Laplace 変換

ある $\alpha, \rho > 0$ に対し $g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ とし, $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ とする. 更に $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ に解析接続され exponential size k とする. このとき $g(\zeta)$ の d 方向への Laplace 変換 $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z)$ を

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) = \int_0^{\infty e^{id}} g(\zeta) e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k \quad (1.6)$$

により定義する. また, $\hat{g}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \zeta^n$ の形式的 Laplace 変換 $\hat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z)$ を

$$\hat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Gamma(1 + n/k) z^n$$

とする.

注 1.5. $s \geq 0$ に対し

$$\mathcal{L}_{k,d}(\zeta^s)(z) = \Gamma(1 + s/k) z^s \quad (1.7)$$

となる. よって, 形式的 Laplace 変換 $\widehat{\mathcal{L}}_k$ は Laplace 変換 \mathcal{L}_k を次のように形式的に $\mathbb{C}[[\zeta]]$ に拡張したものである:

$$\widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{L}_{k,d}(\zeta^n).$$

このとき次が成立する:

定理 1.9.

$$k_2^{-1} = k_1^{-1} + k^{-1}$$

とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \in A_{k_2}(S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta(\varepsilon)))$ で

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z).$$

Proof. $S(d, \alpha, \rho)$ 上 $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ より十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ に対しある定数 $C > 0$ が存在し $\bar{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \rho - \varepsilon)$ 上

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq C^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1)$$

となる. また, $\hat{g}(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]_{1/k_1}$ で, $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ で exponential size k のため $\bar{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \infty) \cap \{|\zeta| \geq \rho - \varepsilon\}$ 上ある定数 $\tilde{C}, h > 0$ が存在し

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) e^{h|\zeta|^k}$$

となる. このとき, ある定数 $\delta > 0$ が存在し $(z, \zeta) \in S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta) \times \bar{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \infty)$ に対し $-(\zeta/z)^k < -2h|\zeta|^k$ となる. ここで, $f(z) = \mathcal{L}_{k,d}(g)(z)$ とすると積分 (1.6) は $S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta)$ 上収束し正則関数を定める. よって,

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \left(f(z) - \widehat{\mathcal{L}}_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} g_n \zeta^n \right) \right)$$

とすると (1.7) から

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \mathcal{L}_{k,d}(\zeta^N \nu_g(\zeta, N))(z).$$

となるが, $\nu_g(\zeta, N)$ の評価から $\nu_f(z, N)$ に関する次の評価が得られる: $S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta)$ 上ある定数 $C_1 > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し

$$|\nu_f(z, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) \Gamma(1 + N/k).$$

よって, $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z)$. □

注 1.6. $g(\zeta)$ に対し $g^{(k)}(\zeta) = g(\zeta^{1/k})$ とすると, $\mathcal{L}_{1,kd}$ と $\mathcal{L}_{k,d}$ との関係は

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) = \mathcal{L}_{1,kd}(g^{(k)})(z^k)$$

により与えられる. また, $\hat{g}(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ に対し $\hat{g}^{(k)}(\zeta) = \hat{g}(\zeta^{1/k}) \in \mathbb{C}[[\zeta^{1/k}]]$ とし, (1.7) により $\hat{\mathcal{L}}_1$ を $\mathbb{C}[[\zeta^{1/k}]]$ に形式的に拡張すると

$$\hat{\mathcal{L}}_k(g)(z) = \hat{\mathcal{L}}_1(g^{(k)})(z^k).$$

Borel 変換と Laplace 変換に関して次の関係式が成立する:

定理 1.10. $f(z)$ は $S(d, \alpha, \rho)$ ($\alpha > \pi/k$) で正則で有界のとき

$$\mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) = f(z).$$

Proof. 十分小さな $\delta > 0$ に対し $z = \delta e^{2\pi i d}$ の近傍で

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty e^{id}} \int_{\gamma} f(\tilde{z}) e^{\zeta^k(\tilde{z}^{-k} - z^{-k})} z^{-k} \tilde{z}^k d(\tilde{z}^{-k}) d\zeta^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\tilde{z}) z^{-k} \tilde{z}^k d(\tilde{z}^{-k}) \int_0^{\infty e^{id}} e^{\zeta^k(\tilde{z}^{-k} - z^{-k})} d\zeta^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-f(\tilde{z}) z^{-k} \tilde{z}^k}{\tilde{z}^{-k} - z^{-k}} d(\tilde{z}^{-k}) \\ &= \frac{-k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z}) \tilde{z}^{k-1}}{\tilde{z}^k - z^k} d(\tilde{z}) \end{aligned}$$

ここで, $\delta > 0$ を十分小さくとることにより z は閉曲線 γ に囲まれているとしてよい. よって, Cauchy の積分公式から主張が得られる. \square

同様にして次が得られる:

定理 1.11. $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ ($\alpha > 0$) で正則, $\zeta = 0$ で有界で *exponential size* k のとき

$$\mathcal{B}_{k,d} \circ \mathcal{L}_{k,d}(g)(\zeta) = g(\zeta).$$

1.5 Borel 総和可能性

まず, 次の Borel-Ritt 型の定理を証明する:

定理 1.12. $d \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, \pi/k)$, $\rho > 0$ とする. このとき, 任意の $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となる $f(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ が存在する.

Proof. $g(\zeta)$ は $\overline{D}_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq \delta\}$ ($\delta > 0$) で正則とする. このとき $g(\zeta)$ に対し $\mathcal{L}_{k,d}^\delta(g)(z)$ を

$$\mathcal{L}_{k,d}^\delta(g)(z) = \int_0^{\delta e^{id}} g(\zeta) e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k$$

により定義する. ここで, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し δ を十分小さく取れば $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \overline{D}_δ で正則とできる. $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) := \mathcal{L}_{k,d}^\delta \circ \hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$ とし, $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ で $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となることを示す. まず, $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \overline{D}_δ 上正則より, ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $N \geq 0$, $\zeta \in \overline{D}_\delta$ に対し

$$\left| \hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n \hat{\mathcal{B}}_k(z^n)(\zeta) \right| \leq C^{N+1} |\zeta|^N \quad (1.8)$$

となる. また, (1.5), (1.7), 及び (1.8) より次の評価が得られる: ある定数 $C_1 > 0$ が存在し $z \in S(d, \alpha, \rho)$ に対し

$$\begin{aligned} |f_n(z^n - \mathcal{S}_{k,d}^\delta(z^n))| &= \left| \int_{\delta e^{id}}^{\infty e^{id}} \frac{f_n \zeta^n}{\Gamma(1 + n/k)} e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k \right| \\ &\leq C^{n+1} \Gamma(1 + n/k) |z|^n \exp[-(\delta e^{id}/z)^k], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}_{k,d}^\delta \left(\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n \hat{\mathcal{B}}_k(z^n)(\zeta) \right) \right| &\leq \int_0^{\infty e^{id}} C^{N+1} |\zeta|^N |e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k}| d\zeta^k \\ &\leq C_1^{N+1} \Gamma(1 + N/k) |z|^N. \end{aligned}$$

以上から $S(d, \alpha, \rho)$ 上 $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となることがわかる. \square

定理 1.12 から $\alpha \in (0, \pi/k)$ に対し $T_k : A_k(S(d, \alpha, \rho)) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は全射となることがわかる. しかしながら, 例えば $\exp[-(e^{id}/z)^k] \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ となり T_k は単射とはならない. 一方, $\alpha > \pi/k$ の場合は T_k は全射とはならないが, 次の Watson の補題が示すように単射となる:

補題 1.13. $\rho > 0$, $\alpha > \pi/k$ に対し $A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho)) = 0$.

Proof. $f(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ とすると $f(z) \cong_k 0$ より, 定理 1.8 から $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_k(0)(\zeta) = 0$. よって, 定理 1.10 から

$$f(z) = \mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) = \mathcal{L}_{k,d}(0)(z) = 0.$$

□

以上から次が得られる:

定理 1.14. $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し, 次は同値.

- (i) ある $f(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ ($\rho > 0, \alpha > \pi/k$) が存在し $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$.
- (ii) ある $\varepsilon > 0$ が存在し $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は $S(d, \varepsilon)$ に解析接続され *exponential size* k .

このとき, $\hat{f}(z)$ に対し $f(z)$ は一意的に定まり $f(z) = \mathcal{L}_{k,d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$ で与えられる.

定義 1.15 (Borel 総和可能性). $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が定理 1.14 の同値な条件を満たすとき $\hat{f}(z)$ は d 方向に k -Borel 総和可能, あるいは k -summable といい, d 方向に k -summable な級数のなす集合を $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ と表す. このとき $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ に対し, その Borel 和 $\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z)$ を

$$\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z) := \mathcal{L}_{k,d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$$

とする. また, $\mathbb{R} \bmod 2\pi$ で有限個の方向を除いて k -summable な級数のなす集合を $\mathbb{C}\{z\}_k$ と表す. また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が k -summable でない方向を $\hat{f}(z)$ の特異方向といい, その集合を $\text{Sing}(\hat{f})$ ($\subset \mathbb{R} \bmod 2\pi$) と表す.

$$\mathfrak{n}_d := \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathfrak{m} = z\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$$

$$\mathfrak{n} := \mathbb{C}\{z\}_k \cap \mathfrak{m} = z\mathbb{C}\{z\}_k$$

とすると次が得られる:

命題 1.16. $(\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathfrak{n}_d), (\mathbb{C}\{z\}_k, \mathfrak{n})$ は正則局所環で PID となる.

例 1.17. 任意の方向 $d, k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$.

例 1.18. 任意の $k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_k$.

例 1.19. $\hat{f}_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(1 + n/k) z^n$ とすると $\hat{B}_k(\hat{f}_k)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1}$. よって, $\hat{f}_k(z)$ は $d \notin 2\pi\mathbb{Z}$ の方向で k -summable で $\text{Sing}(\hat{f}_k) = \{0 \bmod 2\pi\}$ となる. しかしながら, $k \neq l$ に対し $\hat{f}_k(z) \notin \mathbb{C}\{z\}_l$.

$\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathbb{C}\{z\}_k$ は以下の性質を満たす:

命題 1.20. $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathbb{C}\{z\}_k$ は $\mathbb{C}\{z\}$ 上忠実平坦.

命題 1.21. $a < b$ とし $d_0 \in (a, b), k > 0$ とする. このとき, $\hat{f}(z) \in \bigcap_{d \in (a,b) \setminus \{d_0\}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$

で, ある $\tilde{k} > 0$ に対し $\hat{B}_k(\hat{f})(\zeta)$ は $S(d_0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) で exponential size \tilde{k} とすると $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d_0}$.

命題 1.21 は次の Phragmén-Lindelöf の定理から従う:

定理 1.22. $g(\zeta)$ は $S = S(d, \pi/k)$ 上正則で exponential size \tilde{k} ($\tilde{k} \in (0, k)$) とする. 更に $g(\zeta)$ が S の境界 ∂S 上連続で有界のとき $g(\zeta)$ は S 上有界となる.

Proof. $d = 0$ の場合を示せば十分. まず

$$\sup_{\partial S} |g(\zeta)| \leq M$$

とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ と $\ell \in (\tilde{k}, k)$ に対し ∂S 上 $|e^{-\varepsilon\zeta^\ell} g(\zeta)| \leq M$ となる. よって, 最大値の原理から S 上

$$|g(\zeta)| \leq M e^{\varepsilon|\zeta|^\ell}$$

となるが, $\varepsilon > 0$ は任意だったので, S 上 $|g(\zeta)| \leq M$ となる. □

命題 1.23. 任意の $k > 0$ に対し

$$\mathbb{C}\{z\} = \bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}.$$

Proof. $\bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \subset \mathbb{C}\{z\}$ を示せばよい. $\hat{f}(z) \in \bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ とすると

$\hat{B}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \mathbb{C} 上正則で exponential size k となる. よって, ある定数 $\rho > 0$ が存在し $S_{k,d}(\hat{f})(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \rho\}$ 上一価正則で有界となる. よって, $z = 0$ は除去可能な特異点となり $S_{k,d}(\hat{f})(z)$ は $z = 0$ で正則となり $S_{k,d}(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}$. □

系 1.24. $k_1 > k_2 > 0$ に対し

$$\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2} = \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}.$$

Proof. $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}$ となるが, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}$ とすると $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \mathbb{C} 上正則で exponential size k_3 ($k_3^{-1} = k_2^{-1} - k_1^{-1}$) となる. よって, 命題 1.21, 命題 1.23 から主張が得られる. \square

1.6 合成積代数

$\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ には自然な積構造が与えられたが, 本節では $\widehat{\mathcal{B}}_k$ と両立するような $\mathbb{C}\{\zeta\}$ の積構造を考える. まず, 合成積を次で定義する:

定義 1.25 (合成積). $k, k_1 > 0$ とする. このとき, $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$) に対し $f(\zeta)$ と $g(\zeta)$ の合成積 $f *_k g(\zeta)$ を

$$f *_k g(\zeta) = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t f((t - \tilde{t})^{1/k}) g(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}$$

により定義する.

注 1.7. $\cdot *_k \cdot$ と $\cdot *_1 \cdot$ との関係は次で与えられる: $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ に対し $f^{(k)}(\zeta) = f(\zeta^{1/k})$, $g^{(k)}(\zeta) = g(\zeta^{1/k})$ とすると

$$f *_k g(\zeta) = f^{(k)} *_1 g^{(k)}(\zeta^k).$$

このとき次が成立する:

命題 1.26. $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$) とし $f(\zeta) \cong_{k_1} \hat{f}(\zeta)$, $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ とする. このとき, $h(\zeta) := f *_k g(\zeta)$ とすると $h(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ で $h(\zeta) \cong_k \hat{h}(\zeta)$,

$$h_n = \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(1 + (n-j)/k) \Gamma(1 + j/k)}{\Gamma(1 + n/k)} f_{n-j} g_j \quad (n \geq 0)$$

となる.

例えば,

$$\zeta^m *_k \zeta^n = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tilde{t})^{m/k} \tilde{t}^{n/k} d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{d}{dt} t^{1+(m+n)/k} B(1+m/k, 1+n/k) \right] \Big|_{t=\zeta^k} \\
&= \frac{\Gamma(1+m/k)\Gamma(1+n/k)}{\Gamma(1+(m+n)/k)} \zeta^{m+n}
\end{aligned}$$

となるが, $\nu_h(\zeta, N)$ の評価等も同様にして得られ, 命題 1.26 が従う.

$\mathbb{C}\{\zeta\}$ に $\cdot *_k \cdot$ により積構造を定めた環を Conv_k とすると, 命題 1.26 から直ちに次が得られる:

命題 1.27. $\widehat{B}_k : \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow \text{Conv}_k$ は環同型を与える.

注 1.8. \widehat{B}_k の逆は \widehat{L}_k により与えられる.

また, $\text{Exp}_{k,d} \subset \mathbb{C}\{\zeta\}$ を, ある $\varepsilon > 0$ が存在し $S(d, \varepsilon)$ で exponential size k の関数のなす空間に $\cdot *_k \cdot$ により積構造を定めた環とすると, 定理 1.14 から次が従う:

命題 1.28. $\widehat{B}_k : \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \rightarrow \text{Exp}_{k,d}$ は環同型を与える.

次に, 微分に関してだが $s \geq 0$ に対し

$$\widehat{B}_k \left(z \frac{d}{dz} z^{k+s} \right) (\zeta) = \frac{(k+s)\zeta^{k+s}}{\Gamma(1+(k+s)/k)} = k\zeta^k \widehat{B}_k(z^s)$$

より, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し次が成立する:

$$\widehat{B}_k \left(z \frac{d}{dz} (z^k \hat{f}(z)) \right) = k\zeta^k \widehat{B}_k(\hat{f})(\zeta). \quad (1.9)$$

最後に, 命題 1.28 を用いて次を示す:

命題 1.29. $f(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, $\hat{g}(z) \in \mathfrak{n}_d$ ならば, $f(\hat{g}(z)) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$.

Proof. $g_B(\zeta) := \widehat{B}_k(\hat{g})(\zeta)$ とし, $g_B(\zeta)$ は $S(d, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) で正則で, $S(d, \varepsilon)$ の閉部分角領域 \bar{S}_1 上 $C, h > 0$ が存在し

$$|g_B(\zeta)| \leq C|\zeta|e^{h|\zeta|^k}$$

が成立するとする. Cauchy の評価式から, C, h を大きく取り直すことにより, $dg_B/d\zeta$ も \bar{S}_1 上

$$\left| \frac{dg_B}{d\zeta}(\zeta) \right| \leq Ce^{h|\zeta|^k}$$

とできる. ここで, $n \geq 0$ に対し $\widehat{B}_k(\widehat{g}^n)(\zeta) = g_B^{*n}(\zeta)$ とすると,

$$|g_B^{*n}(\zeta)| \leq \frac{C^n |\zeta|^n}{\Gamma(1 + n/k)} e^{h|\zeta|^k} \quad (1.10)$$

が成立する. 実際, $n = n_0$ のとき成立するとすると, $g_B(0) = 0$ より,

$$\begin{aligned} |g_B *_{k} g_B^{*n_0}(\zeta)| &= \left| \int_0^t \frac{dg_B}{d\zeta}((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} g_B^{n_0}(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right|_{t=\zeta^k} \\ &\leq \int_0^{|\zeta|} C e^{h(|t| - |\tilde{t}|)} \frac{1}{k} (|t| - |\tilde{t}|)^{1/k-1} \frac{C^{n_0} |\tilde{t}|^{n_0/k}}{\Gamma(1 + n_0/k)} e^{h|\tilde{t}|} d|\tilde{t}| \Big|_{|t|=|\zeta|^k} \\ &\leq C^{n_0+1} |\zeta|^{n_0+1} e^{h|\zeta|^k} \frac{B(1/k, 1 + n_0/k)}{\Gamma(1 + n_0/k)} \\ &\leq \frac{C^{n_0+1} |\zeta|^{n_0+1}}{\Gamma(1 + (n_0 + 1)/k)} e^{h|\zeta|^k}. \end{aligned}$$

よって, (1.10) から $\widehat{B}_k(f(\widehat{g}))(\zeta)$ は \bar{S}_1 上正則で exponential order k となることがわかる. \square

1.7 Weierstrass 型割り算定理

本節では $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ の Hensel 性に関して議論する. まず, $f(\zeta, w), g(\zeta, w) \in \mathbb{C}\{\zeta, w\}$ に対し, その積 $f * g(\zeta, w)$ を次で定義する:

$$f * g(\zeta, w) = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t f((t - \tilde{t})^{1/k}, w) g(\tilde{t}^{1/k}, w) d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}. \quad (1.11)$$

また, $\text{Exp}_{k,d}^w$ を $f(\zeta, w) \in \mathbb{C}\{\zeta, w\}$ で, ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$S^w = S(d, \varepsilon) \times \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$$

上正則に解析接続され, $\overline{S^w}$ 上連続で

$$|f(\zeta, w)| \leq C e^{h|\zeta|^k}$$

となる関数のなす空間とする. $\text{Exp}_{k,d}^w$ についても同様の積構造を考える. 以後 \mathcal{R} は $\mathbb{C}\{\zeta, w\}$, 或は $\text{Exp}_{k,d}^w$ とする. ここで, \mathcal{R}^0 を $f(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ で $f(0, 0) \neq 0$ となるものとする, \mathcal{R}^0 は \mathcal{R} の単元のなす集合と一致する. このとき, 通常 Weierstrass 型の割り算定理と同様にして (例えば [GR] を参照), 次が得られる:

定理 1.30. $g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は

$$\partial_w^j g(0, 0) = 0 \quad (0 \leq j \leq n-1), \quad (1.12)$$

$$\partial_w^n g(0, 0) \neq 0 \quad (1.13)$$

を満たすとする. このとき, 任意の $f(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ に対し次を満たす $q(\zeta, w), r(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ が一意に存在する:

$$\begin{aligned} f &= q * g + r, \\ \partial_w^n r(\zeta, w) &= 0. \end{aligned}$$

$g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は (1.12), (1.13) を満たすとき w に関し order n であるとい
い, 更に w に関して monic な n 次多項式となると $g(\zeta, w)$ は Weierstrass 多
項式であるという. すると, 定理 1.30 から次が得られる:

定理 1.31. $g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は w に関し order n とする. このとき, 次数 n の
Weierstrass 多項式 $W(\zeta, w)$, 及び $q(\zeta, w) \in \mathcal{R}^0$ で, 次を満たすものが一意
に存在する:

$$g = q * W.$$

よって, monic な多項式 $f(z, w) \in (\mathbb{C}[[z]]_{1/k})[w]$ に対して, $f(0, w) = \bar{g}(w)\bar{h}(w)$ ($\bar{g}, \bar{h} \in \mathbb{C}[w]$ は互いに素) となると, 定理 1.31 から $g(z, w), h(z, w) \in (\mathbb{C}[[z]]_{1/k})[w]$ で $f(z, w) = g(z, w)h(z, w)$, $g(0, w) = \bar{g}(w)$, $h(0, w) = \bar{h}(w)$ となるものが存在することがわかる. $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ に関しても同様の命題が成立するため, 次が得られる:

定理 1.32. $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ は Hensel 環となる.

注 1.9. より一般に, 多変数の Gevrey 級数のなす環に対しても, 接的な Weierstrass 型の割り算定理が成り立つことが知られている. 詳しくは [Z] を参照.

注 1.10. [Ro] では $\mathbb{C}[[z]]$ の Hensel 性という観点から $\mathbb{C}[[z]]$ の完備性を用いて特異点における微分作用素の分解定理が議論されている.

1.8 Cauchy-Heine 変換

本節では Cauchy-Heine 変換と, その応用について述べる. まず, Cauchy-Heine 変換を次で定義する:

定義 1.33 (Cauchy-Heine 変換). $\psi(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$), $a \in S(d, \alpha, \rho)$ とする. このとき, $\psi(z)$ の Cauchy-Heine 変換 $\text{CH}_a(\psi)(z)$ を

$$\text{CH}_a(\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w-z} dw$$

により定義する.

$\text{CH}_a(\psi)(z)$ は次を満たす:

命題 1.34. $\psi(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$), $a \in S(d, \alpha, \rho)$ とし, $\tilde{d} = d + \pi$, $\tilde{\alpha} = \alpha + 2\pi$, $\tilde{\rho} = |\rho|$ とする. このとき, $\text{CH}_a(\psi)(z) \in A_k(S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}))$ で

$$\text{CH}_a(\psi)(z) \cong_k \widehat{\text{CH}}_a(\psi)(z),$$

$$\widehat{\text{CH}}_a(\psi)(z) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^a w^{-n-1} \psi(w) dw.$$

更に, $z \in S(d, \alpha, \tilde{\rho})$ に対し

$$\text{CH}_a(\psi)(z) - \text{CH}_a(\psi)(ze^{2\pi i}) = \psi(z).$$

Proof. まず, $\text{CH}_a(\psi)(z)$ の $S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho})$ での正則性は, 積分路 $[0, a]$ を端点を固定しながら z が積分路上に現れないように $S(d, \alpha, \rho)$ 内で変形することにより得られるが, $\text{CH}_a(\psi)(z) \in A_k(S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}))$ となることは, $\psi \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ と

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n w^{-n-1} + \frac{z^N w^{-N}}{w-z}$$

から剰余項の評価が得られ, 導かれる. 最後の主張は Cauchy の積分公式から従う. \square

次に正規被覆を定義する:

定義 1.35 (正規被覆). $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の被覆 I_j ($1 \leq j \leq m$) が正規被覆であるとは,

$$\alpha_{j+1} < \beta_j < \alpha_{j+2} \quad (1 \leq j \leq m)$$

を満たす $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq m$) が存在し, $I_j = (\alpha_j, \beta_j) \bmod 2\pi$ と表されることである. ただし, $j > m$ に対し $\alpha_j = \alpha_{j-m} + 2\pi$ とする.

また, $D_r^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$ ($r > 0$) の被覆 S_j ($1 \leq j \leq m$) が正規被覆であるとは, 同様の α_j, β_j ($1 \leq j \leq m$) により $S_j = S((\alpha_j + \beta_j)/2, (\beta_j - \alpha_j)/2, r)$ と表されることである.

このとき、命題 1.34 から直ちに次が得られる:

定理 1.36. S_j ($1 \leq j \leq m$) を D_r^* の正規被覆とし、 $\psi_j(z) \in A_k^{(0)}(S_{j-1} \cap S_j)$ ($S_0 = S_m$) とする。このとき、 $a_j \in S_{j-1} \cap S_j$ に対し

$$f_j(z) = \sum_{\ell=1}^j \text{CH}_{a_\ell}(\psi_\ell)(z) + \sum_{\ell=j+1}^m \text{CH}_{a_\ell}(\psi_\ell)(ze^{2\pi i}) \quad (0 \leq j \leq m) \quad (1.14)$$

とし、 $\tilde{S}_j := S_j \cap D_\rho^*$ ($\rho = \min_j |a_j|$) とすると $f_j(z) \in A_k(\tilde{S}_j)$ ($0 \leq j \leq m$) で次を満たす:

$$\begin{aligned} f_j(z) &\cong_k \sum_{\ell=1}^m \widehat{\text{CH}}_{a_\ell}(\psi_\ell)(z), \\ f_j(z) - f_{j-1}(z) &= \psi_j(z), \\ f_m(ze^{2\pi i}) &= f_0(z). \end{aligned}$$

最後に次の k -summable な級数に関する分解定理を与える:

定理 1.37. $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ とし、 $\text{Sing}(\hat{f}) = \{d_j \bmod 2\pi \mid 1 \leq j \leq m\}$ とする。このとき、 $\text{Sing}(\hat{f}_j) = \{d_j \bmod 2\pi\}$ となる $\hat{f}_j(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ ($1 \leq j \leq m$) が存在し

$$\hat{f}(z) = \sum_{j=1}^m \hat{f}_j(z)$$

と表される。

Proof. $d_1 < d_2 < \dots < d_m < d_{m+1} = d_m + 2\pi$ としてよい。このとき、 $\tilde{d}_j \in (d_j, d_{j+1})$ に対し $\tilde{f}_j(z) = \mathcal{S}_{k, \tilde{d}_j}(\hat{f})(z)$, $\tilde{f}_0(z) = \tilde{f}_m(z)$ とし、 $\psi_j(z) = \tilde{f}_j(z) - \tilde{f}_{j-1}(z)$ ($1 \leq j \leq m$) とすると、 $\psi_j(z) \in A_k^{(0)}(S_{j-1} \cap S_j)$ となる。ただし、 S_j はある $\varepsilon, \rho > 0$ に対し定義 1.35 で $\alpha_j = d_j - \pi/2k + \varepsilon$, $\beta_j = d_{j+1} + \pi/2k - \varepsilon$ とした D_ρ^* の被覆である。ここで、 $a_j = \tilde{\rho}e^{2\pi i d_j}$ ($\tilde{\rho} \in (0, \rho)$) とし、 \tilde{S}_j を $\alpha_j = d_j - \pi - \pi/2k + \varepsilon$, $\beta_j = d_j + \pi + \pi/2k - \varepsilon$ とした D_ρ^* の被覆とすると命題 1.34 から $\text{CH}_{a_j}(\psi_j)(z) \in A_k(\tilde{S}_j)$ となる。ここで、 $\varepsilon > 0$ は任意に小さく取れるので、 $\text{CH}_{a_j}(\psi_j)(z) \cong_k \widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ で $\text{Sing}(\widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)) = \{d_j \bmod 2\pi\}$ となる。ここで、 $f_j(z)$ を (1.14) により定義し $g_j(z) := \tilde{f}_j(z) - f_j(z)$ とすると、命題 1.34 から $S_{j-1} \cap S_j$ 上 $g_j(z) - g_{j-1}(z) = 0$ となる。よって、 $g_j(z)$ は D_ρ^* で正則で $z = 0$ で有界となり、 $h(z) = g_j(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ となる。よって、 $f_j(z) + h(z) = \tilde{f}_j(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となるので、 $\hat{f}_j(z) = \widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)(z)$ ($1 \leq j \leq m-1$), $\hat{f}_m(z) = \widehat{\text{CH}}_{a_m}(\psi_j)(z) + h(z)$ とすればよい。□

1.9 層論的考察

本節では $k > 1/2$ とする. まず, \mathbb{S}^1 上の Gevrey order k で漸近展開可能な関数のなす層 \mathcal{A}_k は次で定義される: I を \mathbb{S}^1 の連結な開集合とする. このとき $\mathcal{A}_k(I)$ を, ある連続関数 $\rho: I \rightarrow (0, 1)$ が存在し $S_\rho := \{\tilde{\rho}e^{i\theta} \mid 0 < \tilde{\rho} < \rho(\theta), \theta \in I\}$ に含まれる任意の角領域上漸近展開可能な関数のなす集合とする. \mathbb{S}^1 の連結な開集合全体は \mathbb{S}^1 の開基となるので, これから \mathbb{S}^1 上の層 \mathcal{A}_k が自然に定まる. 本節では [Ra2], [MR] 等に従い, \mathcal{A}_k の基本的性質について解説する.

まず, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ を \mathbb{S}^1 上の定数層と考えると, \mathcal{A}_k の定義から自然な射 $T_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が定まる. このとき, $\mathcal{A}_k^{(0)} := \text{Ker } T_k$ とすると, 定理 1.12 から次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

$\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) = 0$, $\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) = \mathbb{C}\{z\}$, $\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) = H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) = \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に注意して, (1.15) から次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

ここで, 被覆の細分を取り, \mathbb{S}^1 の正規被覆を考えることにより定理 1.36 から次が得られる:

定理 1.38. (1.16) の射 $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k)$ の像は 0 となる.

定理 1.38 から, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

また, $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となることもわかる. ここで,

$$I_k^{(d)} = [d - \pi/2k, d + \pi/2k] \bmod 2\pi$$

としたとき, 次の完全列に注意する:

$$0 \rightarrow (\mathcal{A}_k)_{\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}} \rightarrow \mathcal{A}_k \rightarrow (\mathcal{A}_k)_{I_k^{(d)}} \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

ここで,

$$I_k^{(d)} \xrightarrow{\iota_1} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\iota_2} \mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}$$

とすると, $I_k^{(d)}$ は閉集合より, $(\mathcal{A}_k)_{\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}} = \iota_2! \iota_2^{-1} \mathcal{A}_k$ となるので, (1.18) から次の完全列が得られる:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma_c(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) &\rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \\ &\rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \rightarrow H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

$\mathcal{A}_k^{(0)}$ に関しても (1.19) と同様の完全列が得られる. ここで, 定義から

$$T_k : \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$$

で, Watson の補題より

$$\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) = 0$$

となる. また, $\Gamma_c(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) = 0$, $H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) \simeq \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ より,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \wr \\ & & H^1(\mathbb{S}^1; \mathcal{A}_k^{(0)}) & \xrightarrow{0} & H^1(\mathbb{S}^1; \mathcal{A}_k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \end{array}$$

が成立する. よって, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

また, \mathbb{S}^1 の連結な開集合 I に対し $\mathcal{B}_k(I)$ を I の任意の方向で k -summable な級数のなす集合とすると, これから \mathbb{S}^1 上の k -summable な級数のなす層 \mathcal{B}_k が定まるが, $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ は以下のようにして関係づけることができる: まず, $\widehat{\mathbb{S}}^1$ を \mathbb{S}^1 のコピーとし,

$$D_k = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \widehat{\mathbb{S}}^1 \mid |\arg \theta_1 - \arg \theta_2| \leq \pi/2k\}$$

とする. また, p_1 を第 1 成分に関する射影, p_2 を第 2 成分に関する射影とする:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^1 \times \widehat{\mathbb{S}}^1 & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{S}^1 & & \widehat{\mathbb{S}}^1 \end{array}$$

このとき,

$$\mathcal{A}_k^\wedge = p_{2*}(p_1^{-1}\mathcal{A}_k)_{D_k}$$

とすると, $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ は次の関係式を満たす:

$$\mathcal{B}_k \simeq \mathcal{A}_k^\wedge.$$

また, $\mathcal{G}_k := \mathrm{GL}(n; \mathcal{A}_k)$, $\widehat{G}_k := \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ とすると, 自然な射 $T_k : \mathcal{G}_k \rightarrow \widehat{G}_k$ が定まるが, $\mathcal{G}_k^{(0)} := \ker T_k$ とする. このとき, (1.15) と同様に次の完全列が得られる:

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}_k \rightarrow \widehat{G}_k \rightarrow 1. \quad (1.21)$$

ここで, Cartan の補題と類似の議論により定理 1.38 から次が導かれる:

定理 1.39. (0.2) から得られる自然な射 $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{G}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{G}_k)$ の像は 1 となる.

注 1.11. 定理 1.38, 定理 1.39 と同様の主張が通常の漸近展開可能な関数のなす層に関するても成立する. 詳細は [Si] を参照. また, 多変数の漸近解析においても同様の主張が成立することが知られている. 詳細は [Ma], [H] を参照.

1.10 多重総和可能性

本節では多重総和可能性に関して説明する. まず, 次の相対的 Watson の補題を示す.

定理 1.40. $l > k > 1/2$ に対し

$$\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)}) = 0.$$

Proof. まず, 次の完全列に注意する:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_l^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)} \rightarrow 0.$$

このとき, Watson の補題から $\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) = \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) = 0$ より, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)}) \rightarrow H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) \xrightarrow{\iota^1} H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}).$$

よって, ι^1 の単射性を示せばよい. 定理 1.38 から次の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & \\
& & & \downarrow & & & \\
\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l) & \xrightarrow{T_l} & \mathbb{C}[[z]]_{1/l} & \xrightarrow{\partial_l} & H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \iota^1 & & \\
\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} & \xrightarrow{\partial_k} & H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) & &
\end{array}$$

ここで, $\varphi \in \text{Ker } \iota^1$ とすると, $\partial_l(\hat{f}) = \varphi$ となる $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ が存在する. よって, $\hat{f} \in \text{Im } T_l(\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l))$ を示せばよい. ここで, $\partial_k(\hat{f}) = 0$ より $\hat{f} \in T_k(\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k))$ に注意すると, 次の命題に帰着される. \square

命題 1.41. $l > k > 1/2$ に対し

$$T_l : \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/l}.$$

Proof. Watson の補題から単射性は明らか. 全射性を示す. $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ とすると $T_k(f) = \hat{f}$ となる $f \in \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k)$ が存在する. ここで, 定理 1.8 より $k_1^{-1} = k^{-1} - l^{-1}$ とすると $S(d, \pi/2k_1) \setminus \{0\}$ 上正則で $\mathcal{B}_{l,d}(f) \cong_{k_1} \widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f})$ となる. ここで, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ より $\widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{z\}$ となるので, T_l の単射性から $\mathcal{B}_{l,d}(f) \cong_{\infty} \widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f})$. また, $\mathcal{B}_{l,d}(f)$ は $S(d, \pi/2k_1)$ 上 exponential order l より, 定理 1.9 から $f = \mathcal{L}_{l,d} \circ \mathcal{B}_{l,d}(f) \in \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l)$ で, $f \cong_l \hat{f}$ となる. \square

次に多重総和可能な級数を定義する. まず

$$\infty = k_{m+1} > k_m > k_{m-1} > \cdots > k_1 = k > 1/2$$

に対し $\vec{k} = (k_m, k_{m-1}, \cdots, k_1)$ とし, $\vec{d} = (d_m, d_{m-1}, \cdots, d_1) \in \mathbb{R}^m$ は

$$I_{k_m}^{(d_m)} \subset I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})} \subset \cdots \subset I_{k_1}^{(d_1)}$$

を満たすとする. ここで, $1 \leq j \leq m$ に対し

$$A_j := \Gamma(I_{k_j}^{(d_j)}; \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k_{j+1}}^{(0)}),$$

$$B_j := \Gamma(I_{k_{j+1}}^{(d_{j+1})}; \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k_{j+1}}^{(0)})$$

命題 1.43. $\hat{f} \in \mathfrak{m} \cap \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$, $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ に対し $g(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$.

実際, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ で $T_{\vec{k}}(\vec{f}) = \hat{f}$ とすると, $g(\vec{f}) = (g(f_1), \dots, g(f_m)) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ で $T_{\vec{k}}(g(\vec{f})) = g(\hat{f})$ となることがわかる.

以上から, $\mathfrak{n}_{\vec{k}, \vec{d}} = \mathfrak{m} \cap \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$, とすると次が得られる:

命題 1.44. $(\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}, \mathfrak{n}_{\vec{k}, \vec{d}})$ は正則局所環で PID となる.

次に \vec{k} -summable な級数に関する分解定理について述べる. まず, $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) とする. このとき,

$$\hat{f} = \hat{f}^{(1)} + \dots + \hat{f}^{(m)} \quad (1.22)$$

とすると $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる. 実際,

$$f_m = \mathcal{S}_{k_1, d_1}(\hat{f}^{(1)}) + \dots + \mathcal{S}_{k_m, d_m}(\hat{f}^{(m)}) \quad (1.23)$$

とすれば, f_m は $A_{\vec{k}, \vec{d}}$ の元を定め, $T_{\vec{k}}(f_m) = \hat{f}$ となることがわかる. 逆に, \vec{k} -summable な級数に関する次の分解定理が成立する:

定理 1.45. $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し以下は同値:

- (i) $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$
- (ii) $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) が存在し (1.22) の形に表される.

Proof. (i) \Rightarrow (ii) を示す. $(f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ とし, $T_{\vec{k}}(f_m) = \hat{f}$ とする. ここで, B_{m-1} で $f_m = f_{m-1}$ より, f_{m-1} から次のような $I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})}$ の正規被覆 $\{I_j\}_{j=1}^p$ と $f_{m-1, j} \in \Gamma(I_j; \mathcal{A}_k)$ が定まる: ある q ($1 \leq q \leq p$) に対し

$$I_{k_m}^{(d_m)} \subset I_q,$$

$$\overline{I_j} \cap I_{k_m}^{(d_m)} = \emptyset \quad (j \neq q),$$

$$f_{m-1, q} = f_m,$$

$$f_{m-1, j} - f_{m-1, j+1} \in \Gamma(I_j \cap I_{j+1}; \mathcal{A}_{k_m}^{(0)}).$$

ここで, Cauchy-Heine 変換を用いた定理 1.36 と同様の議論から $g_{m-1, j} \in \Gamma(I_j; \mathcal{A}_{k_m})$ で $I_j \cap I_{j+1}$ 上

$$f_{m-1, j} - f_{m-1, j+1} = g_{m-1, j} - g_{m-1, j+1}$$

となるものが存在する. よって, $h_{m-1,j} = f_{m-1,j} - g_{m-1,j}$ とすると, $I_j \cap I_{j+1}$ 上 $h_{m-1,j} = h_{m-1,j+1}$ となり $h_{m-1} \in \Gamma(I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})}; \mathcal{A}_k)$ が定まる. また, $g_{m-1,q} \cong_{k_m} \hat{f}^{(m)}$ とすると $\hat{f}^{(m)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_m, d_m}$ となる. ここで, 任意の $\hat{g} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_m}$ に対し $g_j \in A_j$ ($1 \leq j \leq m-2$) で $T_k(g_j) = \hat{g}$ となるものが取れるので, $\hat{h} = \hat{f} - \hat{f}^{(m)}$ とすると, $\vec{k}' = (k_1, \dots, k_{m-1})$, $\vec{d}' = (d_1, \dots, d_{m-1})$ に対し $\hat{h} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}', \vec{d}'}$ となる. よって, 帰納的に $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) が存在し \hat{f} は (1.22) の形に表されることがわかる. \square

注 1.14. 一般に $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$), $P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ に対し $P(\hat{f}^{(1)}, \dots, \hat{f}^{(m)}) \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる.

定理 1.45 の分解を用いると, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ の多重 Borel 和は $S_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ (1.23) で与えられるが, J. Ecalle による Acceleration 作用素を用いて, 以下のように直接的に $S_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ を構成することができる. まず, $\tilde{k} > k > 0$ に対し d 方向の (\tilde{k}, k) -Acceleration 作用素 $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}$ は次で定義される:

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \zeta^{-k} \int_0^{\infty e^{id}} f(\tilde{\zeta}) C_{\tilde{k}/k}((\tilde{\zeta}/\zeta)^k) d\tilde{\zeta}^k,$$

$$C_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} u^{1-1/\alpha} e^{u^{-1}-tu^{-1/\alpha}} du^{-1} \quad (\alpha > 1).$$

ただし, $C_\alpha(t)$ の積分路 γ_1 は (1.4) で $d = 0$, $k = 1$ としたものとする. ここで, $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}$ の定義域が問題となるが, $f(\zeta) \in \text{Exp}_{k, d}$ に対しては $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)$ が定義可能で

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \mathcal{B}_{\tilde{k}, d} \circ \mathcal{L}_{k, d}(f)(\zeta) \quad (1.24)$$

となる. 実際,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\tilde{k}, d} \circ \mathcal{L}_{k, d}(f)(\zeta) &= \int_\gamma e^{(\zeta/z)^{\tilde{k}}} z^{\tilde{k}} dz^{-\tilde{k}} \int_0^{\infty e^{id}} e^{-(\tilde{\zeta}/z)^k} z^{-k} f(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}^k \\ &= \int_0^{\infty e^{id}} f(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}^k \int_\gamma z^{\tilde{k}-k} e^{(\zeta/z)^{\tilde{k}} - (\tilde{\zeta}/z)^k} dz^{-\tilde{k}} \end{aligned}$$

となるが, $u = (z/\zeta)^{\tilde{k}}$ と積分変数を変換することにより (1.24) が得られる. よって, 特に $f(\zeta) = \zeta^s$ ($s \geq 0$) に対し

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \frac{\Gamma(1 + s/k)}{\Gamma(1 + s/\tilde{k})} \zeta^s \quad (1.25)$$

となる. また, $\hat{f}(\zeta) = \sum_n f_n \zeta^n \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ に対し $\hat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta)$ を

$$\hat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n/k)}{\Gamma(1+n/\tilde{k})} f_n \zeta^n$$

により定義する. ここで, 次に注意する:

命題 1.46. $\alpha > 1$ に対し β を

$$\beta^{-1} = 1 - \alpha^{-1}$$

とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $c_1, c_2 > 0$ が存在し $S(0, \pi/\beta - \varepsilon)$ 上

$$|C_\alpha(t)| \leq c_1 e^{-c_2 |t|^\beta} \quad (1.26)$$

を満たす.

Proof. $C_\alpha(t)$ の定義式で積分変数を $v = t^{-\alpha} u$ とすると

$$C_\alpha(t) = \frac{t}{2\pi i} \int_{\gamma_1} v^{1-1/\alpha} e^{t^{-\alpha} v^{-1} - v^{-1/\alpha}} dv^{-1}$$

となる. よって, $f(v) = v^{-1/\alpha} e^{-v^{-1/\alpha}}$ とすると $C_\alpha(t) = t \mathcal{B}_{1,0}(f)(t^{-\alpha})$ となる. ここで, $f(v) \in A_{1/\alpha}^{(0)}(S(0, \alpha\pi))$ より, 定理 1.8 から $\mathcal{B}_{1,0}(f)(\zeta) \in A_{\alpha-1}^{(0)}(S(0, (\alpha-1)\pi))$ となる. よって, $\zeta = t^{-\alpha}$ として, 命題 1.7 から (1.26) を得る. \square

よって, 命題 1.46 から次が得られる:

定理 1.47. $S = S(d, \delta)$ ($\delta > 0$) とし, $\tilde{k} > k > 0$ に対し κ を

$$\kappa^{-1} = k^{-1} - \tilde{k}^{-1}$$

により定める. このとき, $f(\zeta) \in A_l(S)$ は S で exponential size κ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\rho(\varepsilon) > 0$ が存在し $\tilde{S} = S(d, \delta + \pi/\kappa - \varepsilon, \rho(\varepsilon))$ 上 $\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta)$ は正則となる. また,

$$\tilde{l}^{-1} = l^{-1} + \kappa^{-1}$$

とすると $\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta) \in A_{\tilde{l}}(\tilde{S})$ で

$$\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta) \cong_{\tilde{l}} \hat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta).$$

となる.

注 1.15. $\mathcal{A}_{\vec{k},k,d}$ の定義域は $\mathcal{L}_{k,d}$ のものに比べ広がっている.

このとき, 次が成立する:

定理 1.48. $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し以下は同値:

- (i) $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k},\vec{d}}$
- (ii) \vec{k} に対し κ_j ($1 \leq j \leq m$) を

$$\kappa_j^{-1} = k_j^{-1} - k_{j+1}^{-1}$$

により定める. $g_j(\zeta)$ ($1 \leq j \leq m$) を帰納的に

$$\widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\hat{f})(\zeta) = g_1(\zeta),$$

$$g_{j+1}(\zeta) = \mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}(g_j)(\zeta)$$

により定めるとき, ある $\varepsilon > 0$ に対し $g_j(\zeta)$ は $S(d_j, \varepsilon)$ で exponential size κ_j .

Proof. まず (i) \Rightarrow (ii) を示す. 定理 1.45 の分解を用いることにより $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j,d_j}$ に対し示せば良い. このとき, $i < j$ に対しは $g_i(\zeta)$ は整関数で exponential size $(k_i^{-1} - k_j^{-1})^{-1}$ となるが, $(k_i^{-1} - k_j^{-1})^{-1} < \kappa_i$ より成立する. また, $g_j(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_{k_j}(\hat{f})(\zeta)$ となるが, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j,d_j}$ より $g_j(\zeta)$ は d_j 方向で exponential size $k_j (< \kappa_j)$ となる. よって, $g_{j+1}(\zeta) = \mathcal{B}_{k_{j+1},d_j} \circ \mathcal{L}_{k_j,d_j}(g_j)(\zeta)$ となるので $g_{j+1}(\zeta)$ は d_{j+1} 方向で exponential size k_{j+1} となる. 同様にして $i \geq j+1$ に対しても $g_i(\zeta)$ は d_i 方向で exponential size k_i となることがわかる.

次に (ii) \Rightarrow (i) に関してだが, まず

$$f_j(z) = \mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta(g_{j+1})(z) \quad (1 \leq j \leq m-1),$$

$$f_m(z) = \mathcal{L}_{k_m,d_m}(g_m)(z)$$

とする. ここで, $\mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta$ は定理 1.12 の証明で用いた作用素で, $|d - d_j| < \varepsilon/2 + \pi/2\kappa_j$ に対し $\mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta$ の積分端点 δe^{id} の差は Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. このとき, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k},\vec{d}}$ となり, $T_{\vec{k}}(\vec{f}) = \hat{f}$ となる. 実際, $f_j \in A_j$ で $T_k(f_j) = \hat{f}$ となることは明らかだが, B_{j-1} の元として $f_j = f_{j-1}$ となることは次のようにしてわかる: まず, $g_j(\zeta)$ に対し $\mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$ を

$$\mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta) = \mathcal{B}_{k_{j+1},d_j} \circ \mathcal{L}_{k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$$

により定義する. ここで, $g_{j+1}^\delta(\zeta) = \mathcal{A}_{k_{j+1}, k_j, d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$ とすると, 命題 1.46 から $g_{j+1}(\zeta) - g_{j+1}^\delta(\zeta)$ は Gevrey order $k_j k_{j+1}/(k_{j+1} - k_j)$ で 0 に漸近展開されるため, $\mathcal{L}_{k_{j+1}, d_{j+1}}^\delta(g_{j+1} - g_{j+1}^\delta)(z)$ は Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. また, 定理 1.10 より $f_{j-1}(z) = \mathcal{L}_{k_{j+1}, d_j}^\delta(g_{j+1}^\delta)(z)$ となるが, $f_{j-1}(z) - \mathcal{L}_{k_{j+1}, d_{j+1}}^\delta(g_{j+1}^\delta)(z)$ も Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. 以上から B_{j-1} の元として $f_j = f_{j-1}$ となることがわかる. よって, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる. \square

定理 1.48 から次が得られる:

系 1.49. $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し, その多重 Borel 和 $S_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ は次で与えられる:

$$S_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f}) = \mathcal{L}_{k_m, d_m} \circ \mathcal{A}_{k_m, k_{m-1}, d_{m-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{k_2, k_1, d_1} \circ \widehat{B}_{k_1}(\hat{f}).$$

2 不確定特異点における形式解の構造

収束級数係数の n 次正方行列 $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$, 正整数 k に対し, 次の連立微分方程式系の形式解を構成することを考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \varphi = A(z) \varphi. \quad (2.1)$$

一般に (2.1) は $z = 0$ に不確定特異点と呼ばれる特異点を持つが, 本節では, [BJL], [Ra2], [Ba2] に従い, このような特異点における形式解の構造, 特に Borel 総和可能性に関して考察する.

2.1 Splitting Lemma

本節では, (2.1) を $A(0)$ の特性根 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ に応じて分解することを考える. 正則行列 $P \in GL(n; \mathbb{C})$ による変換 $\varphi = P\tilde{\varphi}$ により $A(0)$ は Jordan 標準形としてよい. λ_j に関する Jordan 細胞を集めたものを $J(\lambda_j) \in M(n_j; \mathbb{C})$ とする. 簡単のため, まず $\ell = 2$ の場合を考える:

$$A(0) = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

以下, $\varphi = T(z)\psi$ ($T(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$) なる変換で, (2.1) を次の形に変換するものを構成する:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = B(z) \psi, \quad (2.2)$$

$$B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & 0 \\ 0 & B_2(z) \end{pmatrix}.$$

ただし, $B_j(z) \in M(n_j; \mathbb{C}\{z\}_k)$ ($j = 1, 2$) で $B_j(0) = J(\lambda_j)$ を満たすとする. ここで, (2.1) に $\varphi = T(z)\psi$ を代入すると ψ は

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = T^{-1} \left(-z^{k+1} \frac{d}{dz} T + AT \right) \psi$$

を満たすことがわかる. よって, (2.2) と比較して, $T(z)$, $B(z)$ を

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T = AT - TB \quad (2.3)$$

を満たすように構成すればよい.

最初に, $T(z), B(z) \in M(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ で (2.3) を満たすものが存在することを示す. まず, $T(z)$ は次の形であると仮定する:

$$T(z) = I_n + \begin{pmatrix} 0 & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし, I_n は n 次の単位行列とし, $T_{ij} \in M(n_i, n_j; z\mathbb{C}[[z]])$ とする. $A(0)$ の行列の分け方に合わせて, $A(z)$ を

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と表す. このとき, (2.3) の (1, 1) 成分を比較して

$$0 = A_{11} + A_{12}T_{21} - B_1 \quad (2.5)$$

が得られる. 次に (2, 1) 成分を比較して

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{21} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}B_1 \quad (2.6)$$

が得られる. よって, (2.5) を用いて (2.6) から B_1 を消去すると, T_{21} は次を満たすように構成すればよいことがわかる:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{21} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}A_{11} - T_{21}A_{12}T_{21}. \quad (2.7)$$

B_2, T_{12} に関しても (2, 2) 成分, (1, 2) 成分を比較することにより同様の式が得られる.

以下 T_{21} の構成を考える. T_{21}, A_{ij} の z^p の係数を $T_{21}^{(p)}, A_{ij}^{(p)}$ とする:

$$T_{21} = \sum_{p=1}^{\infty} T_{21}^{(p)} z^p,$$

$$A_{ij} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{ij}^{(p)} z^p.$$

そして, (2.7) の z^p の係数を比較することにより次の式が得られる:

$$(p-k)T_{21}^{(p-k)} = A_{21}^{(p)} + \sum_{q=1}^p A_{22}^{(p-q)} T_{21}^{(q)} - \sum_{q=1}^p T_{21}^{(q)} A_{11}^{(p-q)} - \sum_{\substack{q_1+q_2+q_3=p \\ q_1, \dots, q_3 \geq 1}} T_{21}^{(q_1)} A_{12}^{(q_2)} T_{21}^{(q_3)}.$$

これを整理して

$$\begin{aligned} -A_{22}^{(0)} T_{21}^{(p)} + T_{21}^{(p)} A_{11}^{(0)} &= A_{21}^{(p)} + \sum_{q=1}^{p-1} A_{22}^{(p-q)} T_{21}^{(q)} - \sum_{q=1}^{p-1} T_{21}^{(q)} A_{11}^{(p-q)} \\ &\quad - \sum_{\substack{q_1+q_2+q_3=p \\ q_1, \dots, q_3 \geq 1}} T_{21}^{(q_1)} A_{12}^{(q_2)} T_{21}^{(q_3)} - (p-k)T_{21}^{(p-k)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで, (2.8) の右辺は $T_{21}^{(q)}$ ($1 \leq q \leq p-1$) のみで定まり, $T_{21}^{(p)}$ を含んでいない. また, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より, $-A_{22}^{(0)} \cdot + \cdot A_{11}^{(0)}$ は $M(n_2, n_1; \mathbb{C})$ 上の可逆な線形作用素 L となる. よって, (2.8) より帰納的に $T_{21}^{(p)}$ ($p \geq 1$) が定まることがわかる.

次に $T_{21} \in M(n_2, n_1; z\mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となることを示す. 行列 $P = (p_{ij}) \in M(p, q; \mathbb{C})$ に対し, そのノルム $|P|$ を

$$|P| = \sum_{i,j} |p_{ij}|$$

とする. まず, $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$ より, ある定数 $C_0 > 0$ が存在し $p \geq 0$ に対し

$$|A_{ij}^{(p)}| \leq C_0^{p+1}$$

が成立する. 以下, 帰納的に次を示す: ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $p \geq 1$ に対し

$$|T_{21}^{(p)}| \leq C^p \Gamma(p/k). \quad (2.9)$$

$p = 1$ のときは明らかなので, $1 \leq p \leq p_0 - 1$ に対し (2.9) が成立するとして $p = p_0$ のとき (2.9) が成立することを示す. $C > C_0$ とする. 例えば, (2.8) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \left| \sum_{q=1}^{p_0-1} A_{22}^{(p_0-q)} T_{21}^{(q)} \right| &\leq \sum_{q=1}^{p_0-1} C_0 C^{p_0} \left(\frac{C_0}{C} \right)^{p_0-q} \Gamma(\ell/k) \\ &\leq \frac{C_0}{C - C_0} C^{p_0} \Gamma\left(\frac{p_0 - 1}{k}\right) \end{aligned}$$

となる. また, (2.8) の右辺第 5 項は

$$\begin{aligned} \left| (p_0 - k) T_{21}^{(p_0-k)} \right| &\leq C^{p_0-k} (p_0 - k) \Gamma\left(\frac{p_0 - k}{k}\right) \\ &= k C^{p_0-k} \Gamma\left(\frac{p_0}{k}\right) \end{aligned}$$

となる. 他の項に関しても同様の評価が得られるが, L^{-1} も有界作用素であることから, $C > 0$ を十分大きく取れば任意の $p \geq 1$ に対し (2.9) が成立することがわかり, $T_{21} \in M(n_2, n_1; z \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となる.

次に $T_{21} \in M(n_2, n_1; z \mathbb{C}\{z\}_k)$ となることを示す. まず, $X := \widehat{B}_k(T_{21})$, $\tilde{A}_{ij,B} := \widehat{B}_k(A_{ij} - A_{ij}^{(0)})$ とすると, (1.9), (2.7) から $T_{21,B}$ は次を満たす:

$$-A_{22}^{(0)} X + X A_{11}^{(0)} + k \zeta^k X = k \zeta^k * X + \tilde{A}_{21,B} + \tilde{A}_{22,B} * X - X * \tilde{A}_{11,B} - X * \tilde{A}_{12,B} * X. \quad (2.10)$$

ここで, (2.10) の左辺の線形作用素 $-A_{22}^{(0)} \cdot + \cdot A_{11}^{(0)} + k \zeta^k \cdot$ を L_ζ とすると, $\bar{S} \cap \{\zeta \in \mathbb{C} \mid k \zeta^k = \lambda_2 - \lambda_1\} = \emptyset$ となる角領域 $S = S(d, \alpha)$ 上 L_ζ は可逆となる. ここで, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ を S で正則で, \bar{S} 上連続な関数 $f(\zeta)$ で

$$\|f\| := \sup_{\zeta \in \bar{S}} e^{-h|\zeta|^k} |f(\zeta)| < \infty$$

となる関数のなす空間とすると, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ は Banach 空間となる. $P(\zeta) = (p_{ij}(\zeta)) \in M(p, q; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ に対しても $\|P\|$ を $\|P\| = [(\|p_{ij}\|)]$ により定義する. まず次に注意する: ある定数 $C_0, h_0 > 0$ が存在し \bar{S} 上

$$|\tilde{A}_{ij,B}| \leq C_0 e^{h_0|\zeta|^k} \quad (2.11)$$

が成立する. $h > h_0$ とすると, 例えば (2.10) の右辺第 3 項は $\tilde{A}_{22,B}(0) = 0$ より

$$|\tilde{A}_{22,B} * X| \leq \left| \int_0^t \frac{d\tilde{A}_{22,B}}{d\zeta} ((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \Big|_{t=\zeta^k} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq C_0 k^{-1} \int_0^{|t|} e^{h_0(|t|-\tilde{t})} (|t| - \tilde{t})^{1/k-1} \|X\| e^{h|\tilde{t}|} d\tilde{t} \Big|_{t=\zeta^k} \\ &\leq C_0 k^{-1} (h - h_0)^{-1/k} e^{h|t|} \|X\|. \end{aligned}$$

ただし, (2.11) から $d\tilde{A}_{22,B}/d\zeta$ も (2.11) と同様の評価を満たすことを用いた. 同様に (2.10) の右辺第 5 項についても

$$|X * \tilde{A}_{12,B} * X| \leq C_0 k^{-2} (h - h_0)^{-1/k} e^{h|t|} \|X\|^2$$

が成立する. (2.10) の他の項についても同様の評価が成立する. よって,

$$F(X) = L_\zeta^{-1} (k\zeta^k * X + \tilde{A}_{21,B} + \tilde{A}_{22,B} * X - X * \tilde{A}_{11,B} - X * \tilde{A}_{12,B} * X)$$

とすると, L_ζ^{-1} は $M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ 上の有界な線形作用素となるので, $h, M > 0$ を十分大きく取ると, F は

$$\mathcal{B}_M := \{X \in M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S})) \mid \|X\| \leq M\}$$

上の縮小写像となる. よって, Banach の不動点定理から (2.10) を満たす $X \in M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ が存在し, これが $\hat{B}_k(T_{21})$ の解析接続を与える. 以上から T_{21}, B_1 の各成分は $d = (\arg(\lambda_2 - \lambda_1) + 2\pi\mathbb{Z})/k$ の方向を除いて k -summable となることがわかる. 同様に T_{12}, B_2 の各成分は $d = (\arg(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\pi\mathbb{Z})/k$ の方向を除いて k -summable となることがわかる.

同様の議論により, 一般に次が成立することが示される: $A^{(0)}$ の特性根を $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ とし,

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_\ell) \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $B_j(z) \in M(n_j; \mathbb{C}\{z\}_k)$, $T_{ij}(z) \in M(n_i, n_j; z\mathbb{C}\{z\}_k)$ で $B_j^{(0)} = J(\lambda_j)$ となるものが存在し,

$$B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & & & \\ & B_2(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell(z) \end{pmatrix}$$

$$T(z) = I_n + \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & \cdots & \cdots & T_{1\ell} \\ T_{21} & 0 & T_{23} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & T_{(\ell-1)\ell} \\ T_{\ell 1} & \cdots & \cdots & T_{\ell(\ell-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $\varphi = T(z)\psi$ により (2.1) は (2.2) に変換される. また, X_{ij}, B_j は

$$\bigcup_{p \neq j} \left\{ \frac{1}{k} \arg(\lambda_p - \lambda_j) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k} \right\}$$

の方向を除いて k -summable となる.

実際, (2.3) から A_{ij}, B_j, T_{ij} は

$$B_j = A_{jj} + \sum_{p \neq j} A_{jp} T_{pj},$$

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{ij} = \sum_p A_{ip} T_{pj} - T_{ij} B_j$$

を満たすが, T_{ij} に対し $\ell = 2$ の場合の L に対応する作用素が $-J(\lambda_i) \cdots J(\lambda_j)$ で与えられることから明らかであろう.

注 2.1. 一般に次が示される: $X = (X_1, \dots, X_n), F(z, X) = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbb{C}^n\{z, X\}$ とする. $F(z, X)$ は

$$F(0, 0) = 0$$

を満たし,

$$J = (\partial_{X_i} F_j(0, 0))$$

としたとき J は正則とする. このとき,

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} X = F(z, X)$$

の形式冪級数解 $X(z) \in \mathbb{C}^n[[z]]$ が一意的存在し $X(z) \in \mathbb{C}^n\{z\}_k$ となる. 更に, J の固有値を λ_j ($1 \leq j \leq n$) とすると, 各 X_j は

$$\bigcup_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \arg(\lambda_j) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k} \right\}$$

の方向を除いて k -summable となる.

2.2 有理型微分方程式への変換

前節の結果を踏まえ、本節では $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$ で $A^{(0)} = J(\lambda)$ となる微分方程式 (2.1) を考える。また、変換

$$\varphi = e^{-\lambda k^{-1} z^{-k}} \tilde{\varphi}$$

を考えることにより $\lambda = 0$ とできる。以下、変換 $\varphi = T(z)\psi$ ($T(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$) により (2.1) を (2.2) で、十分大きな $M, N > 0$ に対し

$$B(z) = \sum_{p=0}^{N+M} B^{(p)} z^p,$$

$$B^{(p)} = A^{(p)} \quad (0 \leq p \leq N-1)$$

とした有理型微分方程式へと変換することを考える。 $T(z)$ は次の形とする：

$$T(z) = I_n + \sum_{p=N}^{\infty} T^{(p)} z^p.$$

まず、このような変換 $T(z)$ で $T(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となるものが存在することを示す。 $X := \hat{B}_k(T - I_n)$, $\tilde{A}_B := \hat{B}_k(A - A^{(0)})$, $\tilde{B}_B := \hat{B}_k(B - B^{(0)})$ とすると (2.3) から次の式が成立する：

$$-A^{(0)}X + XA^{(0)} + k\zeta^k X = k\zeta^k * X + \tilde{A}_B - \tilde{B}_B + \tilde{A}_B * X - X * \tilde{B}_B. \quad (2.12)$$

ここで、 $M(n; \mathbb{C})$ 上の線形作用素 $-A^{(0)} \cdot + \cdot A^{(0)}$ を L , $-A^{(0)} \cdot + \cdot A^{(0)} + k\zeta^k \cdot$ を L_ζ とし、 $\det(\lambda - L) = \lambda^\mu f(\lambda)$ ($f(0) \neq 0$) とすると、 $\zeta^{-k\mu} L_\zeta$ は $\zeta = 0$ の近傍 $D_\rho := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq \rho\}$ 上で可逆となる。また、 \tilde{A}_B の各成分は D_ρ 上正則とする。ここで、 \mathcal{B}_1 を D_ρ の内部で正則で、 D_ρ 上連続な関数を係数に持つ n 次正方行列 $X(\zeta) = (x_{ij}(\zeta))$ で

$$\|X\|_1 := \sup_{D_\rho} \sum_{i,j} |\zeta^{-N} x_{ij}(\zeta)| < \infty$$

となるもののなす空間、 \mathcal{B}_2 を

$$\bigoplus_{p=N}^{N+M} M(n; \mathbb{C}) \zeta^p$$

とし, $Y(\zeta) = (y_{ij}(\zeta)) \in \mathcal{B}_2$ に対し, そのノルムを

$$\|Y\|_2 := \sup_{D_\rho} \sum_{i,j} |\zeta^{-N} y_{ij}(\zeta)|$$

とすると, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ は Banach 空間となる. ここで,

$$\text{tr} A(z) = \sum_{p=0}^{N-1} A^{(p)} z^p$$

とし, ${}^{\text{tr}}\tilde{A}_B := \widehat{\mathcal{B}}_k(\text{tr} A - A^{(0)})$ とすると, $\tilde{B}_B - {}^{\text{tr}}\tilde{A}_B \in \mathcal{B}_2$ となる. このとき, $(X, Y) \in \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ に対し,

$$F_1(X, Y) = L_\zeta^{-1}(G(X, Y) - F_2(X, Y)),$$

$$F_2(X, Y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tilde{\zeta}|=\rho} G(X, Y)(\tilde{\zeta}) K_{N,M}(\zeta/\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}$$

とする. ただし,

$$G(X, Y)(\zeta) = k\zeta^k * X + \tilde{A}_B - {}^{\text{tr}}\tilde{A}_B + \tilde{A}_B * X - X * {}^{\text{tr}}\tilde{A}_B - X * Y,$$

$$K_{N,M}(t) = t^N \frac{1 - t^{M+1}}{1 - t}$$

とする. まず, 留数定理から $F_2(X, Y) \in \mathcal{B}_2$ となることがわかる. また, $G(X, Y)$ の定義から $G(X, Y)$ は ζ^N で割り切れることがわかるが, $F_2(X, Y)$ の構成から, 更に $G(X, Y) - F_2(X, Y)$ は ζ^{N+M+1} で割り切れることがわかる. よって, M を $M \geq k\mu - 1$ とすれば $F_1(X, Y) \in \mathcal{B}_1$ となる.

以下, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, $F = (F_1, F_2)$ としたとき, 十分大きな $N, C > 0$ に対し F は

$$\mathcal{B}_C := \{(X, Y) \in \mathcal{B} \mid \|X\|_1 + \|Y\|_2 \leq C\}$$

上の縮小写像となることを示す. まず, ある $C_0 > 0$ に対し

$$\sup_{D_\rho} \left| \frac{d\tilde{A}_B}{d\zeta} \right| < C_0$$

とする. このとき, 次の評価が成立する:

$$|\tilde{A}_B * X| \leq \left| \int_0^t \frac{d\tilde{A}_B}{d\zeta} ((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right|_{t=\zeta^k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_0 k^{-1} \|X\|_1 \int_0^{|t|} (|t| - |\tilde{t}|)^{1/k-1} |\tilde{t}|^{N/k} d|\tilde{t}| \Big|_{t=\zeta^k} \\
&\leq C_0 k^{-1} \|X\|_1 |\zeta|^{N+1} B(1/k, 1 + N/k).
\end{aligned}$$

$k\zeta^k * X$, $X * {}^{\text{tr}}\tilde{A}_B$ についても同様の評価が成立する. また, $X * Y$ に関しては

$$|X * Y| \leq k^{-1} \|X\|_1 \|Y\|_2 |\zeta|^{2N} B(N/k, 1 + N/k)$$

が成立する. ここで, $B(1/k, 1 + N/k) \rightarrow 0$, $B(N/k, 1 + N/k) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) に注意すると, $|\zeta| = \rho$ 上での評価を考えることにより, 最大値の原理から $N, C > 0$ を十分大きく取れば F は \mathcal{B}_C 上の縮小写像となることがわかる. よって, Banach の不動点定理より, 目標であった $T(z)$, 及び $B(z)$ の存在がわかる.

次に, $T(z)$ は $A(z)$ と同じ方向で k -summable となることを示す. $A(z)$ は d 方向で k -summable とする. このとき, $0 < \tilde{\rho} < \rho$ に対し $\zeta_0 = \tilde{\rho} e^{id}$ とし,

$$S := \zeta_0 + S(d, \varepsilon)$$

とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, \tilde{A}_B は \bar{S} 上正則で, ある定数 $C_0, h_0 > 0$ に対し次の評価を満たす:

$$|\tilde{A}_B| \leq C_0 e^{h_0 |\zeta|^k}. \quad (2.13)$$

\tilde{B}_B も \bar{S} 上 (2.13) と同様の評価を満たす. ここで, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ を前節と同様に定義し, $X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ に対し

$$F(X) = L_\zeta^{-1} \left(\tilde{A}_B - \tilde{B}_B + R + \left(\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t K(t - \tilde{t}) X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right) \Big|_{t_0=\zeta_0^k}^{t=\zeta^k} \right) \quad (2.14)$$

とする. ただし,

$$\begin{aligned}
K(t) \cdot &= tI_n \cdot + \tilde{A}_B(t^{1/k}) \cdot - \cdot \tilde{B}_B(t^{1/k}), \\
R(\zeta) &= \left(\frac{d}{dt} \int_0^{t_0} K(t - \tilde{t}) \tilde{T}_B(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right) \Big|_{t_0=\zeta_0^k}^{t=\zeta^k}
\end{aligned}$$

とし, $\tilde{T}_B = \hat{B}_k(T - I_n)$, $\tilde{B}_B := \hat{B}_k(B - B^{(0)})$ は, 上で構成した $T(z)$, $B(z)$ により定める. ここで, L_ζ^{-1} は $M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ 上の有界な線形作用素となるが, 前節と同様の議論により $h, C > 0$ を十分大きく取れば, F は $\{X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S})) \mid \|X\| \leq C\}$ 上の縮小写像となる. よって, Banach の不動点定理から $F(X) = X$ を満たす $X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ が存在し, この X が \tilde{T}_B の S への解析接続を与える. 以上から, $T(z)$ は $A(z)$ と同じ方向で k -summable となることがわかる.

2.3 確定特異点型方程式への変換

本節では 2.1 節, 2.2 節の結果を踏まえ, (2.1) を summable な級数を用いて, 帰納的に確定特異点型方程式へと変換することを考える. 本節では $A(z) \in M(n; \mathbb{C}[z])$ で

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} J(0; n_1) & & & \\ & J(0; n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0; n_\ell) \end{pmatrix}$$

となる (2.1) に対し

- i) 方程式の不確定度 k ,
- ii) 方程式の階数 n

のどちらか一方が下がった場合に帰着させることを考える. ここで, $J(0; n_j) \in M(n_j; \mathbb{C})$ は固有値 0 に対する n_j 次の Jordan 細胞とする. これにより, (2.1) は帰納的に $k = 0$, あるいは $n = 1$ の場合へと変換されるが, $n = 1$ の場合は明らかであろう.

最初に $\ell = 1$ の場合を考える. $n \geq 2$ とする. まず, $T(z) = I_n + \tilde{T}(z)$,

$$\tilde{T}(z) = \sum_{p=1}^N T^{(p)} z^p$$

による変換 $\psi = T(z)\varphi$ により, 任意の $N > 0$ に対し (2.1) を (2.2) で

$$B(z) = J(0; n) + \sum_{p=1}^N B^{(p)} z^p + \tilde{B}(z), \quad (2.15)$$

$$B^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{n1}^{(p)} & \cdots & b_{nn}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$\tilde{B}(z) \in M(n; z^{N+1} \mathbb{C}[z])$ としたものへと変換することを考える. (2.3) の z^p の係数を比較することにより, T, B を次を満たすように構成すればよい:

$$J(0; n)T^{(p)} - T^{(p)}J(0; n) = B^{(p)} - A^{(p)} + R^{(p)}. \quad (2.17)$$

ただし, $R^{(p)}$ は $A^{(q)}, T^{(q)}, B^{(q)}$ ($1 \leq q \leq p-1$) により定まる項とする. ここで, $T^{(p)} = (t_{ij}^{(p)})$ とすると

$$J(0; n)T^{(p)} - T^{(p)}J(0; n) = \begin{pmatrix} t_{21}^{(p)} & t_{22}^{(p)} & \cdots & t_{2n}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^{(p)} & t_{n2}^{(p)} & \cdots & t_{nn}^{(p)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t_{11}^{(p)} & \cdots & t_{1(n-1)}^{(p)} \\ 0 & t_{21}^{(p)} & \cdots & t_{2(n-1)}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_{n1}^{(p)} & \cdots & t_{n(n-1)}^{(p)} \end{pmatrix}$$

となる. よって, $T^{(p)}$, 及び, (2.16) の形の $B^{(p)}$ で, (2.17) を満たすものが存在することがわかる. 特に $t_{1j}^{(p)} = 0$ ($1 \leq j \leq n$) となる $T(z)$ は一意的に定まる. 以後, $B(z)$ は (2.15) の形とする. $\text{tr} B(z) = B(z) - \tilde{B}(z)$ とし,

$$b_j(z) = \sum_{p=1}^N b_{nj}^{(p)} z^p \quad (1 \leq j \leq n)$$

とする. ここで,

$$P(z, \zeta) = \det(\zeta - \text{tr} B(z)) = \zeta^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} b_{j+1}(z) \zeta^j$$

とすると

$$\det(\zeta - B(z)) = P(z, \zeta) \text{ mod } z^{N+1} \mathbb{C}[z, \zeta].$$

このとき, $P(z, \zeta)$ の Newton polygon は負の傾きを持つ面のみを持つが, 傾きの最も大きな面 F の傾きを $-r \in \mathbb{Q}$ とし, $\zeta = z^r \tilde{\zeta}$ とすると,

$$\tilde{P}(z, \tilde{\zeta}) = z^{-nr} P(z, z^{-r} \tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta}^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-z^{-r})^{n-j} b_{j+1}(z) \tilde{\zeta}^j$$

となる. ここで, F の端点に対応する項を ζ^n , 及び $(-1)^{n-j_0} b_{j_0+1}(z) \zeta^{j_0}$ とし, $b_{j_0+1}(z)$ の $z=0$ での零点の位数を v_0 とすると,

$$r = \frac{v_0}{n - j_0} \quad (2.18)$$

となる. $r = p_0/q_0$ (p_0, q_0 は互いに素) と表す. r の取り方から $\tilde{P}(z, \tilde{\zeta})$ の Newton polygon は傾きが 0 の面 \tilde{F} を一つ持ち, それ以外の面の傾きは全て負と

なる. このとき, 次の $S_r(z)$ による, Shearing 変換と呼ばれる変換 $\psi = S_r(z)\tilde{\psi}$ を考える:

$$S_r(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z^r & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{r(n-1)} \end{pmatrix}.$$

すると, この Shearing 変換により (2.2) は次の方程式へと変換される:

$$z^{k-r+1} \frac{d}{dz} \tilde{\psi} = C(z)\tilde{\psi}, \quad (2.19)$$

$$C(z) = J(0; n) + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{b}_1(z) & \cdots & \tilde{b}_n(z) \end{pmatrix} - z^{k-r} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & r & & \\ & & \ddots & \\ & & & r(n-1) \end{pmatrix} + \tilde{C}(z).$$

ただし, $\tilde{b}_j(z) = z^{-r(n-j+1)}b_j(z)$ ($1 \leq j \leq n$) とし, $\tilde{C}(z) \in z^{N-rn+1}\mathbf{M}(n; \mathbb{C}[z^{1/q_0}])$ とする. $k-r \leq 0$ の場合は既に (2.19) は確定特異点型なので, $k-r > 0$ とする. このとき, r の取り方から $C(z) \in \mathbf{M}(n; \mathbb{C}[z^{1/q_0}])$ となり, $\tilde{b}_{j_0+1}(0) \neq 0$, $\tilde{b}_{j+1}(0) = 0$ ($1 \leq j \leq j_0-1$) となるので, $N-rn+1 > 0$ となるように N を十分大きく取れば, $C(0)$ は 0 以外の固有値を持つことがわかる. $C(0)$ が複数の相異なる固有値を持てば, 2.1 節, 2.2 節の議論から方程式の階数 n が下がった場合に帰着される. また, $C(0)$ が固有値を一つだけ持つ場合には $\tilde{P}(0, \zeta) = 0$ は n 重根を持つが, このとき $\tilde{b}_j(0) \neq 0$ ($1 \leq j \leq n$) となり, $P(z, \zeta)$ の Newton polygon の面は F のみで, $(j-1, r(n-j+1)) \in \mathbb{Z}^2$ となる. よって, $r \in \mathbb{Z}$ となり不確定度 k が下がった場合に帰着される.

注 2.2. 上記の Shearing 変換で分岐が起きるのは方程式の階数 n が下がった場合に帰着される場合のみである. また, このときの分岐指数 q_0 は, (2.18) から $q_0 \leq n$ となる.

次に $\ell = 2$ の場合を考える. $A(z)$ は $A(0)$ の行列の分け方に合わせて (2.4) のように分割されているとする. まず, 十分大きな N に対し $A_{21}(z) \in z^N \mathbf{M}(n_2, n_1; \mathbb{C}[z])$ となる場合を考える. このとき, (2.1) で $A = A_{11}$ としたものに対し $\ell = 1$ の場合に上で構成した変換 $T(z)$, $S_r(z)$ を $T_1(z)$, $S_{r_1}(z)$ とし, $A = A_{22}$ としたものに対しても同様に $T_2(z)$, $S_{r_2}(z)$ とし,

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_1(z)S_{r_1}(z) & 0 \\ 0 & z^{r_1(n_1-1)}T_2(z)S_{r_2}(z) \end{pmatrix}$$

による変換を考えれば, $N - r_1 n_1 - r_2 n_2 > 0$ となるとき, $\ell = 1$ のときの議論から, n あるいは k が下がった場合に帰着される. 次に, このような N が十分大きく取れない場合を考える. $n_1 \geq n_2$ とし, $A_{21}^{(N)} \neq 0$ ($N \geq 1$) とする. このとき,

$$T(z) = I_n + z^N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (T_{21} \in M(n_2, n_1; \mathbb{C}))$$

による変換 $\varphi = T(z)\psi$ により (2.1) を (2.2) で

$$B(z) = \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix},$$

$$B_{jj}^{(0)} = J(0; n_j) \quad (j = 1, 2),$$

$$B_{21}(z) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z^N \bmod z^{N+1} M(n_2, n_1; \mathbb{C}[z]) \quad (2.20)$$

としたものへと変換することを考える. このためには, (2.3) の z^N の係数を比較することにより, 次を満たす $T_{21}^{(N)}, B_{21}^{(N)} \in M(n_2, n_1; \mathbb{C})$ で, (2.20) の形のものが存在することを示せばよい:

$$J(0; n_2) T_{21}^{(N)} - T_{21}^{(N)} J(0; n_1) = B_{21}^{(N)} - A_{21}^{(N)}. \quad (2.21)$$

(2.17) の場合と同様に, このような $T_{21}^{(N)}, B_{21}^{(N)}$ の存在がわかる. $B_{21}^{(N)} = 0$ の場合は N を $N + 1$ として以上の議論を繰り返す. $B_{21}^{(N)} \neq 0$ の場合は, 次の $S(z)$ による Shearing 変換 $\psi = S(z)\tilde{\psi}$ を考える:

$$S(z) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & z^N I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

すると, (2.2) は

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \tilde{\psi} = C(z) \tilde{\psi},$$

$$C^{(0)} = \begin{pmatrix} J(0; n_1) & 0 \\ B_{21}^{(N)} & J(0; n_2) \end{pmatrix}$$

なる方程式へと変換される. ここで, $C^{(0)}$ は冪零行列であるが, $(C^{(0)})^j$ ($j \geq 1$) の階数を調べることにより, $c_m \neq 0, c_j = 0$ ($m + 1 \leq j \leq n_2$) となるとき, $C^{(0)}$ の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} J(0; n_1 + m) & 0 \\ 0 & J(0; n_2 - m) \end{pmatrix}$$

となることがわかる. ここで, $n_1 \geq n_2$, $m \geq 1$ より, この操作を繰り返せば $\ell = 1$ の場合, 或は N が十分大きく取れる場合に帰着され, その結果, k または n が下がった場合に帰着される. $\ell \geq 3$ の場合も同様にして k または n が下がった場合に帰着される.

最後に, 確定特異点型方程式に関してだが, よく知られているように, ある $M_0 \in M(n; \mathbb{C})$, $T(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}])$ が存在し (2.1) で $k = 0$ としたものは $\varphi = T(z)\psi$ により

$$z \frac{d}{dz} \psi = M_0 \psi$$

へと変換される. 特に M_0 は Jordan 標準形で, その固有値の実部が $[0, 1)$ に入るように取ることができる.

2.4 分解定理

以上の議論の結論として, 本節では不確定特異点における方程式の分解定理を与える. まず, $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^\ell \subset \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}] / \mathbb{C}\{\zeta\}$ に対し, 以下のようにグラフ G を定める: $L_k = \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}] / \zeta^{-k+1} \mathbb{C}\{\zeta\}$ とし,

$$\rho_k : L_k \rightarrow L_{k+1}$$

を自然な射影とする. このとき,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\lambda_i(\zeta) \bmod \zeta^{-k} \mathbb{C}\{\zeta\}\}_{i=1}^\ell \left(\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \right)$$

を node, ρ_k により定まる射を edge, $\{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^\ell$ を leaf とする樹形状の有向グラフ \tilde{G} が得られる. また, L_k の node を level k の node と呼ぶ. 更に, \tilde{G} の edge で, 終点が次数 2 の node となるものの始点をつぶして得られるグラフを G とする. ここで,

$$\lambda_i(\zeta) = \sum_k \lambda_i^{(k)} \zeta^{-k} \bmod \mathbb{C}\{\zeta\}$$

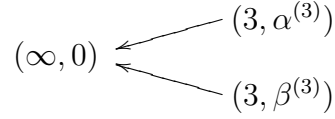
としたとき, G の $\lambda_i(\zeta)$ により定まる level k の node に $(k, \lambda_i^{(k)})$ を対応させた図式 G_Λ を考える.

例 2.1. $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^2$ を

$$\lambda_1(\zeta) = \alpha^{(3)} \zeta^{-3} + \alpha^{(2)} \zeta^{-2} + \alpha^{(1)} \zeta^{-1}$$

$$\lambda_2(\zeta) = \beta^{(3)} \zeta^{-3} + \beta^{(2)} \zeta^{-2} + \beta^{(1)} \zeta^{-1}$$

とすると, G_Λ は



例 2.2. $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^4$ を

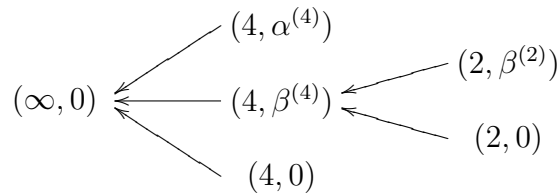
$$\lambda_1(\zeta) = \alpha^{(4)}\zeta^{-4} + \alpha^{(3)}\zeta^{-3} + \alpha^{(2)}\zeta^{-2} + \alpha^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_2(\zeta) = \beta^{(4)}\zeta^{-4} + \beta^{(2)}\zeta^{-2} + \beta_1^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_3(\zeta) = \beta^{(4)}\zeta^{-4} + \beta_2^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_4(\zeta) = \gamma^{(3)}\zeta^{-3} + \gamma^{(2)}\zeta^{-2} + \gamma^{(1)}\zeta^{-1}$$

とすると, G_Λ は



このとき, 次が得られる: ある正整数 q が存在し, $\zeta = z^{1/q}$ とすると, $\Lambda = \{\lambda_j(\zeta)\}_{j=1}^\ell \subset \zeta^{-1}\mathbb{C}[\zeta^{-1}]$, $T(\zeta) \in \text{GL}(n; (\mathbb{C}[[\zeta]]_{1/kq})[\zeta^{-1}])$, $M_j \in \text{M}(n_j; \mathbb{C})$ ($j = 1, \dots, \ell$) が存在し, (2.1) は座標変換 $\zeta = z^{1/q}$ と変換 $\varphi = T(\zeta)\psi$ により次の形へと分解される:

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \psi = \begin{pmatrix} B_1(\zeta) & & & \\ & B_2(\zeta) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell(\zeta) \end{pmatrix} \psi,$$

$$B_j(\zeta) = \lambda_j(\zeta)I_{n_j} + M_j.$$

ただし, M_j は Jordan 標準形で, その固有値の実部は $[0, 1)$ に入るとする. これを福原-Levelt-Turrittin の標準形と呼ぶ. 更に, $T(\zeta)$ は次のような分解を持つ:

$$T(\zeta) = T^{(m)}(\zeta)T^{(m-1)}(\zeta) \cdots T^{(1)}(\zeta)T^{(0)}(\zeta),$$

$$T^{(i)}(\zeta) = \begin{pmatrix} T_1^{(i)}(\zeta) & & & \\ & T_2^{(i)}(\zeta) & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{\ell^{(i+1)}}^{(i)}(\zeta) \end{pmatrix},$$

$$T_j^{(i)}(\zeta) \in \mathrm{GL}(n_j^{(i+1)}; \mathbb{C}\{\zeta\}_{k_i}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \ell^{(i+1)}),$$

$$T_j^{(0)}(\zeta) \in \mathrm{GL}(n_j^{(1)}; \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}]) \quad (1 \leq j \leq \ell^{(1)}).$$

ただし, $\{k_i\}_{i=1}^{m+1}$ ($k_{i+1} > k_i$, $k_{m+1} = \infty$) は G_Λ の node の level のなす集合とし, $\{n_j^{(i)}\}_{j=1}^{\ell^{(i)}}$ は G_Λ の定める level k_i の n の分割, つまり,

$$\Lambda \bmod \zeta^{-k_i+1} \mathbb{C}\{\zeta\} = \{\tilde{\lambda}_j^{(i)}(\zeta)\}_{j=1}^{\ell^{(i)}}$$

としたとき, $n_j^{(i)}$ は $\lambda_{j_1}^{(i)}(\zeta) \bmod \zeta^{-k_i+1} \mathbb{C}\{\zeta\} = \tilde{\lambda}_j^{(i)}(\zeta)$ となる j_1 に関し n_{j_1} を足し合わせたものとする. また, G_Λ に $\tilde{\lambda}_j^{(i+1)}(\zeta)$ を終点, 或は edge 上の点として持つような edge の始点となる level k_i の node がない場合には $T_j^{(i)}(\zeta) = I_{n_j^{(i+1)}}$

とする. また, このような node の係数の集合を $\{\lambda_{j, j_1}^{(k_i)}\}_{j_1=1}^{\ell_j^{(i)}}$ とすると, $T_j^{(i)}(\zeta)$ の各成分は

$$\mathrm{Sing}_{k_i} := \bigcup_{j_1 \neq j_2} \left\{ \frac{1}{k_i} \arg(\lambda_{j, j_1}^{(k_i)} - \lambda_{j, j_2}^{(k_i)}) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k_i} \right\}$$

の方向を除いて k_i -summable となる. 特に, $A(0)$ が Jordan 標準形で, 異なる固有値を持つ場合, $\{n_{j, j_1}^{(i)}\}_{j_1=1}^{\ell_j^{(i)}}$ を G_Λ の定める level k_i の $n_j^{(i+1)}$ の分割とし, $T_j^{(i)}(\zeta)$ をこの分解に合わせて $T_{j, j_1 j_2}^{(i)}(\zeta) \in \mathrm{M}(n_{j, j_1}^{(i)}, n_{j, j_2}^{(i)}; \mathbb{C}\{\zeta\}_{k_i})$ により

$$T_j^{(i)}(\zeta) = \begin{pmatrix} T_{j, 11}^{(i)}(\zeta) & \cdots & T_{j, 1\ell_j^{(i)}}^{(i)}(\zeta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j, \ell_j^{(i)}1}^{(i)}(\zeta) & \cdots & T_{j, \ell_j^{(i)}\ell_j^{(i)}}^{(i)}(\zeta) \end{pmatrix},$$

と分割すると, $T_{j, j_1 j_2}^{(i)}(\zeta)$ は

$$\bigcup_{p \neq j_2} \left\{ \frac{1}{k_i} \arg(\lambda_{j, p}^{(k_i)} - \lambda_{j, j_2}^{(k_i)}) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k_i} \right\}$$

の方向を除いて k_i -summable とできる.

注 2.3. 注 2.2 から $q \leq n!$ と取れることがわかる.

注 2.4. 福原-Levelt-Turrittin の標準形は $\lambda_j(\zeta)$, M_j の Jordan 細胞の並べ替えを除いて一意である. 実際, 二つの変換 $T(\zeta)$, $\tilde{T}(\zeta)$ により二つの標準形が得られたとする. これらの方程式の係数を, それぞれ $B(\zeta)$, $\tilde{B}(\zeta)$ とすると, $S(\zeta) := T^{-1}(\zeta)\tilde{T}(\zeta)$ は次を満たす:

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} S = BS - S\tilde{B}. \quad (2.22)$$

よって, $S(\zeta) \in \text{GL}(n; (\mathbb{C}[[\zeta]])_{1/kq}[\zeta^{-1}])$ となる (2.22) の解の存在条件から福原-Levelt-Turrittin の標準形の一意性が導かれる. また, このような S は定数行列に限られることもわかる.

以上から, $\vec{d} = (d_m, \dots, d_1)$, $d_i \notin \text{Sing}_{k_i}$ に対し, $T^{(i)}(\zeta)$ の Borel 和 $\mathcal{S}_{k_i, d_i}(T^{(i)})$ を取ることにより, 確定特異点型方程式

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \psi = M_j \psi$$

の解の基底 ζ^{M_j} を用いて (2.1) の \vec{d} 方向での解の基底

$$\mathcal{S}_{k_m, d_m}(T^{(m)}) \cdots \mathcal{S}_{k_1, d_1}(T^{(1)}) T^{(0)} \begin{pmatrix} \zeta^{M_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{M_\ell} \end{pmatrix}$$

が得られる.

注 2.5. 方程式の分解を用いずに直接形式解の多重総和可能性を示すこともできる ([Br1]). また, 非線形常微分方程式の形式解に関する多重総和可能性も知られている. [Br2] では Acceleration 作用素を用いて, [RS] では多重総和可能な級数の Cohomological な定式化を用いて証明が与えられている.

注 2.6. 多変数の漸近解析に関しては [Ma] が基本的である. また, 最近の進展に関しては [Mo], [Sa1], [Sa2] 等を参照.

References

[Ba1] W. Balser: From divergent power series to analytic functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1582, Springer-Verlag, 1994.

- [Ba2] ———: Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Springer, New York, 2000.
- [BJL] W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz: Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations, *J. Math. Analysis Applic.* **71** (1979), 48–94.
- [Br1] B. L. J. Braaksma: Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations, *J. Diff. Eq.* **92** (1991), 45–75.
- [Br2] ———: Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **42** (1992), 517–540.
- [GR] H. Grauert and R. Remmert: Coherent analytic Sheaves, Springer-Verlag, 1984.
- [H] Y. Haraoka: Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables, *Funkcial. Ekvac.* **32** (1989), 365–388.
- [Ma] H. Majima: Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1075, Springer-Verlag, 1984.
- [MR] B. Malgrange and J. -P. Ramis: Fonctions multisommables, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **42** (1992), 353–368.
- [Mo] T. Mochizuki: The Stokes structure of a good meromorphic flat bundle, *J. Inst. Math. Jussieu* **10**(3) (2011), 675–712.
- [Ra1] J. -P. Ramis: Dévissage Gevrey, *Astérisque* **59-60** (1978), 173–204.
- [Ra2] ———: Les séries k -sommable et leurs applications, *Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings “Les Houches” 1979*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 126, Springer (1980), 178–199.
- [RS] J. -P. Ramis and Y. Sibuya: A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **44** (1994), 811–848.

- [Ro] P. Robba: Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentielles; applications à la réduction formelle des équations différentielles, Enseign. Math. **26** (1980), 279–311.
- [Sa1] C. Sabbah: Introduction to Stokes structures, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2060, Springer-Verlag, 2013.
- [Sa2] _____: Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2, Astérisque **263** (2000).
- [Si] Y. Sibuya: Linear differential equations in the complex domain: Problems of analytic continuation, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 82, American Mathematical Society, Providence, 1974.
- [Z] M. -A. Zurro: On the rings of formal solutions of polynomial differential equations, Banach Center Publications, **44** (1998), 277–292.