超幾何微分方程式の rigidity による大域解析

原岡喜重 述
近内翔太郎 記

2014.9.1-2014.9.2

熊本大学の原岡です。私は Fuchs 型方程式について今日と明日お話ししようと思います。元々，どうしてそのようなことを考えるのかということを説明するのは大事だと思いますし，説明したいのですけど，準備していたら話す量が膨大になってしまったので，大事だけれどそうゆうところは省略して，ぐいぐいといこうと思います。気になるという人は随時ブレイクして何でそのようなことを考えるのか，ということについて聞いてくれると嬉しいです。

1 Introduction

予備知識はこちらで適当に想定したものに基づいて喋りますので分からないところがあればその都度聞いてください。例えば，超幾何微分方程式はこのような

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

y を未知関数とする 2 階の線型微分方程式です。このように書いたとき $p(x), q(x)$ が係数で，これから考える場合は大抵有理関数だけど，この極のことを特異点と呼びます。特異点ではこの $p(x)$ とか $q(x)$ とかが発散するから，解について変なことが起こるわけです。そういうところは嫌だな，と思うかもしれないけど，そういうところの方が却って情報が集積していて調べやすいことがあります。のっぺりした普通のところだと様子が捕まえにくいんだけど，人間でも危機的状況になるとその人の性格が現れたりするのと同じで，特異点を調べるというのは実は調べやすいことになっている。それで，特異点の近くで調べることを局所解析と言います。

Fuchs 型というのは，特異点が確定特異点であるような微分方程式で，その確定特異点のまわりでどんなことが起きているかというのについては 19 世紀の間に理論が完成してもう完全に分かっています。

それで，特異点がいくつかあると，それぞれの近くでは解の様子が分かるけれど，離れた特異点同士の間，つまりある特異点の近くで解があったとき，それを別の特異点に解析接続して，その近くでどんな風になっているか，ということを調べるのを大域解析と言います。この特異点の間の関係を調べる大域解析，これはまだ，一般には Fuchs 型

微分方程式の場合であってもこうやれば分かるという話は全然できていなくて，我々はその解析方法を持っていないわけです。

ですが，Gauss の超幾何微分方程式のような Fuchs 型微分方程式の全体を見ると，この中に rigid と呼ばれる非常に特別なクラスがあって，ここに属する微分方程式については，雑に言うと何でも分かる。難しいといわれる大域解析もできるということになっています。それ以外にも，rigid ではない方程式でも特別な事情があって大域的な様子が分かる方程式が散在的にあるわけですけど，すごく分かるクラスとほとんど絶望的に分からないクラスという風に，かっちりと分かれているというのがしばらく前までの状況でした。

この rigid というのは，別の言い方をするとアクセサリー・パラメーターを持たない微分方程式と呼ばれるもので，大久保謙二郎先生（残念ながら今年の 7 月に亡くなられました）が，1970 年代ぐらいにこういう風に方程式を見るのが大事ということに気づいて，調べるための色々なアイディアを出され，非常に先駆的なことをやられました。ですから，実は大久保先生の作られた話で大分できるということが今では分かるのですが，とにかく大久保先生の話はあったけど，当時はこういう状況でしかなかったわけです。

ところが，1996 年に Nicholas Katz と言う人が “Rigid local systems” という本を出して [6]，Fuchs 型方程式についての理論を作りました。その結果，Katz の後に Crawley-Boevey[1] や大島先生 [7] が色々な仕事を Katz の仕事に基づいてされて，rigid という分かる世界以外は全部分からない世界だったものに精密な構造が入り，全体が階層構造になっていてその中の一番わかるのが rigid で，分からなさがだんだんと上がっていくという構造になっているというようになりました。Katz は，さらに middle convolution という操作を導入して，同じ階層の方程式が middle convolution で移り合うということを見つけ出しましたが，それが方程式だけでなく方程式に伴う色々な量，つまり局所的な量，大域的な量，解の表示に対しても移り合うことがわかってきました。そうすると，Fuchs 型微分方程式を調べるためにはこの middle convolution で移り合うように類別して，各類の代表元についてだけ調べれば，Fuchs 型方程式全部について分かる，というような非常に精密な構造があることが分かりました。

> **聴講者 A**: 群構造が作用してて，transitive に作用しているというような感じになっているのですか？場所が分かれば全部分かる，等質空間みたいに。

そんな感じです。これは今，rigidity というものでクラス分けしているのだけれど，rigid なクラスはその類に推移的に作用することになっていて，そうでないやつはスペクトル型によって類に分かれて，その類の間では移り合うという構造になっています。

> **聴講者 A**: じゃあ，その rigid というところは同値類が 1 個?

1 個です。

だから，雑な言い方ですけど 1 個簡単な方程式があって，そいつから全てが分かってしまう。何でも分かるといったけれど，その分かり方も非常にはっきり記述されるようになったわけです。

ここら辺の話をよく見ると，middle convolution とかというのは，良く昔から知られている Riemann-Liouville 積分，複素数回微分というやつがあるんですけど，その話なんで

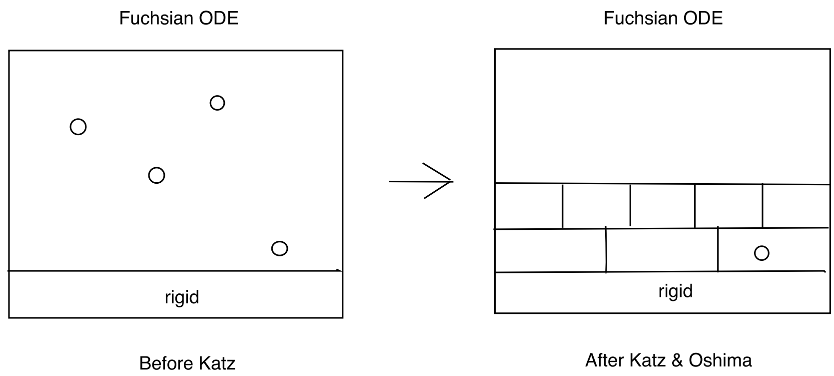

図 1: Fuchs 型常微分方程式全体

す。だから，こういう風に階層分けするというのは，アクセサリー・パラメーターの個数で分けなさいという大久保先生の話自体なので，ここに出ているような登場人物は，実は我々が昔から知っているものばっかりだった。だから，Katz がちょっとアイディアを出してこうしたんだというものではなく，多分多くの人がこういう素材を知っていたんだけれど，こういう話まで組み上げることはなかなかできなかった。けれども，我々が知っている素材を上手く組み合わせて堅牢な体系を作り上げた，というのが，彼の大きな仕事ですごいところだと思います。

これは，常微分方程式の話ですけれど，同じように偏微分方程式系で，連立することで解空間の次元が有限になるようなものを完全積分可能系とか holonomic 系とか言いますが，それについても rigid かどうかという見方でもって，話ができるのではないか，ということが私がこの話を知ってすぐに思いついたことです。それで，考えていくと，多変数の完全積分可能系の研究にもこの rigidity の考え方が有効であることが分かったので，今日はこの常微分方程式についての rigid，Katz 理論の内容をざっと説明して，上手くいけば今日中にその話が終わり，明日はそれに基づいて多変数でどうすればよいかという話をしたいと思います。

2　Fuchs 型常微分方程式

2.1　正規 Fuchs 型方程式

私の話ではこのような形を限った方程式を考えます。

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - a_j} Y, \quad a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}, \quad A_1, \dots, A_p \in M(n; \mathbb{C}) \tag{1}$$

このような形の微分方程式を正規 Fuchs 型，文献によっては Schlesinger 標準系や Fuchsian system という人もいます。この方程式を見ると分かりますが，$x = a_j$ になるというのはこの係数の極になっているから特異点になっています。だから $a_1, \dots, a_p$ がこの方程式の特異点で，さらに $a_0 = \infty$ も特異点となります。特異点の情報を握るのは主要部と言って，ローラン展開の負冪の項が大事となります。a_j については 1 位の極なので留数行列 A_j が主要部を決定していますが，無限遠点においては $t = \frac{1}{x}$ として方程式を書き換えると，$t = 0$ が無限遠点に相当しますから，t に関する主要部が出てきてその特異性が分かります。その時の A_j に相当する留数行列 A_0 は $A_0 = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ となります。

それで，これは私からの提案ですけどこういう方程式を考えるとき，正方行列は Jordan 標準系に直すと固有値が出てきますが，その固有値の中で同じものはあってもよいんだけど，違うものがあったときにはその違うもの同士の間には整数差がない，という状況が，こういう微分方程式を考える時には非常によくでてきて大事なのですが，そういうことを述べる言葉が多分ないんじゃないかと思うので，名前をつけたいと言う提案です。どういう風につけたいかというのには特に強い意見はないのですが，今は分離的という言い方をしたいと思います。非共鳴的という言い方もあるかと思ったけど，共鳴的ではないという否定形で述べるのが嫌だったので，肯定形でシンプルな言い方がないかと思ってとりあえず分離的と呼ぶことにします。さらに，$A_0, A_1, \dots, A_p$ が分離的なとき，(1) を分離的と呼ぶことにします。

以下，これを仮定します。そうすると非常に色々嬉しいことが起こります。なぜ嬉しいのかというのは証明を見ないと分からないのでしませんが，特異点 a_j の近くで解の様子を調べるのが局所解析だったのだけれど，こういう仮定をしていると，局所解が

$$\mathcal{Y}_j(x) = F(x)(x - a_j)^{A_j}$$

のように構成できる。$F(x)$ は行列の $x = a_j$ におけるテイラー展開で初項が $F(a_j) = I_n$ です。念のため言っておくと $(x - a_j)^{A_j} = e^{A_j \log(x - a_j)}$ で行列の指数関数。ともかく，多価性を持つような項及び収束する冪級数という形で解を作ることができます。

このことによって，a_j の近傍に点 x_0 をとると，この近くでこの関数は正則になります。この正則関数を a_j の回りを 1 周するように曲線 γ で解析接続，これを γ_* と書くと，F はそのまま，$(x - a_j)^{A_j}$ だけが変化して $e^{2\pi i A_j}$ が右から掛かるという効果を表します。ということで，これで特異点の近くの解の表示とその解を特異点の近くで回したらどう変化するかということを記述したわけです。

$$\gamma_* \mathcal{Y}_j(x) = \mathcal{Y}_j(x) e^{2\pi i A_j}.$$

局所解析についてはこれでお終い。

今，Riemann 球 $\mathbb{P}^1$ があってそこに $a_0, \ldots, a_p$ という特異点があって，それぞれの近くで解を作り，それぞれの点の近くで x_0 に相当する点を取り，回ると何が起こるかが分かると言う話をしましたが，これはそれぞれの場所ごとの話でした。それで，何でもないところに例えば点 b をとってやると，その近傍では解が作れるわけですけども，この点 b における解がどんな多価性を持っているかということを調べようと思ったら，定義域の中を可能な限り解析接続したときに一体どんな変化を受けるか，ということを全部言えればその解の多価関数としての性質は完全に捉まえたことになります。

こういうことをやろうと思うと，$X = \mathbb{P}^1 \backslash \{a_0, \ldots, a_p\}$ として，$b \in X$ を取ってきてこれの基本群 $\pi_1(X, b)$ というのを考えてやる。それで，この $\pi_1(X, b)$ から道 γ を取ってきてやります。$\mathcal{Y}(x)$ というのを $x = b$ の近傍における基本解行列とします。そうすると，$\mathcal{Y}(x)$ を γ に沿って解析接続した結果はまた点 b の近傍における解となりますが，それは基本解系の線型結合で表されることになるので，ある行列 M があって $\mathcal{Y}(x)M$ という結果になることが分かります。ここは，初めて聞く人には何のことか分からないかもしれませんが我慢して聞いてもらうことにして，分からないときは後でフリータイムの時間いてください。

聴講者 A: 基本解行列の基本解は縦に並べているのか横に並べているのか。

(1) は列ベクトルを未知関数としてみています。

聴講者 A: 列ベクトルを未知関数。

はい。だから $\mathcal{Y} = {}^t(Y_1, \ldots, Y_n)$ としています。それで，n 階の方程式なので n 個の線型独立な解があって，それを並べると $n \times n$ の行列ができ，それを基本解行列と言っています。

岩崎: すみません。どうして突然軟かい $\mathcal{Y}$ になったのですか。

気分の問題でしたが，$\mathcal{Y}$ を行列，Y と書いたら列ベクトルとしましょう。

こうすることで写像

$$\begin{array}{rcl} \rho : \pi_1(X, b) & \to & GL(n, \mathbf{C}) \\ \gamma & \mapsto & M_\gamma \end{array}$$

ができます。どの道に沿って解析接続するかを指定するとその結果どの行列が掛かるかが決まる。この対応のことをモノドロミーとかモノドロミー表現と言います。で，これは両方とも群で群の間の反準同型になることが分かります。それで，この M_γ というのを全て見つけることができれば，この ρ が完全に分かれば，解が多価関数としてどんなものかが完全に分かる。ということで，これが大域解析の一つの目標になります。

聴講者 C: 反表現になるというのは基本群の積の向きは?

基本群の積は左から読んでいく。$\gamma_1\gamma_2$ としたら γ_1 を回ってから γ_2 を回る。多分，トポロジーではこちらがスタンダードじゃないかと思うので。

聴講者 C: そういうとき，その行列と反表現になる。

そうです。そうすると $M_{\gamma_2}M_{\gamma_1}$ という風に対応することになります。

ということで，これは解の多価性を表す大域解析で非常に重要な量で，これを調べようと思うと，まず元である基本群について分かっていると少し様子が分かるのとで基本群の表示を与えますが，これは

$$\pi_1(X,b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p \mid \gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_p = 1\rangle$$

という表示を持ちます。b を基点として最初に a_0 を回ってこれを γ_0，$a_1, \ldots, a_p$ を回るのを $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ とします。1 個だけ回って他は回らないという道を上手く配列すると，それらが群を生成し，$p+1$ 個の元の間には $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p = 1$ が成り立つわけです。

こういう表示がありますので，$\rho(\gamma_j) = M_j$ とすると，反表現なので

$$M_p\cdots M_1M_0 = I_n \tag{2}$$

を満たす $p+1$ 個の行列の組 $(M_0, M_1, \ldots, M_p)$ が表現 ρ を決定していることになります。生成元の行き先さえ決めればよい。そしてその行き先は自動的にこの表示によって関係式 (2) を満たすようになっている。以下，ρ と言ったら適宜 $p+1$ 個の行列の組と思うことにします。次の命題は，明日のために必要となります。

命題 1. $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X,b)$ をともに a_j のみを正の向きに 1 周し，他の a_k は回らないものとする $\Longrightarrow \gamma \sim \gamma'$ *in* $\pi_1(X,b)$.

これは，μ を次の図（図 2）のような a_k を 1 周するような道とすると，$\gamma = \mu\gamma'\mu^{-1}$ となることから分かります。今，γ_j を ρ で送ると行列 M_j ができますが，$[M_j]$ で相似変換による共役類を表すと，これは特異点 a_j によって決まります。他の γ'_j があってもこれは $\pi_1(X,b)$ で γ_j と共役で，その行き先は $GL(n,\mathbb{C})$ で共役，共役類は一致するので $[M_j]$ は特異点 a_j によってのみ決まる同値類となるわけです。これを，局所モノドロミーと言います。

2.2 rigidity

さっき具体的に書いた局所解を解析接続したものを局所モノドロミーとも言いますけど，表現の言葉で言うと γ_j の像 M_j の共役類のことを局所モノドロミーと言います。言いたかったことは，共役類を取っていますから $\mathcal{Y}_j$ を回して出てくる $e^{2\pi i A_j}$，これが局所モノドロミーを決定するわけです。だから，局所モノドロミーは微分方程式を見るだけで計算できるようになっています。つまり $M_j \sim e^{2\pi i A_j}$ で，M_j たちには関係式 (2) が成立する。この $p+1$ 個の行列の組を決めてしまえば勝ちなわけです。そして，決定したらそれはモノドロミー表現が決定されたことになって，大域挙動が分かったことになるわけです。

そして，局所モノドロミーと関係式 (2) という条件だけから $(M_0, M_1, \ldots, M_p)$ が完全に決定してしまう特別な場合があって，そういう場合のことを rigid と言います。この場

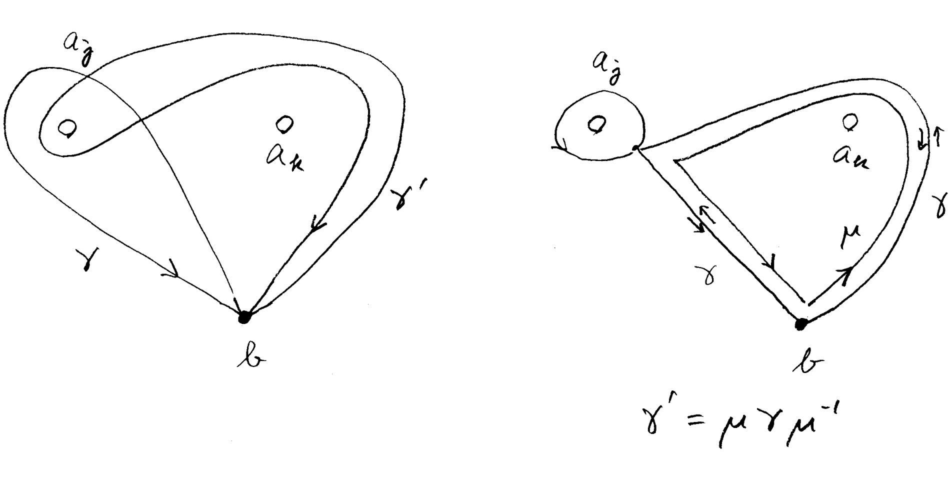

図 2: $\gamma \sim \gamma'$

合は，局所的なデータだけから大域的なデータが決まってしまって大域解析が可能になります。これは，次のような定義で表されます。

定義 2. $\rho = (M_0, M_1, \ldots, M_p)$ が *rigid* というのは $[\rho]$ が局所モノドロミーから一意的に決まることを言う。ここで $[\rho]$ は $\rho' = (N_0, N_1, \ldots, N_p)$ とし，ρ と ρ' が同値というのを j に依らない D があって $M_j = DN_jD^{-1}$ と定めたときの同値類のことを表す。

この rigid というのを別の言葉で言い換えると，ρ と ρ' の各局所モノドロミーが同じというのを $M_j = D_jN_jD_j^{-1}$ としたとき，rigid ということはそこからモノドロミーの類が一意的に決まっているわけだから，各 D_j として j に依らない D というものが取れて $M_0, \ldots, M_p$ と $N_0, \ldots, N_p$ が一斉に相似になる，こういうようなことになります。これは，後で練習問題があるから手を少し動かせば分かると思います。

実は，ρ が rigid というのは簡単に判定することができます。その判定法を与えるのが rigidity 指数というもので，定義はこうです。

定義 3. 次を *rigidity* 指数という。

$$\imath = (1-p)n^2 + \sum_{j=1}^{p} \mathrm{dim} Z(M_j).$$

ただしここで

$$Z(M) = \{B \in GL(n, \mathbb{C}) | BM = MB\}$$

である。

$Z(M_j)$ は局所モノドロミーから計算できる量なので，これは方程式から計算可能な量になります。それで $\mathrm{dim}Z(A)$ は A のスペクトル型というものから決まります。スペクトル型は，A の Jordan 標準形から固有値が何であるかを忘れて，残った形だけに注目したものです。それで，α を A の固有値とし，これに対して $e_j(A:\alpha)$ を A の Jordan 標準形に表れる α の Jordan 細胞のうち，サイズが j 以上のものの個数とします。これを使ってスペクトル型を書きます。サイズが j のものを当てても良いんだけれども，j 以上のものとするのが賢いやり方です。

例 4.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ & \alpha & 1 & & & \\ & & \alpha & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & \beta & 1 \\ & & & & & \beta \end{pmatrix}$$

とすると $e_1(A:\alpha) = 2$, $e_2(A:\alpha) = 1$, $e_3(A:\alpha) = 1$ で 4 以上のものはないのでここで止めて (211) で α の *Jordan* 細胞を表す。よって A のスペクトル型を $A^\natural$ とすると，β に関するデータは (11) なので $A^\natural = ((211), (11))$ となる。

この例のように，A の各固有値の e_j を集めて並べたものを A のスペクトル型と言います。このとき，

$$\mathrm{dim}Z(A) = \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} e_j(A : \alpha)^2$$

となることが分かります。これもやった方が教育的だと思うけど，申し訳ないですが演習問題に回します。

つまり，Jordan 標準形の型だけを取り出すと rigidity 指数の右辺に出てくる値を計算できます。そして，rigidity 指数に関しては次の Katz による定理が成立します。

定理 5. *(Katz)* ρ が既約なら *rigidity* 指数は 2 以下。さらに ρ が既約のとき，*rigid* であることと *rigidity* 指数が 2 であることは同値。（ここで $\rho = (M_0, M_1, \ldots, M_p)$ が既約とは，各 M_j の全てに共通の不変部分空間が自明なものしかないことを言う。）

だから，p と n とスペクトル型を与えれば $\imath$ が決まり，これがちょうど 2 になるようなものを与えることができれば rigid なスペクトル型ができて，そういうスペクトル型を留数行列に持つような正規 Fuchs 型方程式については，局所モノドロミーから大域的なモノドロミーが計算できるわけです。

> **岩崎**: 一意的に決まるというのと計算できるというのはちょっとギャップがある気がしますけど

ギャップはあります。一意的に決まるというのは定義からですけど実際，事実としては具体的に書けるというとこまで言えるので，大域的な M_j たちの一斉相似類というのは，具体的に書き下すことができます。

M_j たちを決定するというのは，$M_j \sim e^{2\pi i A_j}$ と関係式 (2) をみたす行列の組を見つけなさいという問題ですから，M_j の成分を未知数とする連立の代数方程式になって，その未知数の個数と方程式の個数が一致すれば解けるという感じで，未知数の個数と方程式の個数が一致するのが $\imath = 2$ という条件になっている。だから，後は, その代数方程式を解けば良くて，その代数方程式が解けるかどうかというのは別問題だけど，それはちゃんと解けるということが示されるのでモノドロミーは決まります。

> **高山**: ρ が既約だと 2 以下というのが直感的に分からないのですけど，スペクトル型を決めても色々なパラメータがありますよね。そこでの既約って言うのはどういう。

例えば，$M \sim \alpha I_{n_1} \oplus \beta I_{n_2}$ とすると $\mathrm{dim}Z(M) = n_1^2 + n_2^2$ と結構大きくなるわけです。固有値が全部違うとすると $\mathrm{dim}Z(M) = n$ となって，前者の方が圧倒的に大きくなるわけです。なので，同じ固有値がたくさん並んでいるという状況があると中心化群の次元は大きくなります。大きくなると，$\imath$ も大きくなる。それで $\imath$ があんまり大きくなる，つまり同じ固有値をたくさん持つ行列が多くあると，共通の不変部分空間がありやすくなるというような感じです。仮に，全部スカラー行列とすると各次元は n^2 と非常に大きく，共通の不変部分空間をたくさん持っている，そういうのに近づくということで rigidity 指数が大きいということは可約に近づいているという雰囲気がある。

聴講者 A: もちろん，$\imath$ は負になることもあるんですよね。

そうです。2 から $\imath$ を引いたものの個数がアクセサリーパラメータの個数になります。

$\imath = 2$ であれば rigid で，大域挙動が分かるから，そういう方程式を全部リストアップしようと思うのは普通ですが，これは p と n とスペクトル型で決めることのなので，そういうのを全部決めようとおもいます。ちょっとやってみます。

例 6. (1) $n = 2$ のとき
対応するスペクトル型は (11), ((11)), (2) の 3 種類。このうち (2) というのはスカラー行列でつまらないので削る，考えないことにします。そうするとどちらでも中心化群の次元は $1^2 + 1^2 = 2$ となって，$Jordan$ 細胞があるかないかに関わらず中心化群の次元が計算できる。このようなところで，e_j という表し方は便利です。そうすると，各々の特異点のスペクトル型から決まる中心化群の次元を z_j と書くと

$$\imath = (1-p) \times 2 + \sum_{j=0}^{p} z_j$$

となっていて，こいつが 2 になって欲しいわけですけど，今 $z_j = 2$ なので

$$\imath = 6 - 2p$$

より，$p = 2$。よって $n = 2$ のときは $p = 2$ のときだけが $rigid$ でそのときのスペクトル型は $((11), (11), (11))$。(11) は ((11)) かもしれないけど，結果に関係しないので (11) と書いたらどちらかを表していると理解してください。あるいは面倒くさければ $Jordan$ を考えず対角化可能な場合だと思って読んでもらっても構いません。

それでおなじように $n = 3$ を考えます。
(2) $n = 3$ のとき
可能なスペクトル型は (111) と (21) で中心化群の次元は 3 と 5 となる。$\imath = (1-p) \times 9 + \sum_{j=0}^{p} z_j$ なので，$rigid$ になるための条件は $\sum_{j=0}^{p} z_j = 9p - 7$。
$p = 2$ のとき $z_0 + z_1 + z_2 = 11$ よりスペクトル型は $((211), (111), (111))$ となる。
$p = 3$ のとき $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 20$ なのでスペクトル型は $((21), (21), (21), (21))$。
$p \geq 4$ のときは存在しない。
(3) $n = 4$ のとき
可能なスペクトル型は (31), (22), (211), (1111) となり，
$p = 2$ のとき
$rigid$ なスペクトル型は $((31), (1111), (1111))$, $((22), (211), (1111))$, $((211), (211), (211))$
$p = 3$ のとき
$((31), (31), (31), (1111))$, $((31), (31), (22), (211))$, $((31), (22), (22), (22))$,
$p = 4$ のとき
$((31), (31), (31), (31))$

このようにして，このゲームは答えを出すわけですけど，実は $((31), (31), (31), (1111))$ を持つような行列のスペクトル型の組は存在しません。

だから，単に$\imath = 2$になるようなスペクトル型の組を見つけてくるだけではダメで，何らかの判定が関わっています。これは，大島先生もやられているけどCrawley- Boeveyという人が，彼はスペクトル型とは言っていないけど，こういうようなスペクトル型を求めるための特徴付けというのをしていて，それを良く読むと実現可能な，つまり存在するようなスペクトル型を見つけるアルゴリズムというのがあります。これは明日紹介しますが，そのアルゴリズムにかけるとこれは撥ねられて，$\imath = 2$だけど存在しないことが分かります。

> **岩崎**: その存在しないというのは，そのスペクトル型を持つ既約表現が存在するかということ?

既約じゃなくて，もう行列の組として存在しないということ。

> **岩崎**: もう行列として。

さっきも言ったけども連立代数方程式が解を持たないということになる。

> **岩崎**: では，持ったとしても既約になることはある。

持ったとしても可約になってしまう。

> **岩崎**: ああ，可約になってしまう。

可約になってしまうことも理論的にはあるけどアルゴリズムにかけるとちゃんと既約な状態のものだけがアウトプットとして出てくる。

> **岩崎**: そのアルゴリズムというのは単に行列の組でその代数方程式をみたすもの。

で既約なものが,

> **岩崎**: かつ既約という条件が入れているという意味で。

既約なものがあるように固有値をとれるような時のスペクトル型を篩に掛けるやり方です。

2.3 middle convolution

middle convolutionというのをIntroductionで出しましたが，それはFuchs型方程式を別のFuchs型方程式に移すような変換だと思うことができて，それに付随してモノドロミーとか接続係数とか解の表示とかいうのも移っていくわけです。だから，その移り合うものの中で一番簡単なものについて，解の表示でもモノドロミーでも求めてやると，それで移り合うような方程式については全部分かってしまうというものになっています。これはやると時間が掛かるので，今日は導入だけを話そうと思います。ちょっとイントロでも言ったけど

$$I_a^\lambda f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x f(t)(x-t)^\lambda dt$$

として $a \in \mathbb{C}$，f はしかるべきところで正則な関数で，$\lambda \in \mathbb{C}$，その f に対してこういう風に変換して別な関数を作るという操作があります。こういうのを Riemann-Liouville 積分といいます。これは，昔から知られていて岩崎先生が書かれている "From Gauss to Painlevé" を読んでいただくと良く分かると思いますが，複素数回微分するというのに相当していて，この $\lambda = -n$ という負の整数の時には f を n 回微分することと同じ結果を生み出すような解析的な表示になっています。また，これは

$$I_a^{\lambda} I_a^{\mu} = I_a^{\lambda+\mu}$$

のような加法性を持っていたりします。

高山: $-n$ になると，$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}$ って 0 になりますよね。

そうです。$-n$ になると $(x-t)^{-n}$ が極を持つので端点 x での積分は発散するので，そこは積分の正則化ということをして，すると正則化する係数が発散するのでその発散する奴とその Γ 関数が打ち消しあってちょうど微分の項が残るという形にできます。

聴講者 C: その a というのは何なんですか?

aっていうのは，領域 D があって，その領域 D の端でも中でも良くて，a を止めておいて x という色々動くのを取るわけです。それで a から x まで適当に道をとるというものです。

聴講者 C: x の n 階微分というのの証明は。

この a は関係なくなります。今の高山先生を質問をもう少しちゃんと言うと，a から x までの道を a から x の近くまでの道と x の周りを回る道の 2 つに分けます。それで説明はしませんが，積分の正則化というのをします（図 3）。このとき，Γ の中は $-n$ になると極になるからその逆数は 0 になるので，a から x の近くまでの道には 0 が掛かっているから消えてしまって，x の周りの積分だけになります。そうすると，コーシーの積分表示で n 階微分になるというわけで a は関係しなくなる。

それで，(1) のような微分方程式を考えていたわけですけど，これに対し

$$Z(x) = I_a^{\lambda} Y(x)$$

というのを考えてみます。そうすると，まだきちんと定式化していない雑な言い方ですけど，$Z(x)$ はまた別な微分方程式を満たします。そして，積分変換をしただけだから $Z(x)$ の満たす微分方程式を書き下すことができます。そういう方程式は一般に可約になるかもしれないから，その既約部分を取り出します。可約な微分方程式というのは，より階数の小さい微分方程式を続けて解くことで解けるような方程式なので，そこに出てくる，より階数が小さくて，それ自身はそれ以上分解できないような既約部分を取り出す。その既約部分を取り出す操作を middle convolution と言うわけです。

実際に定式化する際には，この積分を表に出さずに単にこの行列 A_j 達に対してどうすれば良いかという風に言うことができて，その手続きによって，元の方程式から別な方程

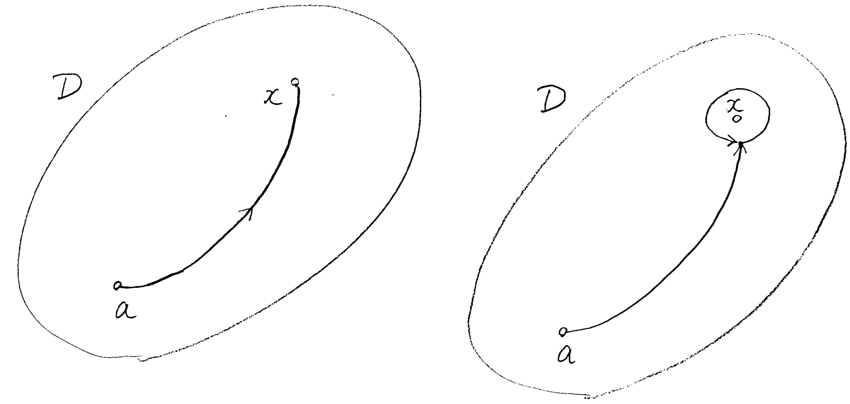

図 3: Riemann-Liouville 積分の正則化

式を代数的に構成することができます。だから，実質的には Riemann-Liouville 変換をしているだけですけど，それを微分方程式の操作として定式化することができます。ここでやっているように Riemann-Liouville 積分では続けてやると和をパラメータとするような一発の変換にできるわけですけど，middle convolution でも同じように λ と μ に関する middle convolution を続けて行うと $\lambda+\mu$ に関する 1 回の middle convolution になったり，$\lambda=0$ のときの middle convolution は何もしないことと同じになるという性質があります。あるいは，既約成分を取り出すということから当たり前かもしれないけど既約な方程式を middle convolution しても既約な方程式が手に入る。それから，middle convolution によって rigidity 指数は変化しない。というようなことがわかります。

最初の Introduction につなげれば，rigid な方程式というのは middle convolution，他に addition というのもやるけれど，何回かやると階数が 1 の方程式まで落とすことができる。階数が 1 の方程式というのは求積できてしまうから，求積できる方程式と middle convolution でつながっているのが rigid な方程式ということになって，階数が 1 の方程式の解というのは $(x-a_j)^{\alpha_j}$ の積だから，それをこういう積分変換をしていくと rigid な方程式の解の積分表示が手に入ります。だから，rigid なときには middle convolution を使って解の積分表示を構成することもできます。具体的な A_j から middle convolution の係数を導くプロセスは，明日お話しします。

この middle convolution の考え方は，流用すると多変数の場合にも定義することができて，そうすると，Appell の超幾何関数みたいな系列とか色々な多変数の完全積分可能系と言われているやつの微分方程式系が rigid な常微分方程式から具体的に作るという手

順を与えたりすることができたりします。
終わります。何か質問はありますか。

高山: 聞いたことだけで原理的には演習問題は全部解けるんでしょうか。

1 番は聞いたことではないけれど解けると思います。
2 番も定義が書いてあるから頑張ると解けるかもしれません。
3 番は出てくる文字は講義で言ったので解けるかどうかは分かりませんけど何をすれば良いかは分かると思います。
4 番は，rigid というのは局所モノドロミーから全体が決まるということだけれど，それを具体的に手を動かして決まるかどうかというのを見るので，これは多分教育的な問題で，やってもらうと様子が分かると思います。
4 番では具体的にこれが rigid であるというのを書き下しましたが 5 番では別の場合に，書き下すことを自分でやってみてしかも rigid であることを示してくださいという問題で，これも多分問題の意味は伝わると思います。
6 番はここでやった $n=4$ までの場合を $n=5$ の場合にもやってみると感じが掴めると思って出した問題です。ただ，このアルゴリズムについては今日言えなかったので，その中で実現できないやつもこの状態だとリストアップされてしまうかも知れませんから，それは明日アルゴリズムを知った後で削ると正解になります。
7 番は Riemann-Liouville 変換の加法性を示しなさいという問題で，ヒントの積分の順序交換をすると上手く示せることになります。

演習問題

問 1　正規 Fuchs 型微分方程式

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x-a_j}\right) Y \quad A_j \in M(n, \mathbb{C})$$

を $t = \frac{1}{x}$ で変数変換し，$A_0 = -\sum_{j=1}^{p} A_j$ が $t=0$ における留数行列となることを確かめよ。

問 2　$A \in M(n, \mathbb{C})$ とする。このとき x_0 を基点とし，原点の周りを反時計回りに 1 周して x_0 まで戻ってくる曲線 γ に対して $\gamma_* x^A = x^A e^{2\pi i A}$ を示せ。

問 3

$$\dim Z(A) = \sum_{\alpha} \sum_{j \geq 1} e_j(A; \alpha)$$

を示せ。

問 4 スペクトル型 $((11),(11),(11))$ が rigid であることを示せ。すなわち，$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2, c_1 \neq c_2, a_1a_2b_1b_2c_1c_2 = 1$ とし，

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}, \quad C \sim \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}$$

とする。行列の組 (A,B,C) は既約とする。このとき $[(A,B,C)]$ は一意的であることを示せ。但し，

$$(A,B,C)\sim(A',B',C')\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\exists P\in GL(2,\mathbb{C}),\ A'=P^{-1}AP, B'=P^{-1}BP, C'=P^{-1}CP$$

と定めるとき，$\sim$ による同値類を $[(A,B,C)]$ と表す。

問 5　(1) スペクトル型 $((21),(111),(111))$ が rigid であることを示せ，という問を，前問のように定式化せよ。

(2) (1) で定式化したものを解け。

問 6　$n=5$ の rigid なスペクトル型を列挙せよ。

問 7

$$(I_0^\lambda f)(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^\lambda dt$$

と定めるとき，$I_0^\lambda\circ I_0^\mu=I_0^{\lambda+\mu}$ を示せ。(ヒント:積分の順序交換)

2 日目

昨日，高山先生に参考文献といわれましたが，今書いているものがありますので欲しい方は欲しいということを haraoka@kumamoto-u.ac.jp まで送っていただければ送ります。midlle convolution とかそこら辺のことを分からないとは言わせないぐらい書きましたので，それを見てもらうと分かると思います [5]。

2.4　middle convolution

昨日，middle convolution は実質的には Riemann-Liouville 積分だということを言いましたが，それを正規 Fuchs 型微分方程式 (1) の特異点の位置を気にしない留数行列に対する変換として紹介します。

$\lambda\in\mathbb{C}$ をパラメーターとし，

$$G_j=\begin{pmatrix} O & \cdots & O & \cdots & O\\ A_1 & \cdots & A_j+\lambda & \cdots & A_p\\ O & \cdots & O & \cdots & O\end{pmatrix}\in M(pn;\mathbb{C})$$

とし，ここで λ は $\lambda=\lambda I_n$ を表すものとします。ここで，

$$\mathcal{K}=\left\{\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_p\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{pn}\,\middle|\, v_j\in\mathrm{Ker}A_j\right\},\quad \mathcal{L}=\mathrm{Ker}G_0=\bigcap_{j=1}^p\mathrm{Ker}G_j,\quad G_0=-\sum_{j=1}^p G_j$$

とおいて，$\mathcal{K}$ のベクトルに G_j を掛けてやると

$$G_j\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_p\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0\\ v_j\\ 0\end{pmatrix}\in\mathcal{K}$$

となるので $\mathcal{K}$ はあらゆる G_j に対する不変部分空間になっています。また，$\mathcal{L}$ も G_j たちの不変部分空間になります。そこで，全体をこの不変部分空間で割った商空間 $\mathbb{C}^{pn}/\mathcal{K}+\mathcal{L}$ を考えると，この G_j は商空間に作用しているわけです。ですので，G_j を $\mathbb{C}^{pn}/\mathcal{K}+\mathcal{L}$ への作用として見たものを B_j とすると，これはサイズが $pn-\dim(\mathcal{K}+\mathcal{L})$ で状況によって n より大きくなるときも，小さくなるときも，等しくなるときもあります。それで

$$mc_\lambda : (A_1, \ldots, A_p) \mapsto (B_1, \ldots, B_p)$$

と書いて，これを middle convolution と定めます。昨日ちょっと言いましたけど，元の方程式を Riemann-Liouville 変換をするとある別な微分方程式を満たすわけですが，それは可約かもしれないのでその既約部分を取り出すと説明しました。だから，大雑把に言うと，元の方程式の解を Riemann-Liouville 変換すると G_j 達を留数行列にするような微分方程式の解になって，そいつは一般には可約なので既約部分を取り出す，というのがこの商空間への作用ということで，そうすると B_j を留数行列にする微分方程式ができて，それはある条件のもとでは既約だということが証明できるということになっています。

2.5 middle convolution の解析的な意味

今言ったことを少しちゃんと述べることにします。(1) の解 $Y(x)$ に対して

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{Y(x)}{x-a_1} \\ \vdots \\ \frac{Y(x)}{x-a_p} \end{pmatrix}$$

とすると，これは次を満たすので示してみてください。

問 1 W は

$$(x-T)\frac{dW}{dx} = (G-1)W \tag{3}$$

を満たす。ただし

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_p \\ \vdots & & \vdots \\ A_1 & \ldots & A_p \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_1 I_n & & \\ & \ddots & \\ & & a_p I_n \end{pmatrix}$$

である。

(3) のような形の微分方程式を大久保型といいます。これは大久保先生が, アクセサリーパラメータを持たない微分方程式などを調べるのにふさわしい形だろうと提唱された方程式で，色々，例えば Laplace 変換や Riemann-Liouville 積分など積分変換と非常に相性が良い方程式です。それで

$$U(x) = \int_\Delta W(t)(x-t)^\lambda dt$$

という方程式(3)のRiemann-Liouville変換とします。大久保方程式を満たす解は，Riemann-Liouville 変換するとスカラーだけシフトするという性質を持つので，これは

$$(X-T)\frac{dU}{dx}=(G+\lambda)U$$

という変換をするということになります。この方程式は，正規 Fuchs 型に書き直すと

$$\frac{dU}{dx}=\sum_{j=1}^{p}\frac{G_j}{x-a_j}U$$

となりますので，これで Riemann-Liouville 変換をしたときの微分方程式を手に入れたことになります。そして，この G_j 達は不変部分空間を持つので，$\mathcal{K}+\mathcal{L}=0$ の時はこれでお終いですけど，$\mathcal{K}+\mathcal{L}\neq 0$ の時には不変部分空間を持って，そこから既約成分を取り出すと

$$\frac{dV}{dx}=\sum_{j=1}^{p}\frac{B_j}{x-a_j}V$$

という middle convolution をした微分方程式に辿り着くことになっています。問もですけど，計算をフォローするとここら辺は様子が掴めると思います。これは，若干の普通に成り立つような仮定がいりますけど，次のような性質を満たします。

定理 7. (i)　$mc_0=id$
(ii)　$mc_\lambda\circ mc_\mu=mc_{\lambda+\mu}$
(iii)　$(A_1,\ldots,A_p)$: 既約 $\Rightarrow mc_\lambda(A_1,\ldots,A_p)$: 既約
(iv)　mc_λ は *rigidity* 指数を保つ

それで，middle convolution は解析的に実現できるので，微分方程式の色々な量がこの線型代数的なメカニズムを追跡したり，この積分を追跡するなどをして，どのように移っていくかということを具体的に見ることができて，非常に役に立ちます。

Katz の定義した操作では addition というのも使いますが，これは簡単で留数行列に対して

$$(A_1,\ldots,A_p)\mapsto(A_1+\alpha_1,\ldots,A_p+\alpha_p),\quad(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{C}^p$$

とスカラーシフトを施す操作です。これは，解のレベルで言うと

$$Y(x)\mapsto\prod_{j=1}^{p}(x-a_j)^{\alpha_j}Y(x)$$

という冪関数を掛けるという変換に対応する操作になります。これは明らかに既約性を保ったり，加法性が成立したり，スペクトル型は不変だから rigidity 指数を保つことが分かります。

ということで，何か微分方程式があったら addition とか middle convolution をして別の微分方程式に移すことで色々と行き来ができるようになって，どちらかの方程式が分かっているならもう片方の方程式についても具体的に分かるようになることが期待され

るわけです。特に，addition も middle convolution も 2 回やると 1 回やったことと同じになるので続けてやる限り同じですけど，交互にやると違うもの，つまり 1 回の middle convolution では実現できない新しい操作になるから色々と移るわけです。

だから，目標は色々移していってなるべく簡単にする。なるべく簡単なものにたどり着いたらそれを調べれば，後は addition と middle convolution を追跡して今知りたいものについて分かるということになります。なので，与えられた式をなるべく簡単なものまで帰着させたい，ということになるわけです。

何を持って簡単かというのはちょっと分かりませんが，普通は方程式の階数が小さい方が簡単だろうということで，なるべく簡単というのは階数が addition と middle convolution をやっていく中で一番小さくなるものまで持っていくこととする。すると，後はそれだけを相手にして考えれば良いということになって，こういうもののことを，大島先生の言い方で basic と呼ぶことにします。

定理 8. $(Katz)$ 既約 *rigid* な方程式は階数 1 の方程式に帰着できる。

既約 rigid な方程式があったら，階数が高いかもしれないけど additon と middle convolution を繰り返していくと 1 階の方程式に帰着できる。階数 1 というのは

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{x - a_j} y$$

というスカラー方程式ですから $y = \prod_{j=1}^{p}(x - a_j)^{\alpha_j}$ という解がとれて，これを Riemann-Liouvile 変換したり，あるいは addition で冪関数を掛けるということを何回か繰り替えしていくとこういう rigid な方程式の解が得られますので，このことから rigid な方程式は Euler 型の積分表示を持つことが分かります。これは，他にもモノドロミーや接続係数が追跡できます。後一つ，昨日する予定だったお話を。

> **聴講者 A**: すみません。1 階のものに帰着されたとき，方程式の rank は元々高かったものが小さいものに変わっているので，解の個数は減っているように見えますよね。それで，基本解系を作るためには複数いるのだけれども，そういうのを作るシステムみたいのはちゃんとあるのか。

このメカニズムで言うと積分の積分路を。

> **聴講者 A**: 積分路をちゃんと独立な分だけ決定してくださいという話になるんですね。

はい。まず，階数を p 倍したいわけです。それで，解は積分の端点を $a_1, \ldots, a_p$ と選ぶことによって p 倍される。

> **聴講者 A**: それがちゃんと独立であるかとかは保証されているのか。パラメータは一般として。

今，証明は頭に浮かびませんが，証明されているんだったと思います。

聴講者 B: それは generic だという仮定が。

はい。なんせ，方程式があるのですから，この方程式は階数が高いので。あるいはコホモロジーの次元とかを数えても良いかもしれないけど。ホモロジーの次元としてとれるというのは。もちろんいろんなことが起こると積分でなく留数をとったやつとか色々と出てくるから，全てがこう書けるというのは超幾何の場合にすら成り立たないわけですけど。

聴講者 A: だから，generic という状況では。

これは Riemann-Liouvile 積分だから特異点を端点とするような積分が普通で，a_j というのは既に特異点であることが分かっているからそこを端点に持ってくる。

聴講者 A: 線積分なわけですね。

そうです。

聴講者 A: $W(t)$ というのが方程式の解のように思うと，それが rank の高い local system を決めていると思うということですよね。さらに，$(x-t)^{\lambda}$ が掛かってきている。

だから，x から a_j というので揃えれば良いわけですね。

2.6 Fuchs 型方程式の存在，構成

岩崎: すみません。今の Katz の定理の証明のアイデアを一言で言うと。

middle convolution をすると，単に行列が出ると言ったんだけど，実はこのスペクトル型が元の行列のスペクトル型によってどう変わるかというのが記述されます。それを見て，middle convolution はパラメータ λ によってますけど，なるべく階数が低くなるように λ を選ぶ，あるいは addition をする。つまり $\mathcal{K}+\mathcal{L}$ で割ってますけど，これは $\mathrm{Ker}A_j$ を並べたものと $\mathrm{Ker}G_0$ だったので，これを大きくすると階数が下がってくれる。だから各 A_j 達の中で重複度が一番大きいやつを，それを差し引く addition をすれば $\mathrm{Ker}A_j$ は大きくなる。そういう準備をします。それから λ を $\mathrm{Ker}G_0$ がなるべく大きくなるようにとります。そうすると階数がなるべく低くなります。その時にスペクトル型がどうなっているか分かるので，それと rigidity 指数が 2 という話を組み合わせてあげると，やるごとに本当に階数が下がるという不等式が出てきて，階数が 1 までいくという証明になっています。そのようなことをこれから言おうと思うのですけど。

それで，rigidity 指数を見ると rigidity 指数は既約ならば 2 以下だから 4 以上だとその時点で可約ということが分かってしまうから，これは既約な方程式があるかということについて一つの判定法を与えます。今言ったように middle convolution でもってスペクトル型が変化していくというのを組み合わせて考えて，Fuchs 型方程式といっていますけど固有値のことは忘れてスペクトル型の話だと思って，既約な方程式に対応するスペクト

ル型としてはどんなものがあるか。あるいは，勝手にスペクトル型を与えたときに，何らかの既約な微分方程式の留数行列のスペクトル型になっているかどうか，ということを考えたいと思います。

こういう話は，元々は固有値も込めると共役類ということになるから，留数行列の共役類のセットを与え，つまり $(A_0, A_1 \dots, A_p)$ が入っているべき共役類のセットを指定して，その指定した中から行列を取ってきて足したら O の状態ににできるか，そいつらが既約になるようにできるか，という話にできて，Kostov という人がこれを Deline-Simpson 問題と名づけ，その必要十分条件を与えています。Kosov はそれを，昨日も言いましたけど行列の成分に対する連立代数方程式に解があるかどうかという問題なので，解があるかどうかということを陰関数定理に持ち込んで証明するというやり方で示しています。

一方，Craweley-Boevey という人は quiver の表現を使って，行列があるかどうかというのは quiver みたいなのを与えたときにそれの表現があるかどうかという問題なので，quiver の表現の存在定理というもう一人のカッツ (Victor Kac) の結果に帰着させることで同じ問題を解いていています。それで，Crawley-Boevey の結果の方がスペクトル型を追跡する時に見やすいので，それを使わせてもらうことにします。説明すると長くなるのでその成果のみを紹介しますが，それは，スペクトル型のセットが与えられたとき，それが既約実現可能かどうか，つまりそれをスペクトル型とするような行列の組で足して O で，既約なものがあるかどうか，ということに関するアルゴリズムのことです。

既約実現可能の判定アルゴリズム (Crawley-Boevey)

Step 1. $\imath \leq 2$ か。$\imath = 0$ のときはスペクトル型の最大公約数 (スペクトル型に出てくる全ての値の最大公約数) は 1 か。

Step 2. $(A_0, A_1, \dots, A_p)$ に対応するスペクトル型 $(e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(p)})$ を次のように定める。

$$e^{(i)} = ((e_j^{(i,1)})_{j\geq 1}, (e_j^{(i,2)})_{j\geq 2}, \dots), \quad |e^{(i)}| = \sum_k \sum_j e_j^{(i,k)} = n, \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

$(e_j^{(i,k)})_{j\geq 1}$ は A_i のある固有値に関する Jordan ブロックの個数から決まる数を並べたもの。また，$i = 1, \dots, p$ についての各固有値の固有空間の次元 $e_1^{(i,k)}$ で最大のものは $e_1^{(i,1)}$，すなわち

$$\max_k e_1^{(i,k)} = e_1^{(i,1)}$$

とする。

$$d = \sum_{i=0}^{p} e_1^{(i,1)} - (p-1)n$$

を求める。このとき

$$d \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{既約実現可能}$$

$$d > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e_1^{(i,1)} < d \text{ となるものがある} \Rightarrow (e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(p)}) \text{ は既約実現不可能} \\ e_1^{(i,1)} < d \text{ となるものがない} \Rightarrow \textbf{Step 3} \text{ へ} \end{cases}$$

Step 3. 新しいスペクトル型

$$e'^{(i)} = ((e_1^{(i,1)} - d, e_2^{(i,1)}, e_3^{(i,1)}, \dots), (e_j^{(i,2)})_{j\geq 1}, (e_j^{(i,3)})_{j\geq 1}, \dots)$$

を作る。$e_1^{(i,1)}-d=0$のときはその固有空間がないと思う。このとき$n'=|e'^{(i)}|=n-d<n$に対して
$n'=1$なら既約実現可能で rigid
$n'>1$なら**Step 2**へ

これは1ステップ毎にnが確実に下がっていきますから，いつかは終わり，$n'=1$か$d\leq 0$でストップしたものが既約実現可能となります。

> **岩崎**: Step2 にいくんですか?

2にいきます。

> **岩崎**: 1は?

ここでやったスペクトル型を作るという操作は，addition と middle convolution でやった結果なんですよ。だから$\imath$は変化していない。

> **岩崎**: そうすると，アルゴリズムとしては$\imath$が2以下であるようなスペクトル型を与えるのがスタート地点で，Step2 を Step1 と思ってもよい。

そうですね。アルゴリズムっぽい言い方だとそうかもしれないですね。ただ，実際の作業としてはまずスペクトル型をぼんと与えたときにまずやることはStep1 だなと思ってStep1を書いた。

> **高山**: 新しいスペクトル型を作ると言うのが，さっきの middle convolution と私には繋がって見えないのですけれど。どういう風に。

G_jはある列に$A_1,\dots,A_p$を入れて後はOが入った大きい行列，だからその固有値というのは(j,j)ブロックの$A_j+\lambda$の固有値と0なのでやたら0を増やしている。これがG_jの固有値の状態です。それで，B_jというのはそれをある部分空間に制限したものになるから，固有値はその中からどれかを選んでくることになります。大抵の場合はλでずらした分だけ固有値がずれて，それだけの固有空間があって後は$\mathrm{Ker}A_j$達でどれだけ減るのかを追跡すれば固有値と固有空間の次元が分かります。

例えばA_jに$-\lambda$という固有値があると，(j,j)ブロックにも固有値0が出てきて被ることによって固有値0のJordan細胞のサイズが1上がる特別な場合があって，それを追うことでスペクトル型の変化を追うことができるわけです。

それで，ここでdを引いているのは，$V=\mathbb{C}^n$に対しB_j達が作用する空間を$mc_\lambda(V)$とすると，$\lambda\neq 0$ならば$\mathcal{K}+\mathcal{L}$は$\mathcal{K}$と$\mathcal{L}$の直和なので

$$\begin{aligned}\dim mc_\lambda(V) &= pn-\dim(\mathcal{K}+\mathcal{L})\\ &= pn-\dim\mathcal{K}-\dim\mathcal{L}\\ &= pn-\sum_{j=1}^{p}\dim\mathrm{Ker}A_j-\dim\mathrm{Ker}G_0\end{aligned}$$

となる。ここで，$e_1^{(j,1)}$ というのは固有空間の次元だったので，それが 0 になるように調整すると，$\mathrm{dimKer}A_j = e_1^{(j,1)}, \mathrm{dimKer}G_0 = e_1^{(0,1)}$ となってくれます。つまり，0 の固有空間の次元が一番高くなるように addition で調整します。そうすると，p 個についてはdimKer$A_j = e_1^{(j,1)}$ となっちゃうけど，残りの 1 個については middle convolution のパラメータ λ を上手くとることで一番大きくするから dimKer$G_0 = e_1^{(0,1)}$ となる。そして，middle convolution をすると 1 個の固有空間の次元のみが変化することが分かって，その変化の量がちょうど d になっています。

つまり，こういう数がなるべく大きくなるように選んでなるべく階数を下げようということを middle convolution と addition を使って実現する。その結果のスペクトル型がこれになるわけです。それで，下手なスペクトル型のときには d が大きすぎて不可能な状況になってしまうし，上手くいけば d でつつがなく降りてきて 1 階にまでなれば rigid，あるいは $d \leq 0$ となればその時点で既約実現可能。それはなぜか，というと Crawley-Boevey の quiver の表現に帰着させる話なのでブラックボックスですけど。

問 2 好きに与えられたスペクトル型についてこのアルゴリズムを適用し，既約実現可能性を判定せよ

自分で適当なスペクトル型を与えてみて，それが既約実現可能かを流してみる。最初はなるべく複雑な方がおもしろいと思いますけど，判定してみると様子が分かると思います。ヒントというかアドバイスとしては，これは Jordan 細胞がある場合を一般に書いていますけれど，全部半単純だと思ってやるのが楽です。つまり $e_1^{(i,1)}$ しかない，$j \geq 2$ 以上のはない。こういう状態でも実質的に何も変わりませんので，こういうスペクトル型を与えてやると多分考え易いと思います。

> **岩崎**: 昨日紹介された rigid は $\imath = 2$ という Katz の定理がありますよね。それともそれはそのアルゴリズムを使って証明するんですか。それとは独立な話ですか?

このアルゴリズムを使っても証明できるかもしれないですね。でてきた経緯は独立ですけれども，数学的に独立かどうかはちょっとわかりません。

> **岩崎**: 理論関係をちょっと知りたかったので。

見かけ上は独立ですけれど。

> **岩崎**: 独立に証明できる?

もちろん，このアルゴリズムを使わずに最初は証明されています。それは，各行列毎に相似であれば $\imath = 2$ を使って一斉に相似になるような行列の存在を示すというやり方で証明しています。

> **岩崎**: だから，Step1 で $\imath = 2$ かどうかを判定するわけだから $\imath = 2$ になったらそこで。

$\imath = 2$ でも，昨日やった $n = 4$ で rigid なスペクトル型をリストしたとき 1 個 $\imath = 2$ になるけどダメなやつがあるといったのは，$\imath = 2$ だけれど d が $e_1^{(i,1)}$ よりも大きくなる場合があるというのに相当しますのでそこでは撥ねなくちゃいけないということがあります。

> **岩崎**: Katz の定理を知らずそのアルゴリズムをやってどこで止まるかというと階数が 1 になったところで?

d が $e_1^{(i,1)}$ より大きくなった時に撥ねられる。そうでないときはずっとスルーして。

> **岩崎**: そうすると，$d \leq 0$ となってしまうと既約実現可能ということになりますよね。だから，rigid でも $d \leq 0$ になってそこで終了する場合があるんですか?

0 以下になるのは必ず non-rigid な場合です。rigid になるのは $d > 0$ で階数が 1 まで落ちるというやつだけが rigid です。

3　完全積分可能系

残りの時間でこれに関連する完全積分可能系の話をしようと思います。領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の方程式で

$$du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) dx_k$$

となるものを考えます。ここで

$$u = {}^t(u_1, \ldots, u_N), \quad A_k(x) = (a_{ij}^k(x))_{1 \leq i,j \leq N}$$

で，$a_{ij}^k(x)$ は D 上正則です。これは u を未知関数ベクトルとする連立の偏微分方程式で，ばらして書けば

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k(x) u \quad (1 \leq k \leq n),$$

あるいはさらに未知関数ベクトルの成分毎に書けば

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^k(x) u_j \quad (1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq N)$$

となります。こういう方程式を線型 Pfaff 系と言って，これは偏微分方程式系で，偏微分方程式系の解空間は一般には無限次元なんだけれども上手く連立されていることによって解空間が有限次元，今なら次元は N になって，非常に常微分方程式と近い方程式になっています。それで，近いところと違うところがあって，そこが私はおもしろいと思うのですけど，近いから調べやすくて，調べやすいけど違ってくる，その違いがなかなか楽しい。

この方程式は勝手に a_{ij}^k を与えても解が存在しないので，解が存在するための条件と言うのがあります。微分方程式の解は正則関数で C^2 級になっているから $\partial_{x_l}\partial_{x_k}u = \partial_{x_k}\partial_{x_l}u$ という条件が必要になります。つまり，

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(A_k u) = \frac{\partial}{\partial x_k}(A_l u) \Leftrightarrow \frac{\partial A_k}{\partial x_l} + A_k A_l = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} + A_l A_k$$

となってなくてはならない。これを，完全積分可能といいます。この行列関数の組がこの条件を満たしていなければ解はありません，またこれを満たしていれば解があるということは別に証明できます。ということで，これは解が存在するための必要十分条件となります。

常微分方程式では係数に好きな関数を与えても解がありますけど，線型 Pfaff 系では勝手に与えたやつは大体解がなくて，こういう非常に難しい条件をクリアする A_k 達を絶妙に与えたときにだけ解があるということになります。だから，完全積分可能系においては，方程式を与えるというところから難しいわけです。

これが，まず大きな違いでそれから特異点集合がまた面白くて，常微分方程式は 1 変数で 1 変数関数の特異点というのは点ですけれども，これは 2 変数以上になりますから，ある正則関数の零点集合と言うのが特異点集合になるから広がりを持っているわけです。つまり $a_{ij}^k(x)$ というものの特異点集合，何か超曲面があって，それが特異点集合になっているという状況を考えるので，これも 1 変数の時との非常に大きな違いです。

超曲面というのは，1 つの正則関数が 0 になるような点の集合でそれを S とします。それで今，特に言っていないけど全体として $\mathbb{CP}^n$ みたいなのを考えていて，ここの中に超曲面があるというような状況を考えていて，$S = \bigcup S_j$ と既約分解する。だから，多項式の零点集合が S で，それを既約分解した時の一つ一つの既約多項式の零点集合が S_j というような状況を考えてもらいます。

さて $\gamma, \gamma' \in \pi_1(\mathbb{CP}^n \backslash S, b)$ で，ともに S_j を 1 周し，他の S_k を回らないものとします。と言いましても 1 変数のときと違って，S_j というのは点でなく広がりを持っているので回ると言っても色々ありますが，1 変数の時に紹介したように，$\gamma \sim \gamma'$ ということが示せます。この話は局所モノドロミーを定義するときに使ったわけですけど，多変数でも同じようになっているので，まずモノドロミー表現

$$\rho : \pi_1(\mathbb{CP}^n \backslash S, b) \to GL(N, \mathbb{C})$$

を考えることができる。それで，こういうモノドロミー表現があったとき，何でも良いから S_j を 1 周する道 γ を持ってきて，共役類 $[\rho(\gamma)]$ を考えたら，これは S_j のみで決まります。これのことを S_j における局所モノドロミーと呼びます。そうすると，常微分のときにずっと説明していたのと同じ舞台設定ができて，表現があって，それに対して局所モノドロミーという概念ができたから，局所モノドロミーを指定したとき表現が決まるか，という問題を設定することができ，rigidity に関して同じ枠組みで議論することができます。

それで，常微分のときにはスペクトル型から計算できる rigidity 指数という非常にありがたい量があって，それが 2 であるかどうかを見れば rigid かどうかを判定できたわけです。多変数の場合にそのようなものがあるかということを考えますと，常微分のときには

基本群の表示が非常にシンプルで，$p+1$ 個の生成元 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ に対して $\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_p = 1$ という関係式しかないというものだった。なので，結局考えるものは $p+1$ 個の行列があって，その共役類が指定されていて，それらを全部掛けたら単位行列になる組があるか，という問題として設定されていた。こういうわけですけど，今度は $\pi_1(\mathbb{CP}^n\backslash S, b)$ というのが，S が広がりを持っていることによって幾何学的な形状が色々変わっていますから，これは S 毎に全然違ってくるわけです。そうすると，全ての場合に共通するような設定はできないので恐らく，そういう指数があるかどうかは知りませんけど，ともかく常微分のときのようにこの数です，というのは存在しないと思われる。あるいは一方で，rigidity は常微分の時はスペクトル型で決まって，固有値の特殊値というのはあまり関係がなかった。この場合でも固有値の特殊値というものはあまり関係しないでできるというのは似ているところです。

例えば，次のような $\mathbb{CP}^2$ 上から次の超平面を除いた空間は，Appell の F_1, F_2, F_3, F_4 とか色々な関数の微分方程式の定義域となるが知られていて，考えることになかなか意味があります（図 4）。

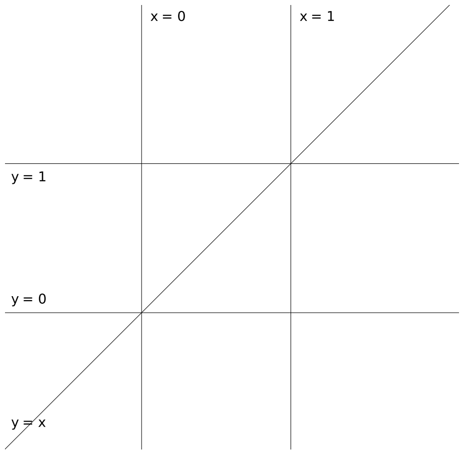

図 4: $xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0$

それで，私は大学院生のとき高山先生が Gérard-Levelt の論文を読んでいるのを聞いて覚えていますけど，下手に因子を与えると方程式は全部，初等関数しか解を持たない。それで初等関数以外の意味のある解を持つ一番小さいやつがこれだ，みたいなことを多分書いてあったんじゃないかと思うのですけど。こういう風に，2 次元だと，2 本が交わるところを正規交叉と言って，こういうところを回る 2 つの道は，どっちを先に回っても良いという可換性を持っているので，モノドロミー表現も可換になって，可換な行列は一斉に三角化できて可約になってしまうという話です。だから，意味のあるものを作ろうとしたらこういう風に 3 本以上交わるような点を持つような配置を持ってこなくてはいけない，というような話だったと思います。

岩崎: すみません。今因子で 1 位の極を持っているようなのを考えているのですか。

実は考えていますけど，単に今は π_1 の話をしようと思っているから，これからはそうです。

今書いている図ですけど，実は実 4 次元空間の中の話を書けないので実 2 次元として書いているから色々と嘘なんですけど，ここでこういう因子を除いた補空間の基本群の元を作ろうと思ったら，ある面で切って (図 5)，これは線に見えるけど，実際は面だから，その上に b がのっていて，因子との交点が抜けているわけです。それで，この中でそれらの交点を回ってくる道を取ってきて b から遠いところから順に $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ とする。これが生成元になって，このうち γ_1 と γ_2 の交点は正規交叉になっているので可換になっていることが分かります。おなじように γ_4 と γ_5 も可換であることが分かって，それ以外は 3 本で交わるようになっているので 3 つの元のサイクリックな式が出てきます。つまり，

$$\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus S, b) = \left\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_5 \,\middle|\, \begin{array}{c} \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1,\ \gamma_4\gamma_5 = \gamma_5\gamma_4 \\ \gamma_1\gamma_3\gamma_5 = \gamma_3\gamma_5\gamma_1 = \gamma_5\gamma_1\gamma_3 \\ \gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_3\gamma_4\gamma_2 = \gamma_4\gamma_2\gamma_3 \end{array} \right\rangle$$

という群になります。この関係式を求める方法は Zariski-van Kampen という定理がありまして，例えば，特異点の数理というシリーズの 4 巻目 [8] にきちんと書かれていて，それを使うとどういう風に生成元を取って，それに関する基本関係式がどうなるか，ということを求めることができます。そして，それを実行すればこの様な表示が手に入ります。

だから，こういう因子を特異点に持つような線型 Pfaff 系のモノドロミー表現を考えようと思うと，γ_j に沿った解析接続の行列を M_j と置けば，$M_1, \ldots, M_5$ を決めれば表現は決まりますが，常微分の時にはそれら全部の積が単位行列という関係式だけだったけれども，今回は基本群の関係式に付随する条件を満たさなければいけなくなります。だから，非常に条件がきつくなって存在しにくくなり，存在するとしたら決まり易くなるということが分かります。つまり，多変数で考えた方が存在はしにくいけど，あったとしたら rigid になり易い。ということで，Appell の $F_1, F_2.F_3, F_4$ みたいなのをこの上の方程式だと思ったとき，それぞれスペクトル型は決まっているから，それを満たすような行列の組を求めなさいという鬼のような計算をしますと，ほぼ rigid であるというようなことが言えます [4]。そこは時間がないので詳しくは言えませんが，ともかく条件が増えることによって特異点の幾何学的な形状が表現，あるいは解の多価性を規定している状況が現れて，そのことによって方程式は存在しにくくなるし，存在したら決まり易くなるということになっています。

それで，最後に middle convolution を多変数の場合にも定義します。それは，1 つ変数を選んでそれを x_i 方向とすると，その方向に関する middle convolution をすることになります。その発想は，常微分のときのように $(A_1, \ldots, A_p)$ から $(G_1, \ldots, G_p)$，そして $(B_1, \ldots, B_p)$ に移るという操作を見掛け上追跡するだけではなく，背後にある解析的などういう変換をしたか，ということを考えて元の完全積分可能系の解を Riemann-Liouville 変換をして，その満たす方程式から既約部分を取り出す，という操作を Pfaff 系に対しても実現することを考えるというようになっています。1 個だけ例をお見せして，それで終わります。

$$du = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{dy}{y-1} + A_3 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_4 \frac{dx}{x-1} + A_5 \frac{dy}{y} \right) u, \quad A_1, \ldots, A_5 \in M(n, \mathbb{C})$$

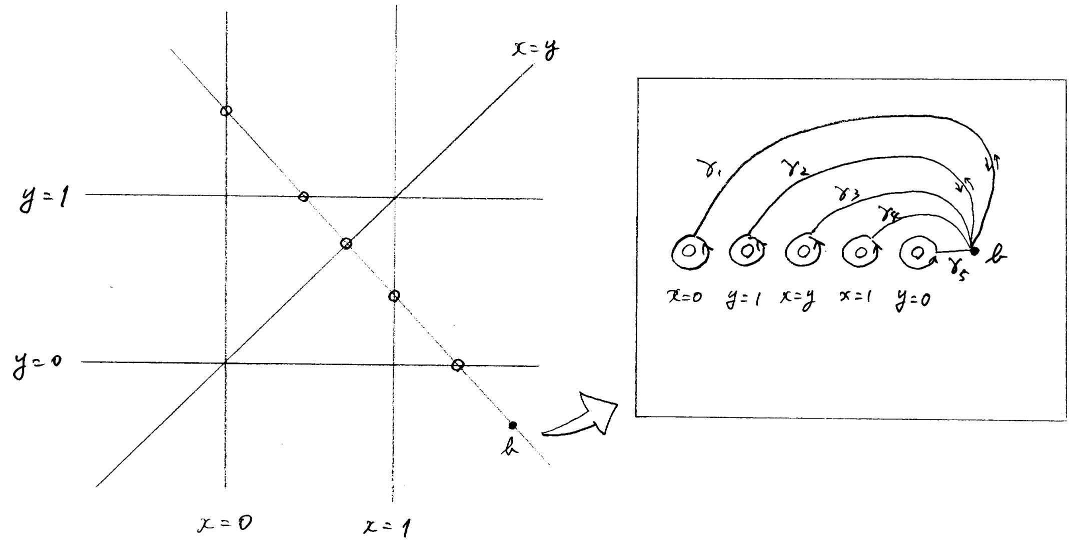

図 5: $\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus S, b)$ の生成元

このような対数形式で書けているような線型 Pfaff 系を考えます。これは完全積分可能としておく。だから，問として

問 3　この方程式の完全積分可能条件を書き下せ。

を与えておきます。これは定数行列の間の関係式になって，それを書いてみるというのはよい練習問題になると思います。それで，x 方向の middle convolution というのは，x の方程式だと思って middle convolution をするということをまずします。つまり A_1, A_3, A_4 にという留数行列に対して G_1, G_3, G_4 を作る。すなわち

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1+\lambda & A_3 & A_4 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ A_1 & A_3+\lambda & A_4 \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ A_1 & A_3 & A_4+\lambda \end{pmatrix}$$

であって，これは常微分のときにやったやつです。このとき y 方向について，G_2 と G_5 が自明ではない話ですが

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_2 & O & O \\ O & A_2+A_4 & -A_4 \\ O & -A_3 & A_2+A_3 \end{pmatrix}, \quad G_5 = \begin{pmatrix} A_3+A_5 & -A_3 & O \\ -A_1 & A_1+A_5 & O \\ O & O & A_5 \end{pmatrix}$$

と定義されて，$(A_1, \ldots, A_5)$ を $(G_1, \ldots, G_5)$ に置き換えた完全積分可能系が得られます。だから，もとが完全積分可能だと新しいやつも完全積分可能で，これに伴って x 方向の G_1, G_3, G_4 関して $\mathcal{K}+\mathcal{L}$ が求まって，このとき G_2 と G_5 も上手く $\mathcal{K}+\mathcal{L}$ で割れる，つまり $\mathcal{K}+\mathcal{L}$ は G_2, G_5 の不変部分空間になっている。このとき既約成分を取り出してあげるとそれが middle convoution になっているということになります。

聴講者: G_2, G_5 を決める指針というのは?

元の微分方程式の解の Riemann-Liouville 変換，つまり $(x-t)^\lambda$ を掛けて積分するみたいなことをします。これは，y の方程式もみたすから，その y の方程式がどう変化するかということを追跡することで得られます。

聴講者: ではそっちの方を見ないと $\cdots$

分からない。

例えば，Appell の F_1, F_2, F_3, F_4 というのは，A のサイズが 1 の場合から addition と middle convolution を繰り返すことによって得られます。あるいは，次のように切ると（図 6），4 点を特異点に持つような常微分方程式が出ますけれど，そのうち $x = 0, 1, \infty$ を固定しておくと，4 点目の特異点は切る場所によって動くわけです。しかし，完全積分可能系があればこれはモノドロミーが決まっていて，動く特異点に関係なく決まっていますので，これはモノドロミー保存変形を与えていると思うことができるわけです。つまり，x 方向の常微分があって 4 点以上特異点を持っている時には，4 点目以降の特異点に関する偏微分方程式を変形方程式として手に入れることができるのだけど，この場合は middle convolution によって，その変形方程式を作ることができる。A_2, A_5 とかを使っ

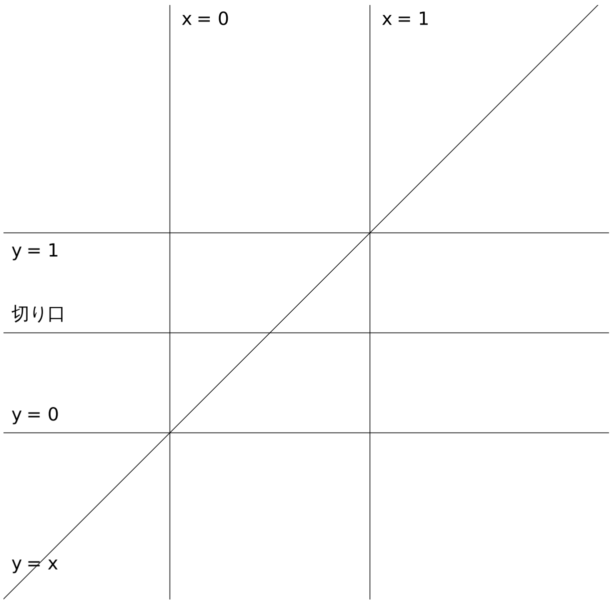

図 6:

て有理的な変形方程式を rigid な方程式から作ることができるというような話と思うこともできます。

それで，興味がある方はこの middle convolution をどう作るかという話を書いた論文 [2] を持ってきましたので言っていただければお渡し致します。それから，Appell の F_4 をこのように π_1 の表現でスペクトル型が決まっているものと思うと rigid になるということを書いた論文 [3] がありますのでついでにこれも差し上げたいと思います。以上です。

参考文献

[1] W. Crawley-Boevey: On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero, Duke Math. J. **118** (2003), 339-352.

[2] Y. Haraoka: Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, Adv. Stud. Pure Math. **62** (2012), 109-136.

[3] Y. Haraoka and Y. Ueno: Rigidity for Appell's hypergeometric series F_4, Funk. Ekvac. **51** (2008), 149-164.

[4] Y. Haraoka and T. Kikukawa: Rigidity of monodromies for Appell's hypergeometric functions, Opuscula Mathematica. **35** (2015), 567–594.

[5] 原岡喜重: 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015 年 9 月出版予定.

[6] N. M. Katz: Rigid Local Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[7] T. Oshima: Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs, **28**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2012.

[8] 徳永浩雄，島田伊知朗: 基本群と特異点, 代数曲線と特異点（特異点の数理 4）, 共立出版, 2001, 1-156.