Pfaff 系の不確定特異点における漸近解析

小池達也　述
紫垣孝洋　記

2014.9.2, 9.3

今回の話は真島先生（お茶の水女子大学）が書かれたシュプリンガーのレクチャーノート [M1] の入門的な紹介をします．多変数の漸近解析と，その微分方程式への応用という話になります．特に最近の研究の動向を考えてこれにしたというわけではなく，かなり個人的な理由というか，高山先生と数年前に A 超幾何系の研究をしていた時，多変数の漸近解析について僕が良く知らなかったので勉強してみようというのが（理由の）一つです．あと一変数の常微分方程式でも非線形の場合だと漸近展開とか summability を考えたとき，2 つのスケールが出てくることがあります．座標変数を x にすると，x と $e^{-1/x}$ の 2 つのもので展開されるといったとがあり，このことも多変数の漸近展開についてよく知っておきたいと思った動機の一つです．最近，不確定特異点を持つ偏微分方程式系の研究が進展しているようなので，知っておいても無駄ではないと思うのですが．

ということで僕の話は 2 つになります．1 つは漸近展開についてです．もう 1 つは微分方程式への応用です．初日の 9 月 1 日に前者，二日目の 9 月 2 日には後者についてお話しします．漸近展開の方は多変数の話をすると言いましたが，2 変数に限ります．1 変数の場合の漸近展開については見たことがある人も多いと思いますが，の復習を少ししてから，その次にこの本に書いてあることの 2 変数の場合の簡単な紹介をしようと思っています．

1　漸近展開

1.1　1 変数の場合

最初は 1 変数の場合を簡単に振り返ります．証明はほとんどしません．Wasow の本 [W, pp.30-43] を見てください．微分方程式を考える上で漸近展開は，線型常微分方程式の場合だと特異点の近傍で解を考えた場合に出てきます．9 月 1 日の原岡先生のお話の中で確定特異点の場合について説明がありましたが，確定特異点の場合は級数解を構成するとそれは収束していました．単独方程式の場合にはフロベニウスの方法などで，log が出てくるかもしれ

ませんが，収束級数が得られます．不確定特異点の場合は少し事情が異なります．例を一つ挙げてみます．微分方程式

$$x^3\frac{d^2u}{dx^2}+(x^2+x)\frac{du}{dx}-u=0 \tag{1.1}$$

を考えます．未知関数を u とし，独立変数を x として，複素平面上で考えています．2 階導関数 d^2u/dx^2 の係数が x^3 なので，原点はこの方程式の不確定特異点です．原点の近傍での解を作るために，解が級数展開できると仮定して方程式に代入すると，係数に関する漸化式が得られ，それを解くことで

$$u=\hat{u}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^{n+1}$$

という解があることがわかります．ところが係数は $n!$ ですから，この級数は収束しません．原点の近くで全く収束しない形式べき級数解がこのようにして得られるのですが，この形式級数がなにか解を表しているのかどうかが問題になるわけです．収束していればその級数で 1 つの関数が得られると考えられるわけですが，このような収束しない級数は解の漸近展開としてとらえます．

実は (1.1) の解は次のようになります：

$$u_1(x)=e^{-1/x},\quad u_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t/x}}{1+t}dt.$$

(2 階の方程式では一方の解がわかると求積法として良く知られた方法で，もう一方の解を求めることができます．今の場合は，u_1 から u_2 を求めることができます.) この二つの解のうち，u_2 と $\hat{u}$ が関係しています．解 u_2 において

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

という原点での Taylor 展開を代入して積分と和の順序を交換すると

$$u_2(x)\overset{\text{formal}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}t^n e^{-t/x}dt=\hat{u}(x)$$

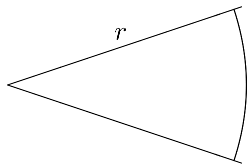
となります．ただし Taylor 展開の収束半径は 1 ですから，積分区間全体では展開は成立していません．また，積分と極限の順序交換もしていますし，最初の等号は形式的なものです [注 1]．二つ目の等号はガンマ関数の定義から従います．形式的な計算で $u_2\overset{\text{formal}}{=}\hat{u}$ となるので，ここから u_2 と $\hat{u}$ は何か関係があるだろうということが想像できます．これを次のようにとらえます：

$$u_2(x)\sim\hat{u}(x)\ \text{in}\ S(-\delta,\delta;r)\quad(0<\delta<\pi/2,\quad 0<r\ll 1) \tag{1.2}$$

[注 1] 講義では形式的な等号であることを表すときに ”=” という記号を用いていましたが，出力の都合で講義録では $\overset{\text{formal}}{=}$ を用いました．

記号の意味を説明します．まず $S(-\delta,\delta;r)$ は複素平面内の角領域を表わします．

$$S(\alpha,\beta;r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg x < \beta, \quad 0 < |x| < r\}$$



ただし，周は含まず，とくに原点も除いています．また簡単のため以下では $\beta - \alpha < 2\pi$ とすることにします[注 2]．以下，角領域をこの記号で表します．式 (1.2) に表われる角領域は開き角が $-\delta$ から δ ですから，正の実軸について対称になります．ついでにいくつか記号を導入しておきます．

$$\overline{S}(\alpha,\beta;r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \arg x \le \beta, \quad 0 < |x| \le r\}$$

と定義します．領域 $S(\alpha,\beta;r)$ に（原点を除く）周を付け加えたもので，$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ での閉包です．そして，2 つの角領域 $S(\alpha,\beta;r)$ と $S(\alpha',\beta';r')$ について

$$S(\alpha',\beta';r') \subset\subset S(\alpha,\beta;r) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{S}(\alpha',\beta';r') \subset S(\alpha,\beta;r)$$

と定義します．これは $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta, \quad 0 < r' < r$ と同値です．さらに，角領域 S （といった場合は適当な α, β, r を考えています) に対して $\mathcal{O}(S)$ で S において正則な関数全体を表わすことにします．

これらの記号のもとで，$u_2(x) \sim \hat{u}(x)$ の $\sim$ がどういう意味か定義します．

Def 1.1. 角領域 S，$f(x) \in \mathcal{O}(S)$，$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ （この $\mathbb{C}[[x]]$ は形式巾級数環を表わします）に対して，f が S において $\hat{f}$ に**漸近展開**される（記号では $f(x) \sim \hat{f}(x)\ in\ S$）ということを次式で定義．

$$\forall N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \forall S' \subset\subset S,\ \sup_{x \in S'} \left| \frac{1}{x^N} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right) \right| < \infty.$$

これは次に同値．

$$\forall N \in \mathbb{N}_0,\ \forall S' \subset\subset S,\ \exists C_{N,S'} > 0 \quad s.t. \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right| \le C_{N,S'} |x|^N\ (x \in S').$$

[注 2] 一般の α と β の場合は log の Riemann 面で考えます．

この定義でべき級数 $\hat{f}$ は収束することを仮定していませんが，第 $N-1$ 項までの有限和 $\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ ともとの f との差が原点の近傍では $N-1$ より 1 つ大きい N 乗のオーダーで押さえられるという状況になっています．この $\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ は有限和ですから（関数となっていて），もとの f を近似しているものとしてとらえることができます．もっとも近似でべきを上げれば上げるほど $|x|^N$ は小さくなりますが定数の $C_{N,S'}$ はたいてい大きくなります．そのため，近似として使う場合には N を大きくしすぎると誤差が大きくなることから適当な N で打ち切って使います．

この定義に出てくる $\{a_n\}$ は $f(x)$ から一意に定まります．実際

$$a_0 = \lim_{S' \ni x \to 0} f(x), \quad a_1 = \lim_{S' \ni x \to 0} \frac{f(x) - a_0}{x}$$

などが，定義の評価式に $N = 1, 2, ...$ を代入するとわかります．従って $\sum a_n x^n$ と $\sum b_n x^n$ がそれぞれ漸近展開であれば，$a_n = b_n$ となります．

問 1. 漸近展開 (1.2) が成立することを示せ．

いくつか大事な性質を証明なしで挙げます．

Prop 1.2. $f \sim \hat{f}$，$g \sim \hat{g}$ in S のとき，S において次が成立．

$$\text{(i) } f + g \sim \hat{f} + \hat{g}, \quad fg \sim \hat{f}\hat{g} \qquad \text{(ii) } \frac{df}{dx} \sim \frac{d\hat{f}'}{dx}$$

Prop 1.3. 角領域 S と $f \in \mathcal{O}(S)$ に対して次の (i) から (iii) は同値．

(i) f が S において漸近展開される．

(ii) $\forall S' \subset\subset S, \forall n \in \mathbb{N}_0, \lim_{S' \ni x \to 0} \dfrac{d^n f}{dx^n}$ が存在．

(iii) $\forall S' \subset\subset S, \forall n \in \mathbb{N}_0, \sup_{x \in S'} \left| \dfrac{d^n f}{dx^n} \right| < \infty$

そしてこのとき $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n!} \lim_{S' \ni x \to 0} \frac{d^n f}{dx^n}$$

と定めると

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ in } S$$

が成立．

漸近展開できる関数 f に対して漸近展開した級数 $\hat{f}$ を対応させる写像を Taylor map と言いますが，Prop1.2 は Taylor map は足し算・掛け算・微分を保つことを意味しており，微分方程式への応用を考える上で便利な性質です．なお Prop1.2 (ii) は強い性質で，複素平面内の角領域で考えているから成立します．実軸上だけでの漸近展開も同じようにして定義できますが，その場合はこの性質は満たされません．

問 2. 実軸上でのみ漸近展開を考えた場合は，Prop1.2 の (ii) は成立しない．例を挙げよ．

（ヒント：$f(x) = e^{-1/x}\sin(e^{1/x})$ を $x > 0,\ x \to 0$ として考えよ.）

注意 1.4. $\mathcal{A}(S) \overset{\text{def}}{=} \{S$ で漸近展開される正則関数 $\}$ について，

$$T : \mathcal{A}(S) \ni f(x) \mapsto \hat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$$

は全射 (Borel-Ritt の定理)．ただし，一般には T は単射ではない．

ですから，どんな形式べき級数を持ってきても，それを漸近展開とするような正則関数が必ず存在します．単射でない例として，例えば S を右半平面とすると，$e^{-1/x}$ は 0 に漸近展開される関数です．従って，$f \sim \hat{f}$ のとき，$f + e^{-1/x}$ も同じ $\hat{f}$ に漸近展開されます.（この一意には定まらないことと Stokes 現象が関係してきます.）

1.2　2 変数の場合

では 2 変数の場合の漸近展開に進みます．多変数の場合は角領域の直積を多重角領域と呼びます．つまり，S_1 と S_2 を角領域として，$S = S_1 \times S_2$ を多重角領域と呼び，$(x_1, x_2) \in S$ として考えます．1 変数の場合と同じく次の記号を定義します：S_1, S_1', S_2, S_2' を角領域とし，$S = S_1 \times S_2$，$S' = S_1' \times S_2'$ とおく．このとき

$$S' \subset\subset S \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad {S_1}' \subset\subset S_1,\ {S_2}' \subset\subset S_2.$$

1 変数の漸近展開を 2 変数の場合に素直に一般化させると次のような定義が考えられます (ただし，この定義はこの講義では使いません．説明のために導入します)．

Def 1.5. 多重角領域 S と $f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(S)$ に対して，

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}_0} a_{mn} x_1^m x_2^n \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]] \quad \text{in} \quad S$$

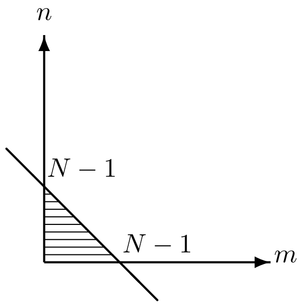
であることを次で定義.

$\forall S' \subset\subset S; \quad \forall N \in \mathbb{N}_0;$

$$\sup_{(x_1,x_2)\in S'} \frac{1}{||x||^N} \left| f(x_1,x_2) - \sum_{m+n\le N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n \right| < \infty.$$

ここで $||x|| = |x_1| + |x_2|$ とした.

この定義は，真島先生のレクチャーノートによると，Hukuhara や Ramis-Sibuya の研究で使われたそうです．この定義は 1 変数の場合に近い定義ですね．N 乗未満のものを足し算しておいて，それを差し引いたものが N 乗程度であるという条件になっています.



図の左下の三角形の部分（斜線部）を差し引いて考えています．これはこれで悪くはないのでしょうが，1 変数のときの漸近展開が持っていた性質のうち微分に関するものを満たしません.

注意

関数 f が Def 1.5 の意味で漸近展開されていたとしても，f の導関数がそうなるとは限らない.

反例については [HS] の 3 節を見てください．1 変数の場合には Prop1.2(ii) にあるように $f \sim \hat{f}$ ならば $f' \sim \hat{f}'$ が成立していました．微分方程式への応用を考えるうえでは，微分と漸近展開の可換性が一般に成立しないとなると，使い勝手が悪くなります.

ところが，この論文 [HS] では次の性質も証明されています.

注意

関数 f および f の全ての導関数が Def 1.5 の意味で漸近展開されることと，これから述べる真島が定義した強漸近展開可能であることは同値.

このことからも真島先生の定義した多変数の漸近展開が良い性質を持っていることがわかります.

さて，定義を紹介する前に考え方（アイデア）を紹介しておきます．
Def 1.5 では

$$\sum_{m+n\leq N-1} a_{mn}x_1^m x_2^n$$

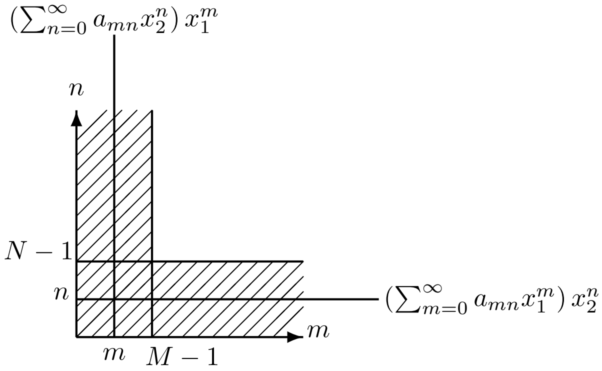
を近似関数と思っていたわけですが，真島の定義では次のように考えます：

アイデア

$M,N\in\mathbb{N}_0$ に対して，近似関数を

$$\mathrm{App}_{(M,N)}(x_1,x_2,f)\overset{\text{roughly}}{=}\sum_{m<M\text{ or }n<N} a_{mn}x_1^m x_2^n$$

として考える（実際には右辺は収束するとは限らないので，あくまでも「気持ち」としてです[注 3]）．



さっきの Def 1.5 での斜線部に相当する，差し引く領域は図のようになります．三角形のような小さい領域ではなくて，m についても n についても両側に無限に走ります．$0\leq m\leq M-1$ なる m を 1 つ止めると，n についての和なので $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}x_2^n\right)x_1^m$ となり，$0\leq n\leq N-1$ なる n を 1 つ止めると，m についての和なので $\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}x_1^m\right)x_2^n$ となります．

ただし，先に述べたように，今の場合は $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}x_2^n\right)x_1^m$ や $\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}x_1^m\right)x_2^n$ の収束は仮定していませんので，このままではダメなわけです．そこで，次のように定義します．

Def 1.6. $S=S_1\times S_2$ を多重各領域とする．関数 $f(x_1,x_2)\in\mathcal{O}(S)$ が S において**強漸近展開**される **(strongly asymptotically developable)**(x_1 と x_2 が $H=\{x_1x_2=0\}$(sector の刃) に近づく）ことを次で定義する：各

[注 3] 講義では「だいたいこういう気持ちである」という意味をこめた等号であることを表すときに "=" という記号を用いていましたが，出力の都合で講義録では $\overset{\text{roughly}}{=}$ を用いさせていただきました．

$m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$g_m(x_2) \in \mathcal{O}(S_2)$, $h_n(x_1) \in \mathcal{O}(S_1)$, $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ が与えられており，任意の $S' \subset\subset S$ と任意の $M, N \in \mathbb{N}_0$; に対して，

$$\sup_{(x_1,x_2)\in S'} \frac{1}{|x_1|^M |x_2|^N} \left| f(x_1,x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x_1,x_2;f) \right| < \infty.$$

ただし

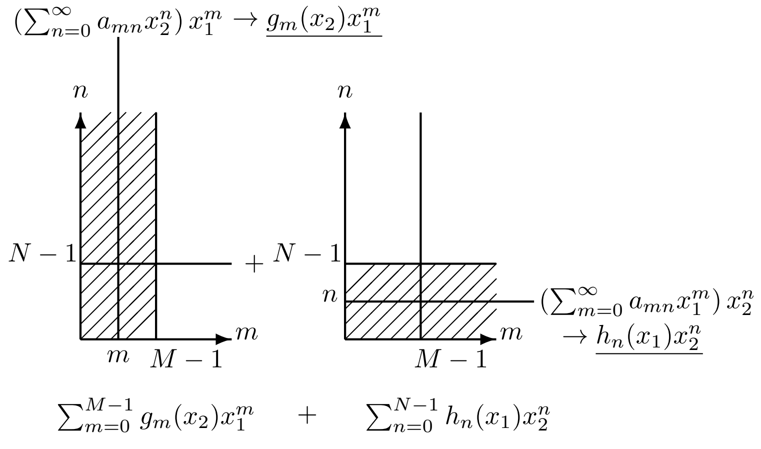
$$\mathrm{App}_{(M,N)}(x_1,x_2;f) := \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2) x_1^m + \sum_{n=0}^{N-1} h_n(x_1) x_2^n - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n. \tag{1.3}$$

以下では強漸近展開される $f(x_1,x_2)$ に対して

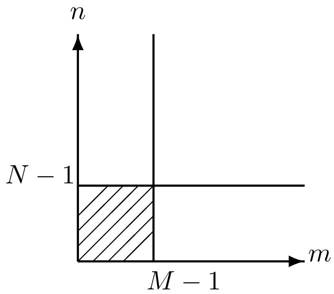
$$\mathrm{TA}(f) = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}_0}$$

とおきます．Def 1.5 の「強漸近展開可能」という言葉は [M1] での strongly asymptotically developable の直訳です（なお，[M2] では単に漸近展開可能と呼んでいます）．

アイデアで述べたように近似関数として $\sum_{m<M \text{ or } n<N} a_{mn} x_1^m x_2^n$ を取りたいのですが，m を止めたときの $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n\right) x_1^m$ や n を止めたときの $\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m\right) x_2^n$ が収束するとは限りませんでした．そこで，$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n\right) x_1^m$ を $g_m(x_2)x_1^m$ として，また，$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m\right) x_2^n$ を $h_n(x_1)x_2^n$ としました．



図は最初の２項です．この２項を足すと，左下で長方形の部分が重なるので足しすぎてしまいます．この重なりの部分の和はもとのまま $\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n$ としています．



斜線部の和が $\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}x_1^m x_2^n$

この交わりを除いたものを近似関数として考えようというわけです.

以上が定義です．見た目には少しややこしいかもしれませんが，(一般の多変数でなく）2 変数に限定したのでまだ比較的見やすいかなと思います．2 変数だと 3 種類の関数が出てきましたが，3 変数だと 7 種類の関数が出てくるわけです．各座標軸方向で 3 種類，座標軸ごとの重なりが 3 種類（x_1 軸方向と x_2 軸方向の交わり，x_2 軸方向と x_3 軸方向の交わり，x_3 軸方向と x_1 軸方向の交わり），最後の定数の部分が 1 種類で合計 7 種類ですね．4 変数だと 15 種類，一般に n 変数だと 2^n-1 種類必要になってきます．こんな素朴な書き方だと一般の場合には記号が間に合いませんから，もっと要領の良い書き方もあるのですが，ここでは具体的に書いた形で記号を与えています.

この近似関数は，N を 0 や 1 にすると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{App}_{(M,0)}(x;f) &= \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2)x_1^m \\
\mathrm{App}_{(M,1)}(x;f) &= \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2)x_1^m + h_0(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{m0}x_1^m
\end{aligned}
$$

となります．M や N が増えたときに近似関数がどうなるかを書き下してみると理解に役立つと思います.

注意

データ a_{mn}, h_n, g_m は f によって一意に決まる.

問 3. これを確かめよ.

証明は 1 変数のときと同様の方法でもできます．後で時間があれば a_{mn}, h_n, g_m はこう書けますという式が出てきますので，それを見てもすぐわかるのですが，練習だと思って確かめてみてください.

それでは，いくつか 2 変数の漸近展開の性質を紹介していきます．以下では，記述の簡単のため

$$\mathrm{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\} \text{ in } S$$

と書けば，f は漸近展開され，Def1.6 の状況になっているものとします．

Prop 1.7. $\mathrm{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\}$ in $S_1 \times S_2$ とすると

$$\begin{aligned} g_m(x_2) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n \text{ in } S_2 \\ h_n(x_1) &\sim \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m \text{ in } S_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

が成立する．

Def1.6 の説明で，$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n\right) x_1^m$ を $g_m(x_2)x_1^m$ で，$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m\right) x_2^n$ を $h_n(x_1)x_2^n$ でそれぞれ表わすと言いましたが，漸近展開の関係が実は成り立っていたのです．

Proof.

$$\mathrm{App}_{(M,N+1)} - \mathrm{App}_{(M,N)} = \left(h_N(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{mN} x_1^m \right) x_2^N$$

また，

$$(\text{左辺}) = (f(x_1,x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)}) - (f(x_1,x_2) - \mathrm{App}_{(M,N+1)})$$

よって

$$|(\text{左辺})| = \left| h_N(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{mN} x_1^m \right| |x_2|^N$$

かつ

$$\begin{aligned} |(\text{左辺})| &\le |f - \mathrm{App}_{(M,N)}| + |f - \mathrm{App}_{(M,N+1)}| \\ &\le C_{M,N}|x_1|^M|x_2|^N + C'_{M,N+1}|x_1|^M|x_2|^{N+1} \end{aligned}$$

($|f - \mathrm{App}_{(M,N)}| \le C_{M,N}|x_1|^M|x_2|^N$ では sector を少し狭めないといけない) より，第 2 式が従う．第 1 式も同様． □

Cor 1.8.

$$\lim_{S_2' \ni x_2 \to 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_m}{\partial x_2^n} = a_{mn} = \lim_{S_1' \ni x_1 \to 0} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h_n}{\partial x_1^m} \tag{1.5}$$

関係式 1.4) と 関係式 (1.5) は同値になっており (1 変数のときの Prop1.3 と同じ)，これは consistency condition と呼ばれています．

関数 f が強漸近展開可能であれば，Def1.6 のような g_m, h_n, a_{mn} が存在します．逆に g_m, h_n, a_{mn} が与えられたときに，それが漸近展開のデータとなるような f が存在するかしないかという Borel-Ritt 型の定理を考えます．その場合，どんな g_m, h_n, a_{mn} でもいいわけではなくて，2 変数の場合には (1.4) か (1.5) を満たす必要があります．そして，この条件が満たされていれば，強

漸近展開可能な $f(x)$ で $\mathrm{TA}(f) = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}$ となるものが存在します（証明は略）．このことからもこの条件 (1.4) や (1.5) が重要であることがわかります．微分方程式から係数比較で漸近展開のデータ g_m, h_n, a_{mn} を作る場合でも，これらの性質を満たしていないといけません．

Thm 1.9. 任意の自然数 $k, l \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\mathrm{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\} \Rightarrow \mathrm{TA}(\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_1^k \partial x_2^l}) = \{G_m, H_n, A_{mn}\}.$$

ただし

$$\begin{aligned}
G_m(x_2) &= (m+1)(m+2)\dots(m+k)\frac{\partial^l g_{m+k}}{\partial x_2^l}, \\
H_n(x_1) &= (n+1)(n+2)\dots(n+l)\frac{\partial^k h_{n+l}}{\partial x_1^k}, \\
A_{mn} &= (m+1)(m+2)\dots(m+k)(n+1)(n+2)\dots(n+l)a_{m+k,n+l}.
\end{aligned}$$

導関数も同じ意味で漸近展開できる，ということを主張する定理です．証明は省略します（k, l が 0 や 1 のときは Cauchy の積分公式で導関数を積分で表すということなどをすれば示されます．他の k, l については帰納的に考えます）．Th.1.9 から g や h は f の導関数を用いて書き表わすことができます．

Cor 1.10.

$$\begin{aligned}
\lim_{S_1' \ni x_1 \to 0} \frac{1}{m!}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= \frac{1}{n!}\frac{\partial^n g_m}{\partial x_2^n} \\
\lim_{S_2' \ni x_2 \to 0} \frac{1}{m!}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m h_n}{\partial x_1^m} \\
\lim_{\substack{S_1' \ni x_1 \to 0 \\ S_2' \ni x_2 \to 0}} \frac{1}{m!}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= a_{mn}
\end{aligned}$$

問 4. Cor1.10 を $m = n = 0$ の場合に示せ．

問 5.

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x; f) \\
&= \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s_M, t_N) \\
&\left(= \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s)^{M-1}}{(M-1)!} ds \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s, t) \right)
\end{aligned}$$

を示せ．

この問の関係式は導関数や誤差関数 $|f(x_1, x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x; f)|$ を評価するときに便利です（私は [H] でこの関係式を知りました）．

以上をもちまして，第 1 回目（9 月 2 日）はこれで終わりにします．

(ここから 9 月 3 日の分です)

昨日の続きをします．Section 1 は昨日（9 月 2 日）で終わるつもりでしたが，二点追加します．

まず一つめです．昨日は強漸近展開を導入しました．

$S = S_1 \times S_2 \subset \mathbb{C}^2, \quad H = \{x_1 x_2 = 0\}$

$f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(S)$ が強漸近展開される

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{TA}(f) = \{g_m(x_2)(S_2\text{で正則}), h_n(x_1)(S_1\text{で正則}), a_{mn}(\in \mathbb{C})\}_{m,n\in\mathbb{N}_0}$

$$\forall S' \subset\subset S; \quad \forall M, N \in \mathbb{N}_0;$$

$$|f(x_1, x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x_1, x_2; f)| \leq C|x_1|^M |x_2|^N \text{on } S.$$

最後の行の絶対値の中身が積分で書けているというのが問 5 でした．最後に 1 つだけ言おうと思っていて（時間の都合で）言えなかった補題があります．その前に 1 つ昨日言い忘れた注意をしておきます．

注意

評価式が（領域を $S' \subset\subset S$ と削らず）S 全体で成立するときは,（漸近展開が）**strict** である (**strictly asymptotically developable**) という．

S で強漸近展開されていれば，その中に入っている S' についてはいつでも stirict です．

領域を少し削っているのは，導関数の評価をするときに領域の端での処理のためです．ところが微分方程式を解くときに積分方程式に直す場合があります．積分方程式であれば端を削ることを考えずにコンパクトな閉集合の中で考えたくなることもあります．その場合に strict ということが出てくるのです．今回使うかどうかはわかりませんが用語を紹介しておきました．

二つめです．問 5 を使うと，次のことが示されます．

Lem 1.11. 多重角領域 S と $f \in \mathcal{O}(S)$ に対して

f が強漸近展開される

$$\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}_0; \quad \forall S' \subset\subset S; \quad \sup_{(x_1,x_2)\in S'} \left| \frac{\partial^{m+n} f}{\partial {x_1}^m \partial {x_2}^n} \right| < \infty$$

1 変数の場合もこのような定理があるのですが，2 変数でも同じようなことが成立するという主張です．

問 6. $\Leftarrow$ を証明せよ．

($\Rightarrow$ は Cor 1.10 より示すことができる．)

以上で Section 1 は終わりです．

2 Pfaff 系への応用

最初に，一般の n 変数で定理を書きます．独立変数を

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad 1 \le n'' \le n$$

とし，領域を

$$S = \prod_{i=1}^{n''} S(\alpha_i, \beta_i; r_i) \times \prod_{i=n''+1}^{n} D(r_i),\ H = \{x_1 x_2 \dots x_{n''} = 0\}$$

と定めます．ここに $S(\alpha_i, \beta_i; r_i)$ は角領域であり，$D(r_i)$ は中心が原点で，半径 r_i の開円板を表わします．そして次のような方程式を考えます：

$$x^{p_i} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = A_i(x) u \quad (1 \le i \le n) \tag{2.1}$$

ただし

$$\begin{cases} p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots p_{in''}, 0, \dots, 0) \in {\mathbb{N}_0}^n \\ x^{p_i} = {x_1}^{p_{i1}} {x_2}^{p_{i2}} \dots {x_{n''}}^{p_{in''}} \quad \text{(multi index)} \\ e_i = \begin{cases} x_i & (1 \le i \le n'') \\ 1 & (i > n'') \end{cases} \\ A_i(x) : S \text{ で正則で } (x_{n''+1}, \dots, x_n) \text{ について一様に強漸近展開可能} \\ \text{(「一様に」は押さえる定数が } (x_{n''+1}, \dots, x_n) \text{ によらないという意味)} \\ u(x) : m \text{ 次元ベクトル値関数} \end{cases}$$

両立条件も仮定します：

$$e_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x^{-p_j} A_j) + x^{-p_i - p_j} A_j A_i = e_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x^{-p_i} A_i) + x^{-p_i - p_j} A_i A_j$$

$$(1 \le i, j \le n)$$

きのう (9 月 2 日) の原岡先生の講義でも両立条件が出てきましたね．ほかにも条件をつけるのですが，大きな設定は以上のとおりです．このような方程式の解がどうなっているかを考えます．ここで n'' までは $e_i = x_i$ ですから $e_i(\partial/\partial x_i)$ は Euler operator になっており，それに x^{p_i} をかけたものになっています．ですから pole としては一次ではない形になっています．

さて，これから述べる定理が成立するための条件として三つのタイプのものがあります．ここではそのうちの一つを紹介することにします．つまり，

任意の $i = 1, 2, \dots n''$ に対して「$p_i = 0$(0 ベクトル)」，または「$p_{ii} > 0$ かつ $A_{i,0} = \lim_{x \to 0} A_i(x)$ の固有値はすべて異なる」

以上の仮定のもとで次が成り立ちます：

Thm 2.1. 領域 S における原点を端点とする任意の半直線 l に対して

$$\exists S' \subset\subset S \ s.t. \ S' \cap l \neq \phi$$

解の基本解系行列は

$$P(x) x^T e^{x^{-p} H(x)}$$

で与えられる．ただし

$P(x)$ は $m \times m$ 行列で，S' で正則で漸近展開される

$T = (T_1, T_2, \ldots T_{n''}, 0, \ldots, 0)$, 各 T_j は $m \times m$ 行列で上三角行列

$x^T = {x_1}^{T_1} {x_2}^{T_2} \ldots {x_{n''}}^{T_{n''}}$

$H(x)$ は対角行列で，S' で正則で強漸近展開され，$\{H(x), T_1, T_2, \ldots T_{n''}\}$ はどの *2* つも可換

方程式 (2.1) のような Pfaffian の形をしている偏微分方程式系を，少し強めの特異性を持っているような状況で考えているわけです．そのときに（局所）解がどういう基本解系行列で与えられるかという問題になります．x^{p_i} がない場合にはよく知られてるのですが，x^{p_i} がかかってきたときにどういう形で与えられるかということを問題にしています．不確定特異点であるようなことが期待されているわけです．

定理の主張に出てくる行列の $P(x)$ ですが，(2.1) の p_i の各成分の最大値をもってくると良いのです．つまり $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots p_{in''}, 0, \ldots, 0)$ について

$$P = \left(\max_i p_{i1}, \max_i p_{i2}, \ldots, \max_i p_{in''}, 0, \ldots, 0 \right)$$

とします．

この定理の証明はしませんが，だいたいどのようなことをするかというと，真島さんの Splitting lemma というものを用いて証明します．${Q_i}^{-1} \nabla_i Q_i$ を考えることで，対角化したり上半三角化したりして簡単な形に変形することで得られます．解のほうのゲージ変換を考えるというわけですね．

$$\left(\nabla_i = x^{p_i} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} - A_i \right)$$

確定特異点じゃなくて不確定特異点のときの常微分方程式のときにも似たようなことをしていましたが，ゲージ変換を何度も繰り返して行列を簡単な形に持っていくという方法で方程式を簡略化させておいて，簡略化した方程式を解くと．簡単な方程式であれば解けるので，あとはそれを逆変換すれば良いですね．それと同じような方針でできますが，今回は Pfaffian になっているので，いろいろな行列の関係（たとえば A_1 と A_2），つまり両立条件を見ながらやっていく必要があります．

以下，もう少し様子を見るために $m = 1$ として考えます．ですので，u はベクトルでなくスカラーの場合を考えてみます．スカラーですから，単独

方程式が複数あるという状況になっています．また，簡単のため変数の数も $n = 2$ としておきます．

$\underline{m = 1, n = 2}$ ($n'' = 2$，つまり $e_1 = x_1, e_2 = x_2$ も仮定)
このとき，改めて方程式を書くと次のようになります：

$$x^{p_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u = A_1(x) u$$
$$x^{p_2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u = A_2(x) u$$

ただし，$x = (x_1, x_2), \quad p_1 = (p_{11}, p_{12}), \quad p_2 = (p_{21}, p_{22}),$

$$x^{p_1} = x_1{}^{p_{11}} x_2{}^{p_{12}}, \quad x^{p_2} = x_1{}^{p_{21}} x_2{}^{p_{22}}.$$

両立条件は,（A_1, A_2 が行列でなく普通の関数なので $A_1 A_2 = A_2 A_1$ であることに注意すると）

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(x^{-p_2} A_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(x^{-p_1} A_1)$$

となります．

Prop 2.2. 次の解が存在する：

$$u(x) = w(x) x^a e^{x^{-q} g(x)}$$

ただし，$a = (a_1, a_2), \quad q = (q_1, q_2)$ で，$w(x), g(x)$ は S で正則で強漸近展開される．

この命題が成立することをこれからざっと見ていきます．
まず，解の形が

$$u(x) = x^a e^{x^{-q} g(x)}$$

であると仮定して方程式に代入し，方程式を書き直します．

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x^{-q} g(x)) &= x^{-p_i} A_i(x) - a_i \\ \Leftrightarrow (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - q_i) g(x) &= x^{q - p_i} A_i(x) - a_i x^q \ (\diamondsuit) \end{aligned}$$

さて，q, a や g を決めていきますが，元の方程式は斉次の方程式だったのに対して，今得られた方程式 ($\diamondsuit$) を g の方程式として考えると非斉次方程式であることに注意してください．この方程式 ($\diamondsuit$) が

$$g(x) = \sum_{j,k \geq 0} g_{j,k} x_1{}^j x_2{}^k$$

と級数展開される解を持つようにするためには右辺の非斉次項に条件が必要となりますが，その条件により q と a を定めます．まず，q は右辺が正則に

なるようにとります．つまり

$$
\begin{aligned}
q &= (\max\{p_{11}, p_{21}\}, \max\{p_{12}, p_{22}\}) \\
&= \bigl((p_1, p_2 \text{ の第 1 成分のうち大きい方}), (p_1, p_2 \text{ の第 2 成分のうち大きい方})\bigr)
\end{aligned}
$$

とします．その上で，（$(\diamondsuit)$ の右辺を展開した時に x^q の項がなくなるように a_i を

$$x^{q-p_i}A_i(x) \text{ の } (x_1, x_2) \text{ に関する漸近展開の } x^q \text{ の係数}$$

と定めます．具体的には

$$B_i(x) := x^{q-p_i}A_i(x) = \sum_{j,k\geq 0} b_{j,k}^{(i)} {x_1}^j {x_2}^k$$

に対して

$$a_i = b_{q_1,q_2}^{(i)}$$

とします．このようにすると，$g(x)$ の展開を $(\diamondsuit)$ に代入することで $g_{j,k}$ が順次定まります．

実際に実行してみましょう．方程式内の $x_i(\partial/\partial x_i)$ は Euler operator であることに注意すると，まず x_1 方向の方程式から（$(\diamondsuit)$ で $i=1$ として，展開して ${x_1}^j {x_2}^k$ の係数を比較すると）

$$(j-q_1)g_{jk} = b_{jk}^{(1)} - a_1\delta_{j,q_1}\delta_{k,q_2} \quad (\diamondsuit\diamondsuit)$$

を得ます．同様に x_2 方向の方程式より（$(\diamondsuit)$ で $i=2$ として，展開して ${x_1}^j {x_2}^k$ の係数を比較すると）

$$(k-q_2)g_{jk} = b_{jk}^{(2)} - a_2\delta_{j,q_1}\delta_{k,q_2} \quad (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$$

を得ます．このようにして得られた漸化式 $(\diamondsuit\diamondsuit), (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$ を解くことで $\{g_{j,k}\}$ を定めますが，注意すべきこととしては

(1) それぞれ $(j-q_1)$ や $(k-q_2)$ で割れば g_{jk} が得られるので，解が 2 通り出てくるが一致しているか (注 4)

(2) $j = q_1$ や $k = q_2$ のときは（割る数が）0 になってしまう

といった問題があります．前者はともかくとして (注 5)，後者について見てみると，まず $j = q_1$ のときは，$(\diamondsuit\diamondsuit)$ から

$$0 = b_{q_1,k}^{(1)} - a_1\delta_{k,q_2} \quad \Rightarrow \quad b_{q_1,k}^{(1)} = \begin{cases} 0 \ (k \neq q_2) \\ a_1 \ (k = q_2) \end{cases}$$

(注 4)両立条件からどちらも一致することがわかります.（問 7）

(注 5)両立条件からどちらも一致することがわかります.（問 7）

となります．また，$j = q_2$ のときは，($\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$) から

$$0 = b^{(2)}_{j,q_2} - a_2\delta_{j,q_1} \quad \Rightarrow \quad b^{(1)}_{j,q_2} = \begin{cases} 0 \ (j \neq q_1) \\ a_2 \ (j = q_1) \end{cases}$$

となります．これらの二式が成立していなければなりません．

問 7. これらの関係式が成立していることを示し，$\{g_{jk}\}$ が定まることを示せ．

ヒント：両立条件を使います．両立条件を B_i で書くと

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_1}B_2 - q_1B_2 = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}B_1 - q_2B_1$$

となることに注意してください．関係式

$$b^{(1)}_{q_1,k} = \begin{cases} 0 \ (k \neq q_2) \\ a_1 \ (k = q_2) \end{cases}$$

について，$k \neq q_2$ の方はこの両立条件から従います．一方で $k = q_2$ のほうは，これが成立するように a_1 を決めたのでした．

以上のようにして，形式べき級数解が定まります．

注意

真島先生の本ではここでの方程式より少し一般化された

$$\begin{aligned} x^{p_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}u + A_1(x)u = b_1(x,u) \\ x^{p_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}u + A_2(x)u = b_2(x,u) \end{aligned} \tag{2.2}$$

の形で考えています（右辺も u に依存しています）．

問 8. (2.2) の両立条件が，

$$\begin{aligned} &x_1\frac{\partial}{\partial x_1}(x^{-p_2}a_2) + x^{-p_1-p_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial u}\right)\cdot a_1 \\ &= x_2\frac{\partial}{\partial x_2}(x^{-p_1}a_1) + x^{-p_1-p_2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u}\right)\cdot a_2 \end{aligned}$$

$$(a_i = -A_iu + b_i(x,u))$$

となることを示せ．ここでベクトル値関数

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$$

に対して，

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial a_1}{\partial u}\right)$$

は $m \times m$ 行列となるが，これがどのように定義されているかも考えること．さらに $b_i \equiv 0$ のとき，以前のものに帰着されることも確かめよ．

きのう（9 月 2 日）の原岡先生の説明にも両立条件の話がありましたが，それと同様の考え方で求めてみよう，という問いです．

このようにして，形式解が得られます．これが解の漸近展開のデータであると期待されますが (注 6)，次はそれを確かめようということになります．そのためには，線形常微分方程式の不確定特異点の場合と同様に，方程式を積分方程式に直し，関数空間をしかるべく設定した上で縮小写像 (contraction) の原理を用いるという方法で行います．

微分方程式を積分方程式に直して考察するところは，このままでは少し難しい話になるので，もう少し簡単な場合を考えて，強漸近展開されていることの証明の流れだけでも見てもらおうと思います．

(縮小写像の原理を用いる) 例

$$u = a(x,u) \overset{\text{def}}{=} a_0(x) + A(x)u + \sum_{m=2}^{\infty} a_m(x)u^m. \qquad (*)$$

ただし，$x = (x_1, x_2)$ で，u はスカラーとします．また $A(x), a_0(x), a_m(x)$ は $S = S_1 \times S_2$ で正則かつ強漸近展開可能とし，

$$\lim_{x\to 0} a_0(x) = \lim_{x\to 0} A(x) = 0$$

とします．

この方程式は微分の入っていない方程式です．

この方程式についても 形式解は作れ，漸近展開のデータとして期待される $\mathcal{F} = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}\}$ が得られます．この $\mathcal{F}$ から，近似関数 $\mathrm{App}_{(M,N)}(x, \mathcal{F})$ が定義できます．

まず，作用素 L を

$$Lv \overset{\text{def}}{=} a(x, v(x))$$

として定めます．解が存在することは関数空間をしかるべく設定し，その空間内で L が縮小写像となることを用いて示すことができます．この部分も標準的なので省略し，ここではそのようにして解を作ったとして，その解が $\mathcal{F}$

(注 6) 漸近展開のデータのうち $g_m(x_2)$ や $h_n(x_1)$ についても解の形を仮定して，それを代入して両辺比較という方法で求めることができます．ここでは省略します．

を漸近展開のデータとして持つことを示す部分を見てみましょう．まず作用素 $L_{(M,N)}$ を

$$L_{(M,N)}v = L(v + \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F})) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F})$$

として定め，この作用素を関数空間

$$V_{(M,N)}[\alpha',\beta';r] = \left\{ f(x_1,x_2) \in \mathcal{O}(\overline{S'}) \,\middle|\, \sup_{x\in\overline{S'}} \left| x_1^{-M} x_2^{-N} f(x_1,x_2) \right| < \infty \right\}$$

の上で考えます．ただし，

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x\in\overline{S'}} \left| x_1^{-M} x_2^{-N} f(x_1,x_2) \right|, \\ \overline{S'} &= S(\alpha'_1,\beta'_1;r'_1) \times S(\alpha'_2,\beta'_2;r'_2) \end{aligned}$$

としています．この $\|f\|$ は $V_{(M,N)}[\alpha',\beta';r]$ のノルムになっています．ノルムは (M,N) で重みをつけています．

さて，これらを用いると議論の流れは次のようになります（以下 $x = (x_1,x_2)$）．

(1) 十分大きいすべての M,N について $L_{(M,N)}$ が $V_{(M,N)}[\alpha',\beta';r]$ contraction(縮小写像) であることを示す (α', β', r も注意して選ぶ).

(2) すると $L_{(M,N)}v_{(M,N)} = v_{(M,N)}$ となる $v_{M,N} \in V_{(M,N)}[\alpha',\beta';r]$ が存在することがわかる．$L_{(M,N)}$ の定義により，これは

$$L(v_{(M,N)}(x) + \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F})) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F}) = v_{(M,N)}(x)$$

に同値.

(3) $u_{(M,N)}(x) := v_{(M,N)}(x) + \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F})$ とすると，$Lu_{(M,N)} = u_{(M,N)}$ が成立．従って $u_{(M,N)}$ は方程式 $(*)$ の解．故に（一意性から） $u(x) = u_{(M,N)}(x)$.

(4) さらに

$$u(x) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F}) = u_{(M,N)}(x) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F}) = v_{(M,N)}(x)$$

であるから，

$$u(x) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F}) \in V_{(M,N)}[\alpha',\beta';r]$$

となり，関数空間（特にノルムの）定義から

$$\sup_{x\in\overline{S'}} \left| x_1^{-M} x_2^{-N} \left(u(x) - \mathrm{App}_{(M,N)}(x;\mathcal{F}) \right) \right| < +\infty$$

が成立する．

このようにして，強漸近展開となることが示されます．最後の部分は時間の関係もあって，かなり駆け足になりましたが，議論の雰囲気が伝われば幸いです．これで終わりにします.

3　演習

3.1　9月2日分・問5

問5 (再掲)

$$f(x_1,x_2)-\mathrm{App}_{(M,N)}(x;f)$$
$$=\int_0^{x_1}ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_{M-1}}ds_M\int_0^{x_2}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{N-1}}dt_N\frac{\partial^{M+N}f}{\partial x_1^M\partial x_2^N}(s_M,t_N)$$
$$\left(=\int_0^{x_1}\frac{(x_1-s)^{M-1}}{(M-1)!}ds\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{N-1}}{(N-1)!}dt\frac{\partial^{M+N}f}{\partial x_1^M\partial x_2^N}(s,t)\right)$$

を示せ.

解答

$$\int_0^{x_1}ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_{M-1}}ds_M\int_0^{x_2}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{N-1}}dt_N\frac{\partial^{M+N}f}{\partial x_1^M\partial x_2^N}(s_M,t_N)$$

を $R_{M,N}$ とおきます. そして最後の積分に注目すると,

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{N-1}}\frac{\partial^{M+N}f}{\partial x_1^M\partial x_2^N}(s_M,t_N)dt_N &= \frac{\partial^{M+N-1}f}{\partial x_1^M\partial x_2^{N-1}}(s_M,t_{N-1})-\frac{\partial^{M+N-1}f}{\partial x_1^M\partial x_2^{N-1}}(s_M,0)\\ &= \frac{\partial^{M+N-1}f}{\partial x_1^M\partial x_2^{N-1}}(s_M,t_{N-1})-(N-1)!\frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M)\end{aligned}$$

を得ます. 1つめの等号のあとの形を見ると, 第1項は番号 N が1つ落ちた形になっていて, 第2項は t に全く依存しない形になっています. 第2項で0を代入していますが, これは極限だと思ってください. 2つめの等号ではCor.1.10を用いています. このことから次を得ます：

$$R_{M,N}=R_{M,N-1}-\int_0^{x_1}ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_{M-1}}ds_M$$
$$\int_0^{x_2}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{N-2}}dt_{N-1}(N-1)!\frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M).$$

右辺の第2項について, 被積分関数は t に依存しませんので,

$$\int_0^{x_2}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{N-2}}dt_{N-1}(N-1)!\frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M)$$
$$=x_2^{N-1}\frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M)$$

となります. よって,

$$R_{M,N}=R_{M,N-1}-x_2^{N-1}\int_0^{x_1}ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_{M-1}}ds_M\frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M)$$

が成立します．第 2 項の積分の項は，1 変数関数の積分を何回かしたもので，Taylor 展開の剰余項となっていることに注意すると，

$$\begin{aligned} R_{M,N} - R_{M,N-1} &= -x_2^{N-1}\left(\int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial {x_1}^M}(s_M)\right) \\ &= -x_2^{N-1}\left(h_{N-1}(x_0) - \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m h_{N-1}}{\partial x_1^m}(0) x_1^m\right) \\ &= -x_2^{N-1}\left(h_{N-1}(x_0) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{M,N-1} x_1^m\right) \\ &= -\mathrm{App}_{(M,N)} + \mathrm{App}_{(M,N-1)} \end{aligned}$$

を得ます．3 つめの等号では Cor.1.10 を用いています．

以上より，

$$R_{M,N} + \mathrm{App}_{(M,N)} = R_{M,N-1} + \mathrm{App}_{(M,N-1)}$$

という式を得ます．いまは N について 1 つ落としましたが，同じようなことをやると M についても 1 つ落とすことができて，

$$R_{M,N} + \mathrm{App}_{(M,N)} = R_{M-1,N} + \mathrm{App}_{(M-1,N)}$$

も成立しています。M についても N についても 1 つずつ落とせますから，次が数学的帰納法によって従います：

$$R_{M,N} + \mathrm{App}_{(M,N)} = R_{0,0} + \mathrm{App}_{(0,0)}.$$

ここで $\mathrm{App}_{(0,0)} = 0$ で，なにも積分しないという意味ですので $R_{0,0} = f(x_1, x_2)$ となります．ですから，

$$f(x_1, x_2) - \mathrm{App}_{(M,N)} = R_{M,N}$$

という示すべき式を得ることができます．

3.2　9 月 3 日分・問 7

問 7 (再掲)

$\{g_{jk}\}$ が定まることを示せ．

解答

両立条件をみたすことを確かめようという問題でした．途中までは講義のときにすでに書いていました．両立条件を式で書くと

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} B_2 - q_1 B_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} B_1 - q_2 B_1$$

となっていました．ここで

$$B_i(x) = x^{q-p_i}A_i(x) = \sum_{j,k\geq 0} b_{j,k}^{(i)} {x_1}^j {x_2}^k$$

より，係数を比べると，

$$(j-q_1)b_{jk}^{(2)} = (k-q_2)b_{jk}^{(1)}$$

を得ます．$j=q_1$ のときには左辺は 0 です。よって $k \neq q_2$ のとき

$$b_{q_1,k}^{(1)} = 0$$

です．同じように，$k=q_2$ のときに右辺が 0 ですので，$j \neq q_1$ のとき

$$b_{j,q_2}^{(1)} = 0$$

です．そして $j \neq q_1$ かつ $k \neq q_2$ のときには,

$$\frac{1}{j-q_1}b_{jk}^{(1)} = \frac{1}{k-q_2}b_{jk}^{(2)}$$

を得ます．じつはこれが g_{jk} になります．x_1 方向の式で求めると左辺，x_2 方向の式で求めると右辺となります．どちらも同じ値になっていることがこの両立条件によって従います．$b_{q_1,k}^{(1)} = 0 (k \neq q_2)$ や $b_{j,q_2}^{(1)} = 0 (j \neq q_1)$ という non-trivial な式もこうして両立条件から従うわけです．1 つだけ両立条件から決まらないものがあって，それが a_1, a_2 だったというわけです.

参考文献

[H] Y.Haraoka: Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables, Funkcialaj. Ekvacioj, **32**(1989), 365-388.

[HS] J. A. Hernández and J. Sanz: Gérard-Sibuya's versus Majima's concept of asymptotic expansion in several variables, J. Austral. Math. Soc., **71** (2001), 21-35.

[M1] H.Majima: *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*, Lecture Notes in Mathematics, **1075**, 1984, Springer.

[M2] 真島秀行: 漸近解析における消滅定理とその微分方程式への応用, 数学 **33**, 1985.

[W] W. Wasow: *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, 1965.