

超幾何学校 2013/2014 講義録 ¹

目次

1. 超幾何関数と統計への応用, 高山信毅 述, 小山民雄 記, 1–21.
2. 多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 1, 松本 圭司, 23–35.
3. Borel 総和法を用いた常微分方程式の漸近解析, 神本晋吾 述, 小山民雄 記, 37–82.
4. 超幾何微分方程式の rigidity による大域解析, 原岡喜重 述, 近内翔太郎 記, 83–112.
5. Pfaff 系の不確定特異点における漸近解析, 小池達也 述, 紫垣孝洋 記, 113–134.

¹本講義録は最新の研究成果をわかりやすく紹介し新規の研究参加のための参考となるように企画しました。出版にあたり神戸大学理学研究科数学専攻の関係者の皆様のご助力に感謝いたします。本講義録は JSPS 科研費 25287018 (“多変数特殊関数の理論と数値計算”) の助成を受けています。

超幾何関数と統計への応用

高山信毅 述
小山民雄 記

2013.9.2-2013.9.3

毎年1月に超幾何方程式研究会というのを神戸でやっていますが、今年から最低4年間、超幾何学校というのを夏に開こうということで、今回は、この第1回です。

早速、話題に移りたいですが、私の話では、こういう超幾何関数

$$\int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

を題材にして、我々がHGM (holonomic gradient method) と呼んでいるものの統計への応用を話す予定です。今年の朝ドラ¹を見ていて北三陸編と東京編に分けるとスイッチできてよいと分かったので、これを参考にして、今日が代数編で明日が統計編になります。両方、かなり独立しています。

1 holonomic系の積分イデアル

今日は代数編ということで、ホロノミック系の積分イデアルについて話します。ホロノミック系の積分イデアルを考えると、またホロノミック系になるという非常に基本的な定理があるのですが、それを証明するのが1日目の目標です。

1.1 Hilbert 多項式

最初の45分間でHilbert多項式について説明しましょう。まずは、簡単な話題から。 F_k というのを

$$F_k = \{(x, y) \in \mathbf{N}_0^2 \mid x + y \leq k\}$$

¹NHK連続テレビ小説「あまちゃん」のこと

という格子点からなる集合だとしましょう (図 1、左、灰色の丸)。

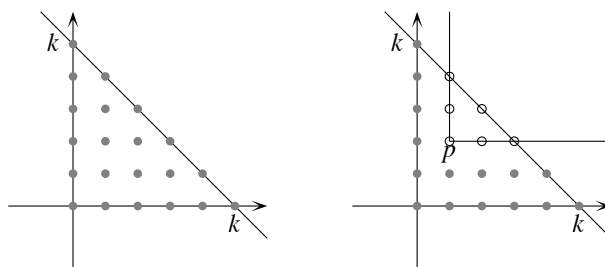


Figure 1: Hilbert 関数

このときに、 F_k の要素の数を勘定すると、これは

$$\begin{aligned} \#F_k &= \binom{2+k}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2!}k^2 + O(k). \end{aligned}$$

ここで、 $O(k^m)$ は k の関数であって、 $\left| \frac{O(k^m)}{k^m} \right|$ が $k \rightarrow \infty$ で有界であるものとします。

これは一番易しい例ですが、次の場合はどうなるでしょう？

$$F_k \setminus (p + \mathbf{N}_0^2).$$

図で描くと、これは図 1、右の図の灰色の丸の個数を勘定する問題になる訳ですね。これは、どうなるかということ、外側の大きい三角から内側の三角を引いてやればよろしいので、

$$\begin{aligned} \#(F_k \setminus (p + \mathbf{N}_0^2)) &= \binom{2+k}{2} - \binom{2+k-|p|}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2!} - \frac{(k-|p|+2)(k-|p|+1)}{2!} \\ &= Ck + O(1) \\ &= O(k) \end{aligned}$$

という数になるわけです。ここで、 $|p| = p_1 + p_2, p = (p_1, p_2)$.

一般的な問題としては、

$$\# \left(F_k \setminus \bigcup_{k=1}^m (P^{(i)} + \mathbf{N}_0^2) \right)$$

という個数の勘定します。図で描くと 図 2 の灰色の丸の個数を勘定しなさい

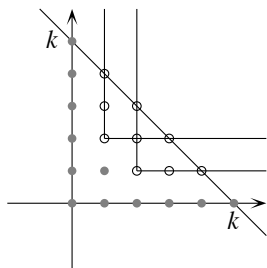


Figure 2: Hilbert 関数

という問題になる訳ですね。これは、今やった考え方が使えるはずですが、全体の中から、これ引いてこれ引いて²、引き過ぎた分を足してやったりすると、この個数は二項係数の和と差で書ける訳です (k が十分大きいとき)。したがって、二項係数の部分は k の多項式で書けるので、個数は k の多項式として書けるということが推測できると思います。

さて以後、 K と書いたら \mathbf{Q} , \mathbf{C} のどちらかの体を表すことにして話を進めさせてください。

聴講者 B: \mathbf{R} (実数体) は使わないんですか？

実数体でも大丈夫です。

二変数の多項式環 $K[x_1, x_2]$ を考えます。この多項式環のイデアル I として、ある単項式 $x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ で生成されるものを考えます。さっき F_k という記号を導入しましたが、ここで新たに新 F_k という記号を導入します。さっきの F_k とは違いますよ。新 F_k というのは、

$$F_k = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \mid c_\alpha \in K \right\}$$

² 音声を書にするとこうなります。図から想像して下さい。

というのだとしましょう。ここで(講義記録音声で)絶対値と呼んでる $|\cdot|$ は、本物の絶対値じゃなくて、成分ごとの和をとった値 $\alpha_1 + \alpha_2$ です。新 F_k は K -ベクトル空間になっているので、この次元を勘定しなさいという問題を考えます。すると、以下の命題のように、さっきの二項係数の式と全く同じものが出てきます。

命題 1. $I = \langle x^p \rangle$ ($x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2}$) の時、商線形空間 $F_k/(F_k \cap I)$ の K 上の次元は、次で与えられる。

$$\dim_K F_k/(F_k \cap I) = \binom{k+2}{k} - \binom{k-|p|+2}{2}$$

Proof. まず、定義に戻って考えれば、 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \in I$ であるための必要十分条件は $\alpha \in p + \mathbf{N}_0^2$ で与えられます。これは、 x^α が $F_k \cap I$ に入っているという条件は、ちょうど α が $p + \mathbf{N}_0^2$ と旧 F_k との共通部分に入っていることと同値であることを意味します。なので、さっきと全く同じ勘定をすることができて、命題の等式が言えます。つまり、 $\beta \in F_k \setminus (p + \mathbf{N}_0^2)$ とすると、 x^β が $F_k/(F_k \cap I)$ の K -ベクトル空間としての base であるということです。 \square

一般にモノミアルで生成されるイデアル $I = \langle x^{p(1)}, \dots, x^{p(m)} \rangle$ に対しては、次が成り立ちます。

命題 2. $\dim_K F_k/(F_k \cap I)$ は k が十分大で k の多項式となる。

これは、次元の計算を格子点の数え上げに帰着することで、証明できます。怪訝な顔をしている人もいるので、例をやってみると、 $K[x_1, x_2]$ のイデアル $I = \langle x_1 x_2, x_1^2 \rangle$ について、商ベクトル空間 $F_k/(F_k \cap I)$ の base は図 3 の

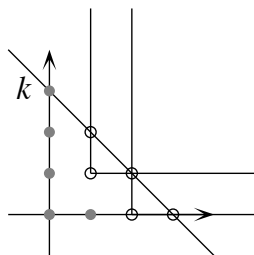


Figure 3: $I = \langle x_1 x_2, x_1^2 \rangle$

灰色の丸に対応するモノミアル $1, x_1, x_2, x_2^2, \dots, x_2^k$ で与えられます。

この次元を表す多項式を I の Hilbert 多項式と呼び $H(k; I)$ と書きます。さらに、 $H(k; I) = O(k^d)$ のとき、 d を I の Krull 次元と呼びます。(Krull 次元 d は $V(I)$ の直感的次元と一致します。例えば $V(I)$ が manifold であれば d は manifold としての次元に一致します。)

話を微分作用素環に移しましょう。微分作用素環 $D_n = K\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とは、次の計算規則を持つ環です。

$$\partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij}$$

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$$

もちろん、こんな風に定義してやって、結合法則とか分配法則とか成り立たせると、そのうち矛盾してくるかもしれないと不安になってきますが、それは大丈夫であることが、証明されています。本当に微分作用素環をきちんと定義するときには、多項式環を K ベクトル空間と見てやって、多項式環から多項式環への K 準同形が生成する代数で、多項式のかけ算と derivation で生成される部分代数として定義している訳ですね。これは問題を解くときに、非常に有用な考え方ですが³、今は一応こうゆうことにして、矛盾は生じないと信じてもらうことにします。

今、multi-index で $x^\alpha \partial^\beta = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}$ と書かれた単項式の間

$$x^\alpha \partial^\beta > x^{\alpha'} \partial^{\beta'}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| + |\beta| > |\alpha'| + |\beta'|$$

or $(|\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'|$ かつ $(\alpha, \beta) - (\alpha', \beta')$ の最初の 0 でない成分が正)

で定めることにします。この順序を Graded lexicographic order と呼びます。微分作用素 $\ell = c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta + (< \text{についての低次項})$ に対して多項式環 $K[x, \xi]$ の元

$$\text{in}_<(\ell) = c_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta \in K[x, \xi]$$

を $<$ についての ℓ の initial と呼びます。微分作用素環 D_n の左イデアル I に対して、その (順序 $<$ についての) イニシャルイデアルを

$$\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(\ell) | \ell \in I \rangle \subset K[x, \xi]$$

で定めます。 $\text{in}_<(I)$ はモノミアルイデアルです。左イデアル I の Hilbert 多項式を

$$H(k; I) = H(k; \text{in}_<(I))$$

³問 1.2 を参照

で定義しましょう。前半で、モノミアルイデアルに対する Hilbert 多項式を定義した訳ですが、これで、一般の左イデアルに対する Hilbert 多項式を定義します。こんなもの計算できるのと疑問に思う訳ですが、グレブナ基底を使うと Hilbert 多項式は計算できて、現在ではいろんな computer algebra のソフトウェアで hilbert などとか... と入れると、すぐに計算してくれます(十分小さな問題なら)。

例 3. 一個くらい例をやっておきたいので、 $I = \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とすると、このイニシャルは、 $\text{in}_<(I) = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ となります。これはグレブナ基底を使うことで示せます(この場合は使わなくても出来る)。 $K[x, \xi]/\text{in}_<(I) \cong K[x]$ なので、hilbert 多項式は $H(k; I) = \binom{k+n}{n} = O(k^n)$ と n 次式で書ける。

新たに $F_k = \{ \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \}$ をとってくると、次の定理が成り立ちます。

定理 4. k が十分大で

$$\dim_K F_k / (F_k \cap I) = H(k; I) = H(k; \text{in}_<(I))$$

この定理の証明は、グレブナ基底の理論を勉強すれば出来ませんが、これをやりだすと話が他所へそれてしまうので、今日はやりません([2]の1.6節, 6.6節参照)。一言で、グレブナ基底は何をやっているのかというと、イデアル I についての情報を得たいときには、 $\text{in}_<(I)$ についての情報をとってきてやれば大体分かるよというのが、一言で言うとグレブナ基底の理論ですから、こういうふうにやる事が出来る訳です。

表題にあったホロノミック系について、説明したいのですが、そのためには、もう一つ定理が必要になります。

定理 5 (Bernstein 不等式). D_n とは異なる D_n の左イデアル I に対して、 $H(k; I) = O(k^m)$ ならば $m \geq n$ となる。

こういう非常に不思議な定理が成り立ちます。多項式環のイデアルであれば、その Krull 次元は任意の非負整数をとれる訳ですね。1でも2でも3でも4でもね。だけど、微分作用素環の左イデアルに対する Krull 次元相当のものは必ず n 以上になる、それ以上は小さくならないという非常に強い結果が成り立ちます。

さっきの、例 3 を見てもらうと、このイデアルの Krull 次元は n で lower bound を達成します。少し考えてもらえば分かるんですが、このイデアルにどんな微分作用素を足しても、イデアルは全体 D_n になってしまい、Krull 次

元を $n - 1$ とか $n - 2$ とかにはできません。絶対できないということを保証しているのが、Bernstein の不等式です。

この定理の証明も時間の関係で省略します。たとえばグレブナ道場 [2] の 6.8 節に証明が書いてあるので、気になる人は読んでみてください。

$m = n$ となる I を holonomic ideal と呼びます。また、商加群 $M = D_n/I$ は holonomic D_n -module と呼ばれる物の一つの例になっています。ホロノミックは定義が難しいですが、難しい分いろいろよい性質を満たしているという仕組みになっています。

これで前半一コマ目の 45 分が終わりましたが、いつも講義しているときはここで 5 分間休憩して私はのんびりするんですが、今日のはのんびりせずに何か質問があれば質問してください。何かないですか？

聴講者 B: あの、 I を与えたときに holonomic かどうかというのは...

グレブナ基底を計算して initial 出しますね。initial 出したら、今度は Hilbert 関数を計算しますね。その計算できます。

聴講者 B: 例えば、イデアルの generator を与えたときに、holonomic かどうかを判定してくれるソフトウェアなんかはあるんですか？

あります、あります。Macaulay2 には `is.holonomic` という関数があります。それか Risa/asir にも `ns_twistedlog.holonomic`⁴ という関数があります。

聴講者 B: initial ideal の生成系というのは、イデアルの generator の initial だけでは不足していますよね。そういうのを自動的に増やして計算してくれる訳ですか？

そうですね。どこまで計算すれば十分であるかというのを、判定するのがグレブナ基底の理論です。

Holonomic の必要十分条件というのは、いっぱいあって、そのどれかをチェックすれば良い訳ですが、一般に超幾何系が与えられたとき、その holonomic 性の判定は難しいものも多いです。

他に何かないですか？

聴講者 C: グレブナ基底じゃなくて、抱合基底の一般的な判定法はありますか？

⁴`import("ns_twistedlog.rr");` でパッケージを読み込むと使える。

involutive base の一般的な判定法もグレブナ基底かな。

聴講者 C: ブラケットで閉じていることを...

ブラケットで閉じているような系を作るときもグレブナ基底を用います。例えば、今のような順序でグレブナ基底を作ってやると、必ず bracket で閉じます。

今日証明したい代数編の main theorem はこれです。この定理はホロノミック系の理論の黎明期に得られた基本定理です。この定理に出てくる積分加群の構成をグレブナー基底で遂行するアルゴリズムを与えたのが大阿久氏でご本人の解説本 [4] にとてもわかりやすい解説が書いてあります。グレブナー道場 [2] 6 章には明日解説する HGM への応用とともにこの定理が解説してあります。ここでは Björk の本 [3] に掲載の証明法を紹介します。

定理 6. D_n/I が holonomic D_n -module ならば、積分加群 $D_n/(I + \partial_n D_n)$ は holonomic D_{n-1} -module

$M = D_n/I, M_k = F_k/(F_k \cap I)$ と置く。 I の積分 module は $M/\partial_n M$ と同型になる。以下、 $\partial = \partial_n, x = x_n$ とおく。

$\partial: M \rightarrow M$ が単射のときは、 $\partial M_{k-1} \subset M_k$ なので、

$$\begin{aligned} \dim_k M_k/(\partial M \cap M_k) &\leq \binom{m}{n!} k^n + O(k^{n-1}) - \binom{m}{n!} (k-1)^n + O(k^{n-1}) \\ &= O(k^{k-1}) \end{aligned}$$

K ベクトル空間としての同型 $F_k/(F_k \cap (I + \partial D)) \cong M_k/(\partial M \cap M_k)$ が成り立つので OK.

$\partial: M \rightarrow M$ が単射でないとき。

$$N = \{m \in M \mid \exists k \quad \partial^k m = 0 \text{ in } M\}$$

このとき、

(ア) N は左 D_n -module

(イ) $N \subset \partial M$

が成り立つとすると、 $\bar{M} = M/N$ は左 D_n -module で $\partial: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ は単射となる。左 D_n -module としての同型 $M/\partial M \cong \bar{M}/\partial \bar{M}$ が成り立つので、単射の場合に帰着する。

(ア) の証明. 定義より N は左 $D_n \langle \partial_n \rangle$ -module $m \in N$ に対して $x_n m \in N$ を示せばよいが、これは $\partial^k m = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\partial^{k+1}(x_n m) &= x_n \partial^{k+1} m + (k+1) \partial^k m \\ &= 0\end{aligned}$$

より成り立つ。

(イ) の証明. $m \in N$ が $\partial^k m = 0$ を満たすとする、

$$\partial^k x^k = x^k \partial^k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} (k(k-1) \cdots (k-i+1))^2 x^{k-i} \partial^{k-i}$$

および

$$x^i \partial^i = (\partial x - 1)(\partial x - 2) \cdots (\partial x - i)$$

より、

$$\begin{aligned}\partial^k x^k m &= x^k \partial^k m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} (k(k-1) \cdots (k-i+1))^2 x^{k-i} \partial^{k-i} m \\ &= \partial(\dots) m + k! \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k-i} k!}{i!(k-i)!} m\end{aligned}$$

したがって、 $m = \partial(\dots) m \in \partial M$

最後に、 $D_n / (I + \partial_n D_n)$ は左 D_{n-1} module として有限生成であることを示す。代表元から ∂_n^k は全部消せる。したがって、

$$\exists m_0 \forall m > m_0 x_n^m \equiv \sum_{i=0}^{m_0} \ell_i x_n^i, \quad \ell_i \in D_{n-1}$$

を示せばよい。

このとき、生成元は $1, x_n, x_n^2, \dots, x_n^{m_0}$ となる。 $V_k = \{\sum_{\alpha_n - \beta_n \leq k} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta\}$ とおく。これは kashiwara-malgrange filtration と呼ばれていて、 M が holonomic のとき

$$\exists b(s) \in K[s] \exists \ell \in V_{-1} \text{ s.t. } b(\partial_n x_n) + \ell \in I$$

が成り立つことが知られています (簡単な可換環論を用いた証明は [6, Theorem 5.1.2, 5.1.3])。このような $b(s)$ で次数が最小のものを b 関数と呼ぶ。

$$\begin{aligned}x_n^m (b(\partial_n x_n) + \ell) &= b(\partial_n x_n - m) x_n^m + x_n^m \ell \\ &= \partial_n(\dots) x_n^m + b(-m) x_n^m + x_n^m \ell\end{aligned}$$

となるので、 $b(-s) = 0$ の最大非負整数根 m_0 より大きい m に対しては $\text{mod } I + \partial_n D_n$ で x_n^m は x_n について m 次未満のもので書ける。

2 HGM, χ^2 分布を例として

二回目は、東京編で、一回目とは独立した話です (交わりはあるのですが)。今日は、holonomic gradient method を χ^2 分布を例として説明したいと思います。

聴講者 B: (黒板に書かれた HGM という文字を見て) hypergeometric module なんて言うんじゃないのですか？

じゃないです。holonomic gradient method.

2.1 不完全 Γ 関数が統計学に出てくる理由

最初の 4 5 分間は不完全 Γ 関数が統計学に出てくる理由を説明しましょう。実数上の関数 $T_n(x)$ を

$$T_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} / N_T(n) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

で定義します。ここで、 $N_T(n)$ は、上の関数を積分したときに 1 になるための正規化定数で

$$N_T(n) = \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

を与えます。こんな風に定義してやると、関数 $T_n(x)$ は非負で等式 $\int_{-\infty}^{\infty} T_n(x) dx = 1$ が成り立つので、 $T_n(x)$ は確率密度関数になります。関数 $T_n(x)$ を確率密度関数とする分布には、名前が付いていて χ^2 分布と呼ばれています。超幾何関数を勉強した人にとっては、これはガンマ関数に関係することが直に分かる訳ですね。

分布として χ^2 分布より、もっと有名で基本的なものには、密度関数が

$$e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} / N, \quad N = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

で定義される平均 m 、分散 σ^2 の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ があります。正規分布というのは、確率統計において、一番基本的な分布ですが、 χ^2 分布は、正規分布に従う独立な確率変数の 2 乗和に従う確率分布として現れます。

命題 7. X_1, \dots, X_n を $N(0, 1)$ に従う独立な確率変数とすると、

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 = (X_1, \dots, X_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}$$

は自由度 n の χ^2 分布に従う。

証明に入る前に、確率変数 (random variable) とは何かについて説明すると、ちゃんとした定義では、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) から $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ への可測写像のことを確率変数と呼ぶのですが、直感的には乱数だと思ってください。例えば、確率変数を 1 個持ってきて、乱数を生成してヒストグラムを描いたら、密度関数のグラフと大体同じ形になるというのが「従う」の直感的な意味です。ちゃんとした定義は証明の中で述べます。

Proof. 証明は n に関する帰納法です ([8] の命題 7.5 (p.171) の証明)。まず、 $n = 1$ のときを考えましょう。確率変数 $Y = X^2$ が定数 $c \leq 0$ より小さくなる確率は

$$P(Y < c) = P(-\sqrt{c} < X < \sqrt{c})$$

と書けますが、確率変数 X が $N(0, 1)$ に従うことの定義は

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (a \leq b)$$

だったので、変数変換 $y = x^2$ を用いると

$$\begin{aligned} P(Y < c) &= \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} dy = \int_0^c T_1(y) dy \end{aligned}$$

となって、 Y が自由度 1 の χ^2 分布に従うことが言えました。

次に、 n まで定理が成り立っているとしましょう。次の定理を使います。

定理 8. 確率変数 X, Y が独立で、 X と Y の分布の密度関数がそれぞれ $f(x), g(y)$ で与えられたとする。このとき $X+Y$ の分布の密度関数は $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$ で与えられる。

この定理は、分布の定義に戻って計算すれば、簡単に得られます。そうすると計算すべきことは $T_n * T_1$ で、これが T_{n+1} なること言えば良い訳です。この計算は簡単なベータ関数の計算になります。実際にやってみると、

$$(T_n * T_1)(x) = \frac{1}{N_T(n)N_T(1)} e^{-\frac{x}{2}} \int_0^x (x-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

となり (T_n と T_1 の台に注意せよ)、変数変換 $t = xs$ を用いると右辺の積分は

$$x^{\frac{n-1}{2}} \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{2}-1} s^{-\frac{1}{2}} dt = x^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

となるので証明が完了する訳です。 □

これを多変量の正規分布でやる、すなわち確率変数の値域が \mathbf{R}^d の場合に、これと同じような構成をやると所謂 matrix hypergeometric ${}_1F_1$ という、zonal 多項式がモノミアルの代りになる超幾何関数が自然に出てきます。

次に、早わかり検定論です。みなさんはまだ健康診断で赤信号が出るような年じゃないですが、例えば、「尿酸値の値が高くてね」という時にお肉を食べると尿酸値の値が高くなるという結果があるんですが、そういうのは統計的な検定論の結果なんです。

例えば、「コインを3回投げたら3回表が出た」という状況を考えます。このときに帰無仮説(否定したい仮説) “このコインは公平である。すなわち、表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ ” を検定するという問題を考えます。このとき、統計的な仮説検定では、三回表がでるのと同じくらいかそれ以上珍しいことの起こることの確率を求めよ。こういうことをします。“これ以上珍しいこと” とというのが数学的じゃないので、問題や実験に応じて、いろいろ決めると私は理解しているのですが、そんなんでいいんですか聴講者 A 君。

聴講者 A そうですね。どういう量を基準に検定するかは、検定統計量といい、その場その場に応じて経験的に決まっています。

この場合、コインが出るパターンを書いてみると (1 が表, 0 が裏)

0 0 0
 0 0 1
 0 1 0
 0 1 1
 1 0 0
 1 0 1
 1 1 0
 1 1 1

の8通りあります。帰無仮説が正しいとすると、

$$P(\{\text{表が2回、裏が1回出る}\}) = P(\{\text{表が1回、裏が2回出る}\}) = \frac{3}{8}$$
$$P(\{\text{表が3回、裏が0回出る}\}) = P(\{\text{表が0回、裏が3回出る}\}) = \frac{1}{8}$$

と成ります。この場合は、「表が3回出る」ことと「裏が3回出る」ことを同じくらい珍しいと思いたいです(異論があるかも知れませんが)。これらが起こる確率のことを統計ではP値と読んでいます。すると、この値は $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$ と成ります。統計では伝統的にP値が5%または1%以下のときに、帰無仮説を捨てます。この場合にはP値が25%なので、帰無仮説は否定できないとなります。否定できないからといって、肯定できる訳ではなくて、もっと実験が必要と成ります。つまり、こんな結果が出たからといって、まだ不公平だと結論は出来ませんよということです。これが統計的検定の一番簡単な例です。

ちょっと人工的な例題をやります。

人工的例題: ソフトウェアAには正規分布 $N(0, 0.25)$ に従う乱数を生成する関数 $\text{rk}()$ があると宣伝している。命題7を用いて、上の宣伝を検定せよ。

命題7によれば、 $\sum_{k=1}^n \text{rk}()^2 / (0.25)^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従うので以下の手順で検定する。

1. n 回 $\text{rd}()$ を呼び出して値の2乗和 y を求める。
2. $\frac{y}{(0.25)^2} = \bar{y}$ とおく。
3. \bar{y} がどれくらい珍しいか? $\int_{\bar{y}}^{\infty} T_n(x)$ を計算して判断。5%以下なら帰無仮説を棄却。

例 9. 一様分布(平均0、分散 $(0.25)^2$)を $\text{rd}()$ とする。 $n = 50$ まで大きく取ると、P値が5%以下になって帰無仮説が棄却される場合もある。ただし試行を繰り返すとP値が5%以下にならない場合もある。 n をもっと大きくすると(たとえば $n = 500$) 確実に棄却されることとなる。ここに掲載するのは統計ソフトウェアRによるP値の計算である。

Listing 1: p-value

```
> N<-50;
> a<-runif(N)-0.5;
> b<-sum(a^2)/(0.25)^2;
> p<-1-pchisq(b, df=N);
> p
```

```

[1] 0.2052216
#上をもう一度実行して
[1] 0.01388657
#上をもう一度実行して
[1] 0.02053797
#累積確率密度関数のグラフを描く。
> curve(pchisq(x, df=50), from=0, to=100);

```

なお、この例題は命題 7 のような定理をどのように検定等に使うかの精神の説明のための例題で、実際の乱数の検定ではもっとスマートな方法を用いています。たとえば D.Knuth, 準数値算法, 乱数を参照。

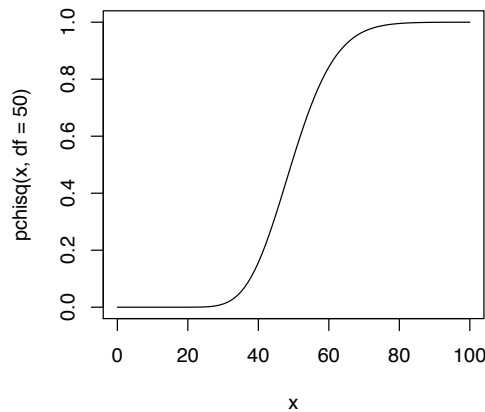


Figure 4: χ^2 分布の累積分布密度関数 pchisq , $\int_0^x T_n(t)dt$

2.2 HGM による P 値の計算

そしたら次の話題に行きましょう。関数

$$\gamma(x) = \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

の数値計算を考えます。上の人工的な例題の場合では $1 - \gamma(\bar{y})/\gamma(+\infty)$ が P-値になるのでこの数値計算は統計で重要です。

区間 $[0, x]$ の積分を扱うのは、何かと不便なので、関数 $\gamma(x)$ を Heaviside 関数を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-t)H(t)t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

の形に書きます。ここで、Heaviside 関数というのは、

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

で定義される関数です。

今からやりたいのは、この積分表示を元にして、 $\gamma(x)$ の満たす超幾何方程式を求めることです (やっと超幾何という言葉が出てきました)。昨日やった積分加群を使って考えることにします。単に微分方程式を求めるだけでなく、微分方程式を満たす理由を込みで説明しましょう。まず、超関数の基本的な関係式を復習すると

$$\begin{aligned} \partial_t H(t) &= \delta(t) \\ t\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

という公式がありました。ここで、 $\delta(t)$ は delta 関数です。これらの関係式を組み合わせると $t\partial_t H(t) = 0$ が得られます。従って、 $f(t, x) = H(x-t)H(t)t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}$ と置くと、積の微分公式から

$$\partial_t f(t, x) = H'(t)H(x-t)g(t) - H(t)H'(x-t)g(t) + H(t)H(x-t)g'(t)$$

となってくれるわけです。delta 関数の性質に注意すれば、この両辺に $(x-t)t$ を掛けると右辺の第一項と第二項は消えてしまって、

$$(x-t)t\partial_t f(t, x) = H(t)H(x-t)g'(t)$$

が得られます。 $g'(t)$ は計算すると有理式と $g(t)$ の積で書けることが分かるので、以上を整理すると、微分作用素

$$\begin{aligned} \ell_1 &:= (x-t) \left(t\partial_t - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2}t \right) \\ \ell_2 &:= (x-t)\partial_x \end{aligned}$$

が関数 $f(t, x)$ を消去することが言えた訳です。今、微分作用素環 $D = K\langle x, t, \partial_x, \partial_t \rangle$ の左イデアル $I = D\ell_1 + D\ell_2$ を考えると、 I に属する微分作用素は f を零化します (つまり $\ell \in I$ なら $\ell \bullet f = 0$ となる)。

さて今、 $(I + \partial_t D) \cap K\langle x, \partial_x \rangle \ni \ell \neq 0$ とします。すると、

$$\ell = P_1 + \partial_t P_2 (P_1 \in I, P_2 \in D) \quad (1)$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \ell \bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} P_1 f(x, t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t P_2 f(x, t) dt \\ &= [P_2 f]_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

となって、 $\ell \bullet \gamma(x) = 0$ が求める常微分方程式 (O. D. E.) であることが分かります。ここで漸く、北三陸編じゃないや (笑)、昨日の代数編と繋がってですね、以下のような議論をします。

命題 10. D/I はホロノミック

Proof. グレブナー基底の考え方を使います。 $x > t > \partial_x > \partial_t$ であるような graded lexicographic order で考えます。このとき $\text{in}_<(l_1) = 2xt\xi_t$, $\text{in}_<(l_2) = x\xi_x$ です。ここで $\xi_t = \text{in}_<(\partial_t)$, $\xi_x = \text{in}_<(\partial_x)$ とおきました。 $\langle xt\xi_t, x\xi_x \rangle$ の Hilbert 多項式の次数は 3 です (計算練習)。調べるモノミアルが足りないので、 $\partial_x l_1 - (2t\partial_t)l_2 - (t-n+2)l_2$ を計算すると、 $2t\partial_x + 2t\partial_t + t-n+2$ となり、 $\langle xt\xi_t, x\xi_x, t\xi_x \rangle$ の Hilbert 多項式の次数は 2 です (計算練習)。今 I で零化される超関数が存在するので $I = D$ とはなりません。したがって、Bernstein の不等式より D/I はホロノミックです。 \square

さて $K\langle x, \partial_x \rangle / (I + \partial_t D) \cap K\langle x, \partial_x \rangle$ は定理 6 の積分加群の部分加群となるので、ホロノミックです (詳しくは道場 [2] 6.7 節から 6.10 節を参照)。したがって $(I + \partial_t D) \cap K\langle x, \partial_x \rangle$ (これを積分イデアルと呼びます) は 0 で生成されるイデアルではありません。よって (1) のように書ける ℓ が存在することが言えます。これは $\gamma(x)$ の満たす微分方程式です。

実際、今の場合に Risa/Asir (コラム Risa/Asir とは、を参照) で積分イデアルを計算すると $J = \langle 2x\partial_x^2 + (x-n+2)\partial_x \rangle$ となります。

Listing 2: 積分イデアル

```
import("nk_restriction.rr");
L=[(x-t)*(t*dt-(n/2-1)+t/2),
(x-t)*dx];
G=nk_restriction.integration_ideal(L,[t,x],[dt,dx],[1,0]);
```

最後に holonomic gradient method (HGM) について説明しましょう。 $\gamma(x)$ や正規化定数 $N_T(n) = \gamma(+\infty)$ の数値計算は前節で説明したように応用上重

Risa/Asir とは

Risa/Asir の利点の一つは簡潔で安定した計算代数環境が無償で提供されていることおよび C 言語に似たユーザ言語が提供されており、本格的にソフト開発の勉強をしたいときには必ずマスターしておきたい C 言語の入門にもなるという点です。Risa/Asir や C 言語のプログラミングの入門や数学ソフトウェアの開発については私の講義録のページ [10] およびここからリンクされているビデオ、参考文献などを参照してください。

要です。応用に出てくる類似の問題の多くはパラメータ付の定積分の数値計算である場合が多く、この積分の数値計算を以下のような手順で行うことを我々は HGM と呼んでいます。

H. G. M.

Step 1. 積分の満たす holonomic 系 J を計算する。

Step 2. J を Pfaffian へ

Step 3. 級数展開、数値積分などを初期値として **Step 2** の Pfaffian を数値解析して、広い範囲の積分値を求める。

この三つのステップを HGM の三段算法と呼びます。Step 2 に出てくる Pfaffian は

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = P_i Q, \quad i = 1, \dots, n$$

と書ける方程式系です (道場 [2] 6.2 節参照)。 $n = 1$ の時は連立一階の常微分方程式にほかなりません。Holonomic 系は必ず Pfaffian に書換えることが可能です。Pfaffian は $\text{grad}(Q) = (P_1 Q, \dots, P_n Q)$ とも書いて、この関係式を用いて Q を計算するので我々はこの方法を holonomic gradient method と呼んでいます。

さて各ステップを $\gamma(x)$ の例で説明しましょう。Step 1 はすでに考察済みです。この例では理論的考察と計算機による計算を組み合わせましたが、問題によって理論的考察のみで導いたり、または計算機による計算のみで導いたりします。Step 2 では、 $(2x\partial_x^2 + (x - n + 2)\partial_x)\gamma(x) = 0$ なので、

$$\partial_x \begin{pmatrix} \gamma(x) \\ \partial_x \gamma(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2x}(x - n + 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(x) \\ \partial_x \gamma(x) \end{pmatrix}$$

Step 3. $\gamma(x)$ の冪級数展開を求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{k!} \left(-\frac{t}{2}\right)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1+k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{\frac{n}{2}+k}}{\frac{n}{2}+k} \\ &= \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{n}{2}+1; -\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

が得られます。差分法の初期値には、十分小さな x に対して、この冪級数で計算した近似値を用いることが出来ます。しかしながら、 n が大きくなってくると、単純に差分法を適用するだけでは、精度が得られなくなってきます。このような場合には、 $\gamma(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}} h(x)$ と置いて、 $h(x)$ に対する方程式 $\theta(\theta + \frac{n}{2}) - \frac{x}{2}(\theta + 1)$ を数値解析するなどの工夫が必要になります。大きなパラメータを持つ Pfaffian の解の漸近展開などの理論も将来的には数値解析に応用されるのではないかと思っています。

次の例は $\gamma(X)/N_T(N)$ を HGM で計算する Risa/Asir のプログラムです。

Listing 3: p-value

```
import("names.rr")$
import("taka_runge_kutta.rr")$
Glib_math_coordinate=1$
extern Aig$
/* Df : 自由度
   N : approx degree
*/
def poch(A,N) {
  R=1;
  for (I=0; I<N; I++) {
    R = R*(A+I);
  }
  return R;
}
def igs_(X,Df,N) {
  S = 1;
  for (K=1; K<=N; K++) {
    S += eval((X*1/2)^K)/poch(Df/2+1,K);
  }
}
```

```

    return S/(Df/2);
}
def igs_(X,Df,N) { return eval(igs__(X,Df,N)*exp(0)); }
def igs(X,Df,N) { return igs_(X,Df,N)*eval(X^(Df/2)*exp(-X/2)); }
/* diff(igs), 級数で gamma(X) を計算. */
def igs1__(X,Df,N) {
    S = 0;
    for (K=1; K<=N; K++) {
        S += (1/2)*K*eval((X*1/2)^(K-1))/poch(Df/2+1,K);
    }
    return S/(Df/2);
}
def igs1_(X,Df,N) { return eval(igs1__(X,Df,N)*exp(0)); }
def ig_(X,Df) { /* h(X) の計算 */
    Step=0.01;
    X0=1; N=40; /* 級数近似の次数 */
    Iv=[igs_(X0,Df,N), igs1_(X0,Df,N)];
    Eq=[[0,1],[1/(2*x),(-1/x)*(Df/2+1-x/2)]];
    /* Runge-Kutta 法で微分方程式の解を近似計算 */
    A=tk_rk.runge_kutta_4_linear(Eq,x,[],X0,Iv,X,Step);
    return A;
}
/* 自由度 Df で gamma(X) を計算. */
def ig(X,Df) {
    extern Aig;
    Aig=ig_(X,Df);
    A=[];
    for (I=0; I<length(Aig); I++) {
        V=Aig[I]; X=V[0];
        A = cons([X,V[1]*eval(exp(-X/2)*X^(Df/2))],A);
    }
    return reverse(A);
}
/* 正規化定数 N_T(Df) */
def nc(Df) { return (pari(gamma,Df/2)*eval(2^(Df/2))); }
end$

```

$\gamma(70)$ の値および $\gamma(70)/N_T(50)$ の計算は以下ようになります。

```

[1893] load("evalig3.rr");
[1980] A=ig(70,50)$
[1981] A[0];
[70,2.014480379269210636 E31]
[1982] A[0][1]/nc(50);
0.9676258902264072996

```

本日は χ^2 分布を例として HGM の手法を解説しました。もちろん χ^2 分布の場合は別の手法による計算の方が断然うまくいきます。たとえば数値計算の有名な教科書 Numerical Recipes を読んで見て下さい。しかしながら、HGM によりはじめて現実的時間内に数値計算が可能になった統計分布の例も沢山あります。それらの研究については [11] をご覧下さい。HGM の超幾何関数論から見た面白さは数値計算と統計への応用という視点を持つことにより今までにない形のある意味新鮮な数学的問題を提供可能だという点だと思います。

3 練習問題

問 3.1. [10] $F_k = \{(m_1, m_2) \in \mathbf{N}_0^2 \mid m_1 + m_2 \leq k\}$ と置く. $p, q \in \mathbf{N}_0^2$ の時, $F_k \setminus (p + \mathbf{N}_0^2) \cup (q + \mathbf{N}_0^2)$ の要素の数を k の多項式として表せ (k が十分大きいとき). n 変数の時に同様な数えあげをする?

問 3.2. [10] 微分作用素環 $\mathbf{Q}\langle x, \partial \rangle$ において次の等式を示せ.

1. $x^k \partial^k = \theta(\theta - 1) \cdots (\theta - k + 1)$, ここで $\theta = x\partial$.
2. $b(\theta)x^k = x^k b(\theta + k)$. ここで $b(\theta)$ は変数 $\theta = x\partial$ の一変数多項式.
3. $\partial^k x^k = x^k \partial^k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} (k(k-1) \cdots (k-i+1))^2 x^{k-i} \partial^{k-i}$.

問 3.3. [10] e^{xt-t^n} の満す微分方程式系の t についての積分イデアルを計算せよ.

問 3.4. [15] $\int_0^{700} T_{500}(t)dt$ の値を適当なプログラム言語で近似計算せよ.

問 3.5. [20]

1. 不完全ガンマ関数を合流型超幾何級数 ${}_1F_1(a, c; x)$ で表せ.
2. この級数の隣接関係式 (a, c についての漸化式) を用いて不完全ガンマ関数の連分数表示を一つ求めよ.

問 3.6. [45] (研究課題) 多次元正規分布に対する χ^2 分布相当のものを考察すると行列引数の超幾何関数 ${}_1F_1$ が得られる. 古典的 ${}_1F_1$ のモノミアルを zonal 多項式にすると級数展開が, 積分領域を positive definite symmetric matrix のある集合にすると積分表示が得られる. この多変数関数に現代的な超幾何関数論の種々の手法を適用して数値計算に有用な新しい公式達を導きだせ.

参考:

1. A.G.Constantine, Some Non-Central Distribution Problems in Multivariate Analysis, The Annals of Mathematical Statistics 34 (1963), 1270–1285.
2. H.Hashiguchi, Y.Numata, N.Takayama, A.Takemura, The holonomic gradient method for the distribution function of the largest root of a Wishart matrix, Journal of Multivariate Analysis, 117, (2013) 296-312.

References

- [1] D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer. 日本語訳もあり. グレブナー基底の基礎を知るにはこの本の1章を読んでから次のグレブナー道場の1章を読む, のが一つの方法.
- [2] JST CREST 日比チーム, グレブナー道場, 共立出版.
- [3] Björk, Rings of Differential Operators. この本の一章が Weyl 代数の初歩.
- [4] 大阿久, D 加群と計算数学, 朝倉書店.
- [5] T.Kimura, Hypergeometric Functions of Two Variables. ガウスの超幾何関数を含む多変数超幾何関数の入門書. ネットで検索して下さい.
- [6] M.Saito, B.Sturmfels, N.Takayama, Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, Springer.
- [7] 竹村, 統計, 第2版, 共立出版. R システムを用いた統計の入門書.
- [8] 小針, 確率・統計入門, 岩波書店. 上記の本に書いてない証明等がきちんと書いてある.
- [9] <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2013/hgs-2013>
- [10] <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2014/keisan-1/ref.html>
- [11] <http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/hgm/ref-hgm.html>

多変数超幾何関数の Pfaffian 方程式とモノドロミー 1

松本 圭司 (北海道大学)

Sep. 02,03, 超幾何学校 2013, 神戸大学理学部

0 Introduction

Gauss の超幾何級数

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} x^n, \quad (a, n) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$$

は, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ のとき $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$ 上の正則関数を定める. この正則関数は, 積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^{\infty} t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1}$$

($\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$) を持つ. ものの本に載っている積分表示は, 積分区間が $[0, 1]$ になっているものが多いが, それに変数変換 $t \mapsto 1/t$ を施すとこの表示が得られる. そしてこの正則関数は, 超幾何微分方程式

$$\left[x(1-x) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \{c - (a+b+1)x\} \left(\frac{d}{dx} \right) - ab \right] f = 0 \quad (1)$$

をみます. この微分方程式は, Pfaffian 方程式と呼ばれる 1 階連立微分方程式系 $d\mathbf{f} = \Omega\mathbf{f}$ と同値である, ここで

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F(a, b, c; x) \\ \frac{d}{dx} F(a, b, c; x) \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ab}{x(1-x)} & -\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \end{pmatrix} dx.$$

未知関数 \mathbf{f} を $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x-1}{b} \end{pmatrix}$ により $\varphi = G\mathbf{f}$ に変換すると φ のみたす Pfaffian 方程式は

$$\begin{aligned} d\varphi &= dG \cdot \mathbf{f} + G \cdot d\mathbf{f} = dG \cdot G^{-1}\varphi + G\Omega G^{-1}\varphi \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & -c \end{pmatrix} \frac{dx}{x} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c-a-b \end{pmatrix} \frac{dx}{x-1} \right] \varphi \end{aligned}$$

となる. なお, 変換行列 G や $d \log x = \frac{dx}{x}$, $d \log(x-1) = \frac{dx}{x-1}$ の係数行列の幾何学的な意味については, 超幾何学校 2014 で解説する予定である.

領域 $X = \mathbb{C} - \{0, 1\}$ の任意の点 x の小さな近傍 U_x では, (1) の 1 価正則な解全体 $Sol(U_x)$ は 2 次元の線型空間となる. 点 \dot{x} を开区間 $(0, 1)$ からとり固定. 点 \dot{x} を始点とする X 内の曲線 γ に沿って, $Sol(U_{\dot{x}})$ の任意の元 f は解析接続できる. 道 γ と γ' が X で homotopic であれば, 2 つの曲線に沿った f の解析接続は一致する. 道 ρ が \dot{x} を始点とする loop の場合, ρ に沿って解析接続した $\mathcal{M}_\rho(f)$ は一般には元の f と一致しないが, $Sol(U_{\dot{x}})$ の元になっている

$$\mathcal{M}_\rho(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{M}_\rho(f_1) + c_2 \mathcal{M}_\rho(f_2)$$

($f_1, f_2 \in Sol(U_{\dot{x}})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) をみたくので, \mathcal{M}_ρ は $Sol(U_{\dot{x}})$ の線型変換である. loop ρ のあとに loop ρ' をつないでできる loop を $\rho' \cdot \rho$ とすると

$$\mathcal{M}_{\rho' \cdot \rho}(f) = \mathcal{M}_{\rho'}(\mathcal{M}_\rho(f))$$

をみたく. つまり $\pi_1(X, \dot{x}) \ni \rho \mapsto \mathcal{M}_\rho \in GL(Sol(U_{\dot{x}}))$ は, 群としての準同型写像となる. これを超幾何微分方程式 (1) のモノドロミー表現という. 領域 X の基本群は \dot{x} を出発して 0 を正の向きに 1 回まわる loop ρ_0 と 1 を正の向きに 1 回まわる loop ρ_1 で生成される. 線型変換 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{\rho_0}$ と $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{\rho_1}$ の $Sol(U_{\dot{x}})$ 基底の取り方によらない表示を与える. $Sol(U_{\dot{x}})$ の基底を指定して \mathcal{M}_0 と \mathcal{M}_1 のその基底に関する表現行列 M_0 と M_1 も与える. 表現行列 M_0 と M_1 については古くからよく知られている. しかし, 基底の取り方によらない表現 \mathcal{M}_0 と \mathcal{M}_1 についてはあまり扱われていない. それらを超幾何微分方程式の解の積分表示に関する twisted homology group についての交点形式を用いて鏡映として表示する.

前半の講義では, twisted homology group と交点形式について解説をし, 後半の講義で超幾何微分方程式のモノドロミー表現を決定し, 2 変数幾何微分方程式系 \mathcal{F}_1 のモノドロミー表現についても解説する予定である. また, 演習では, 交点数の計算, モノドロミー表現の計算, その他の多変数超幾何微分方程式系のモノドロミー表現についても言及する.

1 ねじれ Stokes 定理

超幾何関数 $F(a, b, c; x)$ の積分表示で現れる $\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0, 1, x\}$ 上の多価正則 1 次形式 $u(t)\varphi(t)$

$$u(t) = t^{b-c}(t-x)^{-b}(t-1)^{c-a} = (t-x_0)^{\alpha_0}(t-x_1)^{\alpha_1}(t-x_2)^{\alpha_2},$$

$$\varphi(t) = \frac{dt}{t-1}, \quad \begin{cases} x_0 = 0, & x_1 = x, & x_2 = 1, & x_3 = \infty, \\ \alpha_0 = b-c, & \alpha_1 = -b, & \alpha_2 = c-a, & \alpha_3 = a, \end{cases}$$

の取り扱いの工夫から始める. ここで $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ を仮定し, x は固定し変数は t だけであるとする.

集合 \mathbb{C}_x 内の単連結な k 次チェイン Δ 上の k 次微分形式 ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_\Delta u(t)\psi$ を考える. その積分を多価関数 $u(t)$ と ψ と分離し ψ と Δ とその上の

枝 $u(t)|_{\Delta}$ を組み合わせた Δ^u との pairing $\langle \psi, \Delta^u \rangle$ とみなす. このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_D d(u(t)\psi) = \int_{\partial D} u(t)\psi$$

がどうなるか調べる. 左辺は

$$d(u(t)\psi) = du(t) \wedge \psi + u(t)d\psi = u(t)(\omega \wedge \psi + d\psi),$$

$$\omega = d \log(u(t)) = \left(\frac{b-c}{t} + \frac{-b}{t-x} + \frac{c-a}{t-1} \right) dt = \sum_{i=0}^2 \frac{\alpha_i dt}{t-x_i},$$

となるので, $\langle \nabla_{\omega}\psi, D^u \rangle$ となる, ここで $\nabla_{\omega} = d + \omega \wedge$ は, \mathbb{C}_x 上の 1 価正則 1-form ω により, ねじられた外微分作用素とする. 一方, 右辺は前記のルールに従い, $\langle \psi, (\partial D)^u \rangle$ である. そこでねじれ境界作用素 ∂_{ω} を $\partial_{\omega}(D^u) = (\partial D)^u$ として定める, ここで ∂D 上の $u(t)$ の枝は D 上の $u(t)$ の枝の ∂D への制限 $u(t)|_{\partial D}$ として指定する. Stokes 定理は, $\nabla_{\omega}, \partial_{\omega}$ を用いると以下のようになる.

Theorem 1 (ねじれ Stokes 定理)

$$\langle \nabla_{\omega}\psi, D^u \rangle = \langle \psi, \partial_{\omega}(D^u) \rangle.$$

$\nabla_{\omega}\psi = 0$ をみたく \mathbb{C}_x 上の C^{∞} 級 k 次微分形式 ψ をねじれ閉 k 次微分形式といい, k 次チェイン D_j とその上に指定された $u(t)$ の枝との組の有限和 $\gamma = \sum_{j \in J} D_j^u$ をねじれ k 次チェインといい, それら全体を $C_k^u(\mathbb{C}_x)$ で表す. $\partial_{\omega}(\gamma) = 0$ をみたくすものをねじれ k 次サイクルという.

超幾何関数の積分表示に表れる $\varphi = \frac{dt}{t-1}$ は, ねじれ閉 1 次微分形式である. 実のところ $dt \wedge dt = 0$ なので \mathbb{C}_x 上の正則 1 次微分形式はねじれ閉となる.

开区間 $(1, \infty)$ と $u(t)$ の枝の組 $(1, \infty)^u$ は, この設定ではねじれ 1 次チェインとならない. $1, \infty$ が \mathbb{C}_x に属していないので, $(1, \infty)$ が 1 次チェインの有限和として表示できないからである. 点 $x \in (0, 1)$ に対して, $\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle = \int_1^{\infty} u(t)\varphi$ をみたくすねじれ 1 次サイクル γ_0^u を構成する. 小さい正数 ε と大きな正数 R をとり, $I_{1+\varepsilon, R}$ を $1+\varepsilon$ から R へ至る線分, C_1 は 1 を中心とし $1+\varepsilon$ を始点とする半径 ε の正の向きの方, C_{∞} は 0 を中心とし R を始点とする半径 R の負の向きの方である.

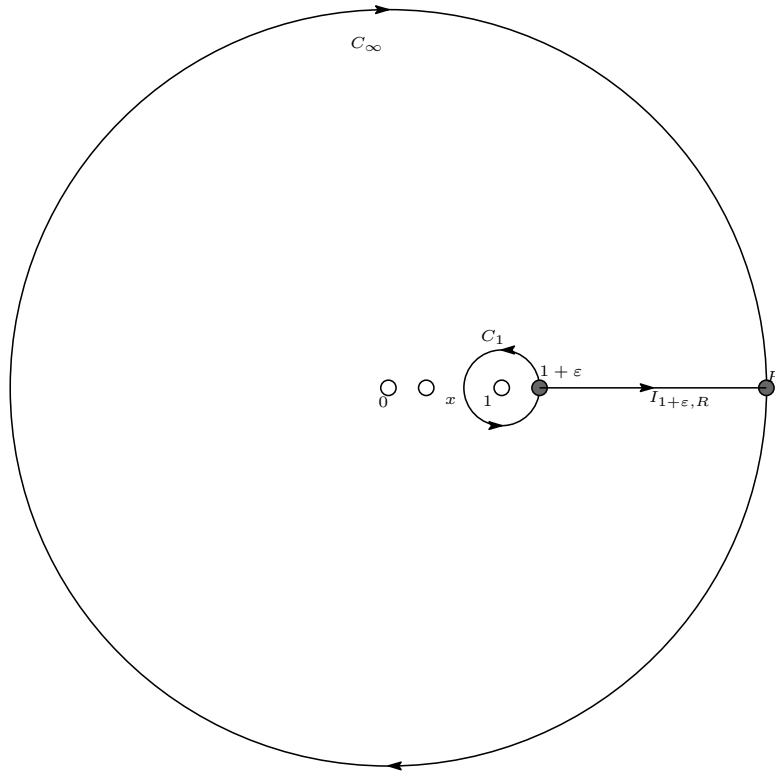
$$\gamma_0^u = I_{1+\varepsilon, R}^u - \frac{1}{1-\lambda_2} C_1^u + \frac{1}{1-\lambda_3} C_{\infty}^u, \quad \lambda_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i}$$

多価関数 $u(t)$ の枝は, 各道の始点で $t, t-1, t-x$ の偏角が 0 であるとする.

Cauchy の積分定理から $\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle$ は ε, R の大きさによらず値は一定. $\text{Re}(c) > \text{Re}(a) > 0$ の条件下で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{C_1} u(t)\varphi = \lim_{R \uparrow \infty} \int_{C_{\infty}} u(t)\varphi = 0$$

なので $\langle \varphi, \gamma_0^u \rangle = \int_1^{\infty} u(t)\varphi$ が成立.



$\partial_\omega(\gamma_0^u)$ を計算する. 定義より $\partial_\omega(I_{1+\varepsilon, R}^u) = R^{u(R)} - (1 + \varepsilon)^{u(\varepsilon+1)}$. C_1 は始点と終点は一致しているが, 終点での $t-1$ の偏角は 2π 増えているので, その分を係数としてくりだし $\partial_\omega(C_1^u) = \lambda_2(1 + \varepsilon)^{u(1+\varepsilon)} - (1 + \varepsilon)^{u(1+\varepsilon)}$ を得る. C_∞ は始点と終点は一致しているが, 終点での $t, t-x, t-1$ の偏角は 2π 減っている所以, その分を係数としてくりだし $\partial_\omega(C_\infty^u) = \lambda_3 R^{u(R)} - R^{u(R)}$. かかっている係数をかけて加えると, $\partial_\omega(\gamma_0^u) = 0$. ゆえに γ_0^u はねじれ 1 次サイクルである.

Problem 1 点 $x \in (0, 1)$ に対して, \mathbb{C}_x 空間の上半空間で $x_0 = 0, x_1 = x, x_2 = 1, x_3 = \infty$ を結ぶ道 γ_{ij} ($0 \leq i < j \leq 3$) からねじれ 1 次サイクルを γ_{ij}^u を構成せよ.

2 ねじれホモロジー群と交点形式

ねじれサイクル γ_0^u は正数 ε, R が異なっても, $\langle \varphi_0, \gamma_0^u \rangle$ の値は変化しなかった. そのような違いは同じものとみなす同値関係を定義して, 超幾何微分方程式の局所解空間と線型同型なるものを設定する.

ねじれ閉微分 1 形式 $\varphi_0 = \frac{dt}{t-1}$ と $D^u \in \mathcal{C}_2^k(\mathbb{C}_x)$ に対する $\partial_\omega(D^u)$ との pairing $\langle \varphi_0, \partial_\omega(D^u) \rangle$ は, Theorem 1 より

$$\langle \varphi_0, \partial_\omega(D^u) \rangle = \langle \nabla_\omega \varphi_0, D^u \rangle = 0$$

となる. ねじれ 1 次サイクルたちの空間を $\mathcal{C}_2^u(\mathbb{C}_x)$ の ∂_ω の像で割った空間として, ω に対するねじれ 1 次ホモロジー群 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ を定める:

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) = \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1^u(\mathbb{C}_x) \rightarrow \mathcal{C}_0^u(\mathbb{C}_x)) / \partial_\omega(\mathcal{C}_2^u(\mathbb{C}_x)).$$

Theorem 2 (喜多-野海)

$$\dim_{\mathbb{C}} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) = 2.$$

$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ は固定された x について設定されたものなので、これではまだ超幾何微分方程式 (1) の局所解空間 $Sol(U_x)$ と同一視できない。 $u(t, x)$ を

$$\tilde{X} = \{(t, x) \in \mathbb{P}^1 \times X \mid t(t-x)(t-1) \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

上の多価関数とみなし、 \mathbb{C}_x のこの空間への埋め込み $\iota_x : \mathbb{C}_x \hookrightarrow pr^{-1}(x)$ を指定しておく、ここで $pr : \tilde{X}(t, x) \mapsto x \in X$. 局所系

$$\mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

に対して定まる

$$\mathcal{H}_1(\partial_\omega, U_x) = \bigcup_{x \in U_x} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

が $Sol(U_x)$ と線型同型になる。制限写像の帰納的極限を $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と同一視して $Sol(U_x)$ の x での germ $Sol(x)$ とみなす。具体的な対応は φ_0 との pairing で、 x の周りの微小な動きを込めてあると考える。

$u(t)$ の代わりに $1/u(t)$ を考えて、1次ねじれホモロジー群と局所系

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega}), \quad \mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$$

が定義される。ここで $d \log(1/u(t)) = -\omega$ であることに注意する。 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$ には交点形式 \mathcal{I}_h が定義される。1-chains Δ_+ と Δ_- が有限個の点 p_i で transversely に交わっているとす。

$$(\Delta_+^u \cdot \Delta_-^{u^{-1}}) = \sum_i (\Delta_+ \cdot \Delta_-)_{p_i} u(p_i) u^{-1}(p_i)$$

で定まるものを線型に拡張して、交点形式 \mathcal{I}_h を定める。ここで $(\Delta_+ \cdot \Delta_-)_{p_i}$ は p_i における γ_+ と γ_- の位相的な交点数。定義より、下記が成立する。

$$\mathcal{I}_h(\gamma_-^u, \gamma_+^{u^{-1}}) = -\mathcal{I}_h(\gamma_+^u, \gamma_-^{u^{-1}})^\vee,$$

\vee はパラメーターの符号変換作用素; $\alpha_i^\vee = -\alpha_i$, $\lambda_i^\vee = 1/\lambda_i$, $u^\vee = u^{-1}$.

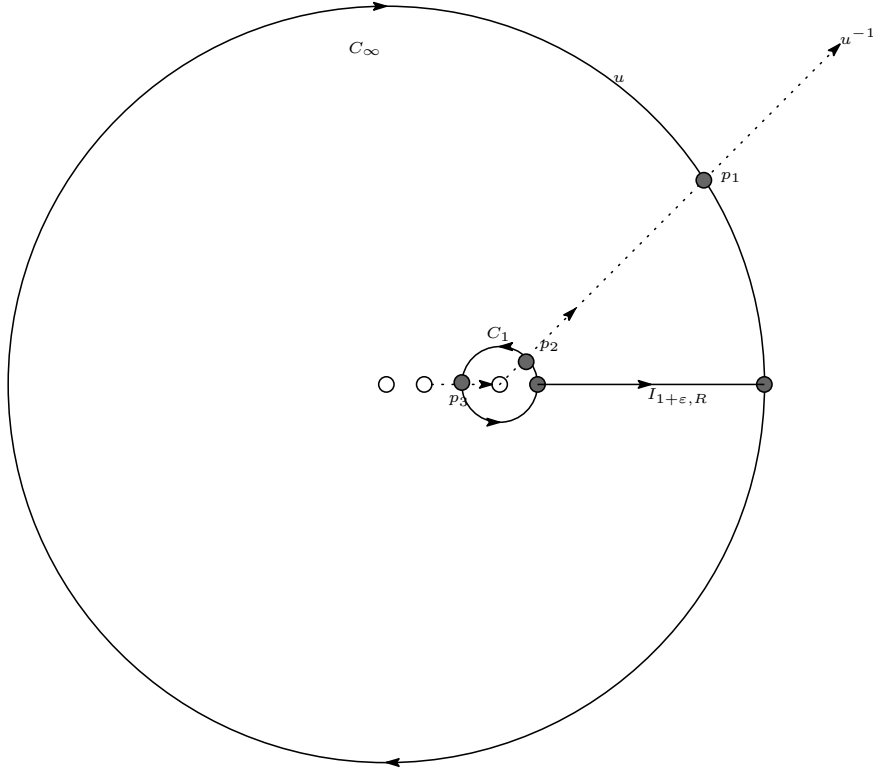
Theorem 3 $0 \leq i < j \leq 3$, $0 \leq p < q \leq 3$ に対して、

$$\mathcal{I}_h(\gamma_{ij}^u, (\gamma_{pq}^u)^\vee) = \begin{cases} \frac{1-\lambda_i\lambda_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)} & \text{if } (i, j) = (p, q), \\ \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} & \text{if } i = p, j > q, \\ \frac{-\lambda_j}{1-\lambda_j} & \text{if } j = p, \\ \frac{1}{1-\lambda_j} & \text{if } i < p, j = q, \\ 1 & \text{if } i < p < j < q, \\ 0 & \text{if } i < p < q < j, i < j < p < q. \end{cases}$$

特に $\gamma_0^u = \gamma_{23}^u$, $\gamma_1^u = \gamma_{12}^u$ と $(\gamma_0^u)^\vee = (\gamma_{23}^u)^\vee$, $(\gamma_1^u)^\vee = (\gamma_{12}^u)^\vee$ に関する交点行列は

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} & \frac{-1}{1-\lambda_2} \\ \frac{-\lambda_2}{1-\lambda_2} & \frac{1-\lambda_1\lambda_2}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \end{pmatrix}.$$

Proof.



γ_0^u と $(\gamma_0^u)^\vee$ の交点数を計算する. p_1 での位相的な交点数は 1, u は偏角が増えて $u(p_1)u^{-1}(p_1) = \lambda_3$ となり, ここでの寄与は C_∞ の係数 $\frac{1}{1-\lambda_3}$ と λ_3 との積 $\frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}$ である. p_2 での位相的な交点数は -1 , u と u^{-1} との枝のずれはなく $u(p_2)u^{-1}(p_2) = 1$ で, ここでの寄与は C_1 の係数 $\frac{-1}{1-\lambda_2}$ と (-1) との積 $\frac{1}{1-\lambda_2}$ となる. これらの和が $\mathcal{I}_h(\gamma_0^u, \gamma_0^{u^{-1}})$ で, その値は $\frac{1-\lambda_2\lambda_3}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}$ となる.

次に γ_0^u と $(\gamma_1^u)^\vee$ の交点数を計算する. 位相的な交点は p_3 のみで 1 である. u は上半空間で解析接続しているので p_3 では u と u^{-1} の枝のずれはなく $u(p_3)u^{-1}(p_3) = 1$. C_1 の係数が交点数であり $\frac{-1}{1-\lambda_2}$. 次の演習問題を各自で計算することで定理が証明される. \square

Problem 2 定理にある残りの交点数をすべて計算せよ.

Remark 1 パラメーターに関する条件 $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) 下で

$$\det(H) = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \neq 0.$$

交点形式は非退化である.

3 モノドロミー表現

基点 x を開区間 $(0, 1)$ ($\subset X = \mathbb{C} - \{0, 1\}$) から選び固定し, $\pi_1(X, x)$ の元を代表する loop ρ をとる. 超幾何微分方程式 (1) の局所解空間 $Sol(U_x)$ を表現空間とするモノドロミー表現による ρ の像を \mathcal{M}_ρ とし, 基底 (γ_0^u, γ_1^u) についての M_ρ の表現行列を M_ρ , i.e., $(\mathcal{M}_\rho(\gamma_0^u), \mathcal{M}_\rho(\gamma_1^u)) = (\gamma_0^u, \gamma_1^u)M_\rho$, とする. \mathcal{M}_ρ, M_ρ に対して, パラメーター a, b, c の符号を変えたものを $\mathcal{M}_\rho^\vee, M_\rho^\vee$ とし, 基底 $(\gamma_0^u, \gamma_1^u), (\gamma_0^u, \gamma_1^u)^\vee$ に対する交点行列を $H = (\mathcal{I}_h(\gamma_i^u, (\gamma_j^u)^\vee))_{i,j}$ とする.

Theorem 4 以下が成り立つ.

- (1) $\mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma_+^u), \mathcal{M}_\rho^\vee(\gamma_-^{u^{-1}})) = \mathcal{I}_h(\gamma_+^u, \gamma_-^{u^{-1}}), \quad \forall \gamma_\pm^{u^{\pm 1}} \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{\pm\omega})$.
- (2) ${}^t M_\rho H M_\rho^\vee = H$.
- (3) \mathcal{M}_ρ の固有値 β は, その固有ベクトル γ^u が $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) \neq 0$ ならば $\beta \cdot \beta^\vee = 1$ をみたす.
- (4) \mathcal{M}_ρ の固有値 β_1, β_2 の固有ベクトルを γ_1^u, γ_2^u とする.

$$\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1 \Rightarrow \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) = 0.$$

Proof. (1) x の近傍 U_x では, ねじれサイクル γ_+^u, γ_-^u は自然に接続されていて, その交点数は変化しない. 交点数は局所定数なので, それをどこまでも接続してもその値は変化しない.

(2) γ^u を (γ_0^u, γ_1^u) の 1 次結合 $(\gamma_0^u, \gamma_1^u) \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$ ($g_0, g_1 \in \mathbb{C}$) で表示すると,

$$\mathcal{M}_\rho(\gamma^u) = (\gamma_0^u, \gamma_1^u)M_\rho \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) = (g_0, g_1)H \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma^u), (\mathcal{M}_\rho(\gamma^u))^\vee) = (g_0, g_1) {}^t M_\rho H M_\rho^\vee \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}.$$

(1) より

$$(g_0, g_1) {}^t M_\rho H M_\rho^\vee \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix} = (g_0, g_1)H \begin{pmatrix} g_0^\vee \\ g_1^\vee \end{pmatrix}$$

で, g_0, g_1 は任意なので ${}^t M_\rho H M_\rho^\vee = H$.

(3) $\mathcal{M}_\rho(\gamma^u) = \beta\gamma^u$ であり, (1) より

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) &= \mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma^u), \mathcal{M}_\rho^\vee((\gamma^u)^\vee)) = \mathcal{I}_h(\beta\gamma^u, \beta^\vee(\gamma^u)^\vee) \\ &= (\beta \cdot \beta^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee). \end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma^u)^\vee) \neq 0 \Rightarrow \beta \cdot \beta^\vee = 1$.

(4) (1) より

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) &= \mathcal{I}_h(\mathcal{M}_\rho(\gamma_1^u), \mathcal{M}_\rho^\vee((\gamma_2^u)^\vee)) = \mathcal{I}_h(\beta_1 \gamma_1^u, \beta_2^\vee (\gamma_2^u)^\vee) \\ &= (\beta_1 \cdot \beta_2^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee).\end{aligned}$$

ゆえに $\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1 \Rightarrow \mathcal{I}_h(\gamma_1^u, (\gamma_2^u)^\vee) = 0$. □

Remark 2 Theorem 4 (4) において, $\mathcal{I}_h(\gamma_2^u, (\gamma_2^u)^\vee) \neq 0$ ならば $\beta_2^\vee = 1/\beta_2$ であり, 仮定 $\beta_1 \cdot \beta_2^\vee \neq 1$ は $\beta_1 \neq \beta_2$ と同値である.

Lemma 1 \mathcal{M}_0 の固有値は 1 と $\lambda_0 \lambda_1 = e^{-2\pi\sqrt{-1}c}$. \mathcal{M}_0 の固有値 1 の固有ベクトルは γ_{23}^u , \mathcal{M}_0 の固有値 $\lambda_0 \lambda_1$ の固有ベクトルは γ_{01}^u . $\lambda_0 \lambda_1 \neq 1$ ならば $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) = 0$ で $\gamma_{01}^u, \gamma_{23}^u$ は 1 次独立である.

Proof. 積分区間 $(1, \infty)$ が ρ_0 の動きで変化しないことは明らかである. $u(t) = t^{\alpha_0}(t-x)^{\alpha_1}(t-1)^{\alpha_2}$ の値が $x = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$ ($\theta \in [0, 1]$) の変化でどうなるかを追跡する. 変化するのは $(t-x)^{\alpha_1}$ だけである. x は絶対値の小さい複素数で動き, 積分区間 $t \in (1, \infty)$ 上では t はそれに比べて大きな正数なので $\arg(t-x)$ は 0 の近くを動くだけで ρ_0 の終点でのその値は 0. ゆえに $\mathcal{M}_1(\gamma_{23}^u) = \gamma_{23}^u$.

次に γ_{01}^u の ρ_0 に沿った接続を追跡する. 点 $t = 0$ と $t = x = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$ ($\theta \in [0, 1]$) を結ぶ道 γ_{01} を开区間 $(0, 1)$ からの写像として表示すると

$$\gamma_{01} : t = \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s \quad s \in (0, 1).$$

γ_{01} は ρ_0 に沿った接続で, γ_{01} に戻ってくる. $u(t)$ をこの写像で开区間 $(0, 1)$ に引き戻して, ρ_0 に沿った接続での枝の変化をみる.

$$\begin{aligned}\gamma_{01}^*(u(t)) &= (\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s)^{\alpha_0}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - \dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})^{\alpha_1}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - 1)^{\alpha_2} \\ &= e^{2\pi\sqrt{-1}\theta(\alpha_0+\alpha_1)}\dot{x}^{\alpha_0+\alpha_1}s^{\alpha_0}(s-1)^{\alpha_1}(\dot{x}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}s - 1)^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

ρ_0 で接続すると θ が 0 から 1 に変わるので $u(t)$ の枝は $\lambda_0 \lambda_1$ が掛けられたものとなり, $\mathcal{M}_1(\gamma_{01}^u) = \lambda_0 \lambda_1 \gamma_{01}^u$.

$\lambda_0 \lambda_1 \neq 1$ ならば Theorem 4 より, $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) = 0$. Theorem 3 より, $\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{01}^u)^\vee) \cdot \mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) \neq 0$ なので, これらは 1 次独立. □

Lemma 2 \mathcal{M}_1 の固有値は 1 と $\lambda_1 \lambda_2 = e^{2\pi\sqrt{-1}(c-a-b)}$. \mathcal{M}_1 の固有値 1 の固有ベクトルは γ_{03}^u , \mathcal{M}_1 の固有値 $\lambda_1 \lambda_2$ の固有ベクトルは γ_{12}^u . $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ ならば $\mathcal{I}_h(\gamma_{03}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) = 0$ で $\gamma_{03}^u, \gamma_{12}^u$ は 1 次独立.

Problem 3 Lemma 2 を Lemma 1 と同様に証明せよ.

Theorem 5 (超幾何微分方程式のモノドロミー表現) 線型変換 $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ は交点形式を用いて, 以下のように表せる:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\gamma^u) &= \gamma^u - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{01}^u)^\vee)\gamma_{01}^u \\ &= \lambda_0\lambda_1[\gamma^u - (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{23}^u)^\vee)\gamma_{23}^u], \\ \mathcal{M}_1(\gamma^u) &= \gamma^u - (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{12}^u)^\vee)\gamma_{12}^u \\ &= \lambda_1\lambda_2[\gamma^u - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_3)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{03}^u)^\vee)\gamma_{03}^u].\end{aligned}$$

Proof. $\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ を仮定して, 上記の第一表示 \mathcal{M}_0 の固有値 $1, \lambda_0\lambda_1$ の固有ベクトルが $\gamma_{23}^u, \gamma_{01}^u$ であることを示す.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\gamma_{01}^u) &= \gamma_{01}^u - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{01}^u)^\vee)\gamma_{01}^u \\ &= \gamma_{01}^u - \frac{(1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_0\lambda_1)}{(1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)}\gamma_{01}^u = \lambda_0\lambda_1\gamma_{01}^u, \\ \mathcal{M}_0(\gamma_{23}^u) &= \gamma_{23}^u - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{01}^u)^\vee)\gamma_{01}^u = \gamma_{23}^u.\end{aligned}$$

他も同様. $\lambda_0\lambda_1 = 1$ の場合も自然に拡張されている. □

Remark 3 $\lambda_0\lambda_1 \neq 1$ のとき,

$$\mathcal{M}_0(\gamma^u) = \gamma^u - (1 - \lambda_0\lambda_1)\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{01}^u)^\vee)\mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{01}^u)^\vee)^{-1}\gamma_{01}^u$$

は法線ベクトル γ_{01} と固有値 $\lambda_0\lambda_1$ を有する \mathcal{I}_h に関する鏡映変換.

Corollary 1 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ の基底を $(\gamma_0^u, \gamma_1^u) = (\gamma_{23}^u, \gamma_{12}^u)$ でとると $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ の表現行列 M_0, M_1 は

$$\begin{aligned}M_0 &= I_2 - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_1)r_{01} \begin{matrix} t \\ r_{01}^\vee \end{matrix} {}^t H \\ &= \lambda_0\lambda_1[I_2 - (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)e_0 \begin{matrix} t \\ e_0 \end{matrix} {}^t H] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0\lambda_1\lambda_2 - 1 \\ 0 & \lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= I_2 - (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)e_1 \begin{matrix} t \\ e_1 \end{matrix} {}^t H \\ &= \lambda_1\lambda_2[I_2 - (1 - \lambda_0)(1 - \lambda_3)r_{03} \begin{matrix} t \\ r_{03}^\vee \end{matrix} {}^t H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \lambda_1 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ここで I_2 は 2 次単位行列で, $e_0 = {}^t(1, 0)$, $e_1 = {}^t(0, 1)$,

$$r_{01} = \frac{-1}{1 - \lambda_0} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_0\lambda_1\lambda_2 \\ 1 - \lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r_{03} = \frac{-\lambda_0}{1 - \lambda_0} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1\lambda_2 \\ 1 - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Proof. (γ_0^u, γ_1^u) を基底にとると, $\gamma^u = g_0\gamma_0^u + g_1\gamma_1^u \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ とが対応し, γ_i^u と単位ベクトル e_i が対応する ($i = 0, 1$). $\gamma_{01}^u \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ を γ_0^u, γ_1^u の 1 次

結合 $g_0\gamma_0^u + g_1\gamma_1^u$ で表示する. Theorem 3 より

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) = g_0\mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) + g_1\mathcal{I}_h(\gamma_{12}^u, (\gamma_{23}^u)^\vee) \\ &= H_{00} g_0 + H_{10} g_1, \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} &= \mathcal{I}_h(\gamma_{01}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) = g_0\mathcal{I}_h(\gamma_{23}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) + g_1\mathcal{I}_h(\gamma_{12}^u, (\gamma_{12}^u)^\vee) \\ &= H_{01} g_0 + H_{11} g_1. \end{aligned}$$

連立方程式 $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} \end{pmatrix} = {}^tH \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$ を解いて, γ_{01}^u に対応する列ベクトル

$$r_{01} = {}^tH^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1} \end{pmatrix} = \frac{-1}{1-\lambda_0} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_0\lambda_1\lambda_2 \\ 1 - \lambda_0\lambda_1 \end{pmatrix}$$

を得る. Theorem 5 の $\mathcal{M}_0(\gamma^u)$ に対応する列ベクトルを $M_0 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ で表示する. γ^u と γ_{01}^u に対するベクトルは $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ と上記で求めた r_{01} である.

$$\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{01}^u)^\vee) = (g_1, g_2) H r_{01}^\vee = {}^t r_{01}^\vee {}^tH \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

より, $\mathcal{M}_0(\gamma^u)$ に対応する列ベクトルは

$$[I_2 - (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)r_{01} {}^t r_{01}^\vee {}^tH] \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

他の表示も同様に得られる. ただし $e_i^\vee = e_i$ なので $^\vee$ は省略している. \square

M_0 の計算では第2式, M_1 の計算では第1式を利用すると簡単に表現行列が得られる. また, $\lambda_0\lambda_1 = 1$ や $\lambda_1\lambda_2 = 1$ でも有効.

4 2変数超幾何関数 Appell's F_1

Appell's F_1 は $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) < 1\}$ で広義一様絶対収束する級数

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^2} \frac{(a, n_1 + n_2)(b_1, n_1)(b_2, n_2)}{(c, n_1 + n_2)(1, n_1)(1, n_2)} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$$

で定義される, ここで $c \neq 0, -1, -2, \dots$. この級数には積分表示

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^\infty t^{b_1+b_2-c} (t-x_1)^{-b_1} (t-x_2)^{-b_2} (t-1)^{c-a} \frac{dt}{t-1}$$

$(\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0)$ がある. 変数 $x_0 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$ を導入し, $t = x_i$ での exponent としてパラメーター α_i ($i = 0, \dots, 4$) を以下のように導入:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_1, & x_2, & x_3 &= 1, & x_4 &= \infty; \\ \alpha_0 &= b_1 + b_2 - c, & \alpha_1 &= -b_1, & \alpha_2 &= -b_2, & \alpha_3 &= c - a, & \alpha_4 &= a. \end{aligned}$$

$F_1(a, b_1, b_2, c; x)$ は, 以下の微分作用素を施すと 0 になる:

$$\begin{aligned} &x_1(1-x_1)\partial_1^2 + x_2(1-x_1)\partial_1\partial_2 + [c - (a+b_1+1)x_1]\partial_1 - b_1x_2\partial_2 - ab_1, \\ &x_2(1-x_2)\partial_2^2 + x_1(1-x_2)\partial_1\partial_2 + [c - (a+b_2+1)x_2]\partial_2 - b_2x_1\partial_1 - ab_2, \\ &(x_1-x_2)\partial_1\partial_2 - b_2\partial_1 + b_1\partial_2. \end{aligned}$$

これらの微分作用素で生成される微分方程式系 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ を超幾何微分方程式系 Appell's F_1 という.

Fact 1 $S = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)(x_1-x_2) = 0\}$ とする. $X = \mathbb{C}^2 - S$ の任意の点 x の X 内の近傍 U_x における $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ の 1 価正則関数解全体のなす線型空間 $Sol(U_x)$ は 3 次元.

X の基点 $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ は $\dot{x}_0 = 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2 < 1 = \dot{x}_3$ をみたすとする. ρ_{ij} ($0 \leq i < j \leq 3, (i, j) \neq (0, 3)$) を X 内の \dot{x} を基点とする loop で x_j は固定し x_i が上半空間経路で \dot{x}_j に近づき, その点を正の向きに回り, 来た道を引き返すものとする. ただし, $i = 0$ のときは i, j の役目を変える.

Fact 2 $\pi_1(X, \dot{x})$ は ρ_{ij} で生成される.

5 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ に対するねじれホモロジー群

$\mathbb{C}_x = \mathbb{C} - \{0, x_1, x_2, 1\}$, $u(t) = t^{\alpha_0}(t-x_1)^{\alpha_1}(t-x_2)^{\alpha_2}(t-1)^{\alpha_3}$ とみなして, 超幾何関数のときと同様にして, ねじれホモロジー群と局所系

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega), \quad \mathcal{H}_1(\partial_\omega) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$$

が定義され, germ $Sol(x)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ が同一視される.

x_i と x_j を上半空間で結ぶ道 γ_{ij} ($0 \leq i < j \leq 4$) から 10 個のねじれサイクル γ_{ij}^u が構成できる.

$u(t)^{-1}$ に対して,

$$H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega}), \quad \mathcal{H}_1(\partial_{-\omega}) = \bigcup_{x \in X} H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$$

が定義され, $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ と $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_{-\omega})$ に交点形式 \mathcal{I}_h が定義される.

交点数に関する公式 Theorem 3 が $0 \leq i < j \leq 4, 0 \leq p < q \leq 4$ として成立する. ここで $\lambda_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_i}$ ($0 \leq i \leq 4$) とする.

6 $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ のモノドロミー表現

解析接続による群準同型写像 $\pi_1(X, \dot{x}) \ni \rho \mapsto \mathcal{M}_\rho \in GL(\text{Sol}(\dot{x}))$ を $\mathcal{F}_1(a, b_1, b_2, c)$ のモノドロミー表現という. $\mathcal{M}_{\rho_{ij}} = \mathcal{M}_{ij}$ ($0 \leq i < j \leq 3$, $(i, j) \neq (0, 3)$) を決定する. Theorem 4 は, そのまま成立する.

Lemma 3 \mathcal{M}_{ij} の固有値は $1, \lambda_i \lambda_j$ である. 固有値 1 の固有空間は 2 次元で, 固有値 $\lambda_i \lambda_j$ の固有ベクトルは γ_{ij}^u .

Proof. Lemma 1 で示したように, 固有値 $\lambda_i \lambda_j$ の固有ベクトルは γ_{ij}^u . $\{i, j, k, l, m\} = \{0, \dots, 4\}$ となる k, l, m に対して x_k と x_l を下半平面で結ぶ道と x_k と x_m を下半平面で結ぶ道から得られるねじれサイクルたちが固有値 1 の固有空間を張る. \square

Theorem 6 $0 \leq i < j \leq 3$, $(i, j) \neq (0, 3)$ に対して

$$\mathcal{M}_{ij}(\gamma^u) = \gamma^u - (1 - \lambda_i)(1 - \lambda_j)\gamma_{ij}^u \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee).$$

Proof. $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ とする. Theorem 4 から \mathcal{M}_{ij} の 1 の固有空間は

$$\{\gamma^u \in H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega) \mid \mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) = 0\}.$$

γ^u が $\mathcal{I}_h(\gamma^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) = 0$ をみたせば, 上記右辺は γ^u であり, 固有値 1 の固有ベクトルである. $\gamma^u = \gamma_{ij}^u$ のとき, Theorem 3 より上記右辺は

$$\begin{aligned} & \gamma_{ij}^u - (1 - \lambda_i)(1 - \lambda_j)\gamma_{ij}^u \mathcal{I}_h(\gamma_{ij}^u, (\gamma_{ij}^u)^\vee) \\ &= \gamma_{ij}^u - \frac{(1 - \lambda_i)(1 - \lambda_j)(1 - \lambda_i \lambda_j)}{(1 - \lambda_i)(1 - \lambda_j)} \gamma_{ij}^u = (\lambda_i \lambda_j) \cdot \gamma_{ij}^u \end{aligned}$$

であり, γ_{ij}^u は $\lambda_i \lambda_j$ の固有ベクトル. Lemma 3 より, \mathcal{M}_{ij} と一致する. \square

Problem 4 $H_1(\mathbb{C}_x, \partial_\omega)$ の基底を定めて, その基底に関する交点行列 $H = (\mathcal{I}_h(\gamma_i^u, (\gamma_i^u)^\vee))_{ij}$ を計算せよ. また, その基底に関する \mathcal{M}_{ij} の表現行列を与えよ.

Problem 5 $\rho_{14} \in \pi_1(X, \dot{x})$ を x_1 が上半空間内で $R\sqrt{-1}$ ($R \gg 0$) に向かい, そのあと原点中心, 半径 R の円を負の向きに回り, 上半空間内で \dot{x}_1 に戻るとする. $\mathcal{M}_{14} = \mathcal{M}(\rho_{14})$ の固有値を求めよ. また, 固有空間は 1 次元と 2 次元になり, 1 次元固有空間は γ_{14}^u で張られることを示せ.

Problem 6 $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ で定まる実 m 次元 simplex

$$\Delta_x = \{t = (xs_1, \dots, xs_m) \in \mathbb{C}^m \mid s_1, \dots, s_m > 0, s_1 + \dots + s_m < 1\}$$

上の関数

$$u(t, x) = (x - t_1 - \dots - t_m)^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}$$

は, x が 0 の周りを正の向きに 1 周すると, $e^{2\pi\sqrt{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m)} u(t, x)$ になることを示せ.

Problem 7 合流型超幾何微分方程式系の場合, モノドロミー表現と交点形式の関係を説明せよ.

References

- [Apk] Appell P. and Kampé de Fériet M. J., *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: polynômes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [AoK] Aomoto K. and Kita M., translated by Iohara K., *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2011.
- [CM] Cho K. and Matsumoto K., Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, *Nagoya Math. J.*, **139** (1995), 67–86.
- [G] Goto Y., The monodromy representation of Lauricella's hypergeometric function F_C , *preprint*, 2014, <http://arxiv.org/abs/1403.1654> [math.AG].
- [GM] Goto Y. and Matsumoto K., The monodromy representation and twisted period relations for Appell's hypergeometric function F_4 , to appear in *Nagoya Math. J.*
- [KN] Kita M. and Noumi M., On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions. *Japan. J. Math.*, **9** (1983), 113–157.
- [L] Lauricella G., Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **7** (1893), 111–158.
- [M1] Matsumoto K., Monodromy and Pfaffian of Lauricella's F_D in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups, *Kyushu J. Math.*, **67** (2013), 367–387.
- [M2] Matsumoto K., Pfaffian of Lauricella's hypergeometric system F_A , *preprint*, 2013.
- [MY] Matsumoto K. and Yoshida M., Monodromy of Lauricella's hypergeometric F_A -system, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **13** (2014), 551–577.
- [Y] Yoshida M., *Hypergeometric functions, my love, -Modular interpretations of configuration spaces-*, Aspects of Mathematics E32., Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

Borel 総和法を用いた常微分方程式の 漸近解析

神本晋吾 述, 加筆, 修正
小山民雄 記

2013.9.3-2013.9.4

0 Introduction

本稿は2013年に神戸大学理学研究科にて行われた超幾何学校での小山民雄氏の講義ノートを下に神本が加筆・修正を行ったものである。本稿では Gevrey 漸近解析の基礎, 及び, 常微分方程式の不確定特異点における分解定理に関して解説する。

次の線形微分方程式系を考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \phi = A(z) \phi. \quad (0.1)$$

ここで, $k \in \mathbb{Z}$ で $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$ は収束級数 $\mathbb{C}\{z\}$ を係数にもつ n 次正方行列とする。簡単のため $A(0)$ の固有方程式 $\Phi(\lambda) = \det(\lambda - A(0)) = 0$ は重根をもたないとする。このとき (0.1) を対角化することを考える。

まず, $k = 0$ の場合, つまり $z = 0$ に確定特異点と呼ばれる特異点をもつ場合を考える。このとき, $\Phi(\lambda) = 0$ の根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は $z = 0$ での特性指数と呼ばれ, (0.1) の特異点における構造を記述する上で重要な役割を果たす。特に, $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) のとき, (0.1) は収束級数係数での可逆な行列 $P(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\})$ を用いた変換 $\phi = P(z)\psi$ により次のように対角化される:

$$z \frac{d}{dz} \psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \psi. \quad (0.2)$$

この対角行列 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を Λ とすると, (0.1) の基本解系は $P(z)z^\Lambda$ により与えられる. これから, (0.1) の解の $z = 0$ における局所モノドロミーの構造が特性指数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を用いて表されることがわかる.

次に $k \geq 1$ の場合を考えてみる. このとき, 変換 $\phi = P(z)\psi$ により (0.1) を次のように対角化することを考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = \begin{pmatrix} \Lambda_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_n(z) \end{pmatrix} \psi. \quad (0.3)$$

ただし, $\Lambda_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) は $\Lambda_j(0) = \lambda_j$ を満たす多項式とする. このとき, 形式級数係数での可逆な行列 $P(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}[[z]])$ による変換により対角化は可能だが, 確定特異点の場合とは異なり, 一般に $P(z)$ は収束せず発散級数となることが知られている. $\Lambda_j(z)$ は特異点での構造を記述する上での重要な要素ではあるが, このような方程式の形式的な範疇での構造だけでは, 解析的な解の構造を記述することはできない. 本稿では, これら二つの構造を結びつける方法として Borel 総和法を用いる. Borel 総和法とは形式的逆 Laplace 変換 (Borel 変換) と Laplace 変換を組み合わせることにより, 形式級数から, その級数へと漸近展開される関数を構成する手法であるが, Borel 総和法は微分方程式との相性が良く, 特に (0.1) の形式解 $P(z) \exp\left(\int^z z^{-k-1} \Lambda(z) dz\right)$ ($\Lambda(z) = \text{diag}(\Lambda_1(z), \dots, \Lambda_n(z))$) から (0.1) の解析的な解の構造を読み取る上での有効な解析手法を与える.

1 Gevrey 漸近解析

前節では (0.1) の不確定特異点における形式級数係数の行列 $P(z)$ による対角化を考えたが, 一般に, この $P(z)$ は不確定特異点での Poincaré rank に応じた, ある増大度条件を満たすことが知られている. このような増大度条件を満たす形式級数のことを Gevrey 級数と呼ぶが, この Gevrey 級数に関する漸近解析が Gevrey 漸近解析である. 本節では主に [Ba1], 及び [Ra2] に従い Gevrey 漸近解析の基礎について解説する.

1.1 Gevrey 級数

定義 1.1 (Gevrey 級数). 形式冪級数 $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ が Gevrey order $k(> 0)$ であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $n \geq 0$ に対し

$$|f_n| \leq C^{n+1} \Gamma(1 + n/k) \quad (1.1)$$

となることをいう. Gevrey order k の級数のなす集合を $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ と書く.

定義から $k < k_1$ ならば $\mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, 特に, $k_1 \rightarrow \infty$ として, $\mathbb{C}[[z]]_{1/\infty} := \mathbb{C}\{z\}$ は任意の $k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となることがわかる. また,

$$\mathfrak{m} := z\mathbb{C}[[z]]_{1/k} = \{\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \mid f_0 = 0\}$$

とすると次が得られる:

命題 1.2. $(\mathbb{C}[[z]]_{1/k}, \mathfrak{m})$ は正則局所環で PID となる.

実際, $f_0 \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{\hat{f}(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{f_0^{j+1}} (f(z) - f_0)^j$$

が $\hat{f}(z)$ の逆元 $\hat{f}^{-1}(z)$ となり, 以下の命題 1.3 から $1/\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となるため, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は局所環となることがわかる. また, PID となることは明らかで, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ の \mathfrak{m} 進完備化は $\mathbb{C}[[z]]$ より正則性も明らか.

命題 1.3. $f(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, $\hat{g}(z) \in \mathfrak{m}$ ならば $f(\hat{g}(z)) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$.

また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し, その微分を

$$\frac{d\hat{f}}{dz}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(n+1)z^n$$

により定義する. このとき, $d\hat{f}/dz \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となり $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は \mathbb{C} 上の微分代数となる. また, $\mathbb{C}\{z\} \hookrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は局所環の射となるが, 次が成立する:

命題 1.4. $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ は $\mathbb{C}\{z\}$ 上忠実平坦.

1.2 漸近展開

複素平面 \mathbb{C} の部分集合 S で実数 d, α, ρ ($\alpha, \rho > 0$) に対し

$$S = S(d, \alpha, \rho) = \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r < \rho, |\theta - d| < \alpha/2\}$$

と表される領域を角領域と呼ぶ. また,

$$S(d, \alpha) = S(d, \alpha, \infty) = \{z = re^{i\theta} \mid |\theta - d| < \alpha/2\}$$

とする. また, $S = S(d, \alpha, \rho)$ の閉部分角領域 \bar{S}_1 とは実数 d_1, α_1, ρ_1 ($\alpha_1, \rho_1 > 0$) に対し

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_1(d_1, \alpha_1, \rho_1) = \left\{z = re^{i\theta} \mid 0 < r \leq \rho_1, |\theta - d_1| \leq \alpha_1/2\right\}$$

と表され, $\bar{S}_1 \subset S$ となる領域とする.

S をある角領域とし, $f(z)$ を S 上の正則関数, $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ とする. このとき, $f(z), \hat{f}(z)$ に対し N 次の剰余項 $\nu_f(z, N)$ を

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right)$$

とする.

定義 1.5 (漸近展開). 関数 $f(z)$ は角領域 S 上 $\hat{f}(z)$ に Gevrey order k で漸近展開可能であるとは, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し \bar{S}_1 上

$$|\nu_f(z, N)| \leq C^{N+1} \Gamma(1 + N/k) \quad (1.2)$$

が成立することである. このとき, $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$ と表す.

$A_k(S)$ を, ある $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に S 上 Gevrey order k で漸近展開可能な関数のなす集合とする. このとき, 漸近展開の定義から $f(z) \in A_k(S)$ に対し $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ が一意的に定まる. よって, 自然な射 $T_k : A_k(S) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ が存在する. このとき T_k は次のような分解をもつ:

$$\begin{array}{ccc} A_k(S) & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{C}[[z]] \end{array}$$

この射 $A_k(S) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ も同様に T_k で表す. また, $A_k^{(0)}(S) := \text{Ker } T_k$ とする. このとき次が得られる:

命題 1.6. $A_k(S)$ は環をなし, T_k は環準同型.

特に, $A_k^{(0)}(S)$ は $A_k(S)$ のイデアルとなる. また, 定義から $k_2 > k_1 > 0$ ならば $A_{k_2}(S) \subset A_{k_1}(S)$ となる.

注 1.1. $k_2 > k_1 > 0$ とする. このとき, S の形状や k_1, k_2 によるが, 一般に $A_{k_1}^{(0)}(S) = A_{k_2}^{(0)}(S)$ は成立しない. よって, $f(z) \in A_{k_1}(S)$, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_2}$ で $f(z) \cong_{k_1} \hat{f}(z)$ でも $f(z) \in A_{k_2}(S)$ とは限らない.

注 1.2. $f(z) \in A_k(S) \setminus zA_k(S)$ は可逆とは限らない. 実際, $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$, $f_0 \neq 0$ でも $f(z_0) = 0$ となる点 $z_0 \in S$ が存在すれば $1/f(z) \notin A_k(S)$.

$A_k^{(0)}(S)$ の定義から $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ は, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C > 0$ が存在し任意の $N > 0$ に対し

$$|f(z)| \leq C^{N+1} |z|^N \Gamma(1 + N/k)$$

が \bar{S}_1 上成立する. この評価から, $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ は次の条件により特徴付けられることがわかる:

命題 1.7. $f(z) \in A_k^{(0)}(S)$ となるための必要十分条件は, S の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 に対し, ある定数 $C, h > 0$ が存在し

$$|f(z)| \leq C e^{-h|z|^{-k}}$$

が \bar{S}_1 上成立する.

1.3 Borel 変換

形式冪級数 $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に対し, 形式的 Borel 変換 $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ を

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(1 + n/k)} \zeta^n$$

により定める. 特に $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ ならば $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ となる. また, $f(z)$ を $S(d, \alpha, \rho)$ ($\alpha > \pi/k$) で正則で有界とする. このとき, $f(z)$ の d 方向への Borel 変換 $\mathcal{B}_k(f)(\zeta)$ を

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) e^{(\zeta/z)^k} z^k d(z^{-k}) \quad (1.3)$$

により定義する. ただし, 積分路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(d, \alpha, \rho)$ は $\tilde{\rho} \in (0, \rho)$, $\beta \in (\pi/k, \alpha)$ に対し

$$\gamma(t) = \begin{cases} 3t\tilde{\rho} \exp(i(d + \beta/2)) & (0 \leq t \leq 1/3) \\ \tilde{\rho} \exp(i(d + 3(1 - 2t)\beta/2)) & (1/3 \leq t \leq 2/3) \\ 3(1 - t)\tilde{\rho} \exp(i(d - \beta/2)) & (2/3 \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (1.4)$$

により定義する. このとき, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)$ は $S(d, \alpha - \pi/k)$ で正則で exponential size k , つまり, 任意の $S(d, \alpha - \pi/k)$ の閉部分角領域 $\bar{S}_1(d, \beta, \infty)$ 上, ある定数 $C, h > 0$ が存在し

$$|\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)| \leq Ce^{h|\zeta|^k}$$

が成立する.

注 1.3. $s \geq 0$ に対し

$$\mathcal{B}_{k,d}(z^s)(\zeta) = \frac{\zeta^s}{\Gamma(1 + s/k)} \quad (1.5)$$

となる. よって, 形式的 Borel 変換 $\widehat{\mathcal{B}}_k$ は Borel 変換 \mathcal{B}_k を次のように形式的に $\mathbb{C}[[z]]$ に拡張したものである:

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathcal{B}_{k,d}(z^n).$$

このとき次が成立する:

定理 1.8. $k > k_1 > 0$, $f(z) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha > \pi/k$) で $f \cong_{k_1} \hat{f}$ とする.

$$k_2^{-1} = k_1^{-1} - k^{-1}$$

とすると, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \in A_{k_2}(S(d, \alpha - \pi/k))$ で

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$$

となる. また, $k = k_1$ のとき $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ となり $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$.

Proof. $g(\zeta) = \mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta)$ とする. このとき

$$\nu_g(\zeta, N) = \zeta^{-N} \left(g(\zeta) - \widehat{\mathcal{B}}_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n \right) \right)$$

とすると (1.5) から

$$\nu_g(\zeta, N) = \zeta^{-N} \mathcal{B}_{k,d}(z^N \nu_f(z, N))(\zeta).$$

ここで, $\nu_f(z, N)$ は (1.2) を満たすので, $\mathcal{B}_{k,d}$ の積分表示 (1.3) から $\nu_g(\zeta, N)$ に関する次の評価が得られる: $S(d, \alpha - \pi/k)$ の任意の閉部分角領域 \bar{S}_1 上ある定数 $\tilde{C} > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) / \Gamma(1 + N/k).$$

よって, $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$. また, $k = k_1$ のときは $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ の収束性から主張が得られる. \square

注 1.4. $f(z)$ に対し $f^{(k)}(z) = f(z^{1/k})$ とすると, $\mathcal{B}_{1,kd}$ と $\mathcal{B}_{k,d}$ との関係は

$$\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \mathcal{B}_{1,kd}(f^{(k)})(\zeta^k)$$

により与えられる. また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ に対し $\hat{f}^{(k)}(z) = \hat{f}(z^{1/k}) \in \mathbb{C}[[z^{1/k}]]$ とし, (1.5) により $\widehat{\mathcal{B}}_1$ を $\mathbb{C}[[z^{1/k}]]$ に形式的に拡張すると

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_1(\hat{f}^{(k)})(\zeta^k).$$

1.4 Laplace 変換

ある $\alpha, \rho > 0$ に対し $g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ とし, $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ とする. 更に $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ に解析接続され exponential size k とする. このとき $g(\zeta)$ の d 方向への Laplace 変換 $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z)$ を

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) = \int_0^{\infty e^{id}} g(\zeta) e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k \quad (1.6)$$

により定義する. また, $\hat{g}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \zeta^n$ の形式的 Laplace 変換 $\widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z)$ を

$$\widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Gamma(1 + n/k) z^n$$

とする.

注 1.5. $s \geq 0$ に対し

$$\mathcal{L}_{k,d}(\zeta^s)(z) = \Gamma(1 + s/k) z^s \quad (1.7)$$

となる. よって, 形式的 Laplace 変換 $\widehat{\mathcal{L}}_k$ は Laplace 変換 \mathcal{L}_k を次のように形式的に $\mathbb{C}[[\zeta]]$ に拡張したものである:

$$\widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{L}_{k,d}(\zeta^n).$$

このとき次が成立する:

定理 1.9.

$$k_2^{-1} = k_1^{-1} + k^{-1}$$

とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \in A_{k_2}(S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta(\varepsilon)))$ で

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z).$$

Proof. $S(d, \alpha, \rho)$ 上 $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ より十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ に対しある定数 $C > 0$ が存在し $\overline{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \rho - \varepsilon)$ 上

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq C^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1)$$

となる. また, $\hat{g}(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]_{1/k_1}$ で, $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ で exponential size k のため $\overline{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \infty) \cap \{|\zeta| \geq \rho - \varepsilon\}$ 上ある定数 $\tilde{C}, h > 0$ が存在し

$$|\nu_g(\zeta, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) e^{h|\zeta|^k}$$

となる. このとき, ある定数 $\delta > 0$ が存在し $(z, \zeta) \in S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta) \times \overline{S}_1(d, \alpha - \varepsilon/2, \infty)$ に対し $-(\zeta/z)^k < -2h|\zeta|^k$ となる. ここで, $f(z) = \mathcal{L}_{k,d}(g)(z)$ とすると積分 (1.6) は $S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta)$ 上収束し正則関数を定める. よって,

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \left(f(z) - \widehat{\mathcal{L}}_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} g_n \zeta^n \right) \right)$$

とすると (1.7) から

$$\nu_f(z, N) = z^{-N} \mathcal{L}_{k,d}(\zeta^N \nu_g(\zeta, N))(z).$$

となるが, $\nu_g(\zeta, N)$ の評価から $\nu_f(z, N)$ に関する次の評価が得られる: $S(d, \alpha + \pi/k - \varepsilon, \delta)$ 上ある定数 $C_1 > 0$ が存在し, 任意の $N \geq 0$ に対し

$$|\nu_f(z, N)| \leq \tilde{C}^{N+1} \Gamma(1 + N/k_1) \Gamma(1 + N/k).$$

よって, $\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) \cong_{k_2} \widehat{\mathcal{L}}_k(\hat{g})(z)$. □

注 1.6. $g(\zeta)$ に対し $g^{(k)}(\zeta) = g(\zeta^{1/k})$ とすると, $\mathcal{L}_{1,kd}$ と $\mathcal{L}_{k,d}$ との関係は

$$\mathcal{L}_{k,d}(g)(z) = \mathcal{L}_{1,kd}(g^{(k)})(z^k)$$

により与えられる. また, $\hat{g}(\zeta) \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ に対し $\hat{g}^{(k)}(\zeta) = \hat{g}(\zeta^{1/k}) \in \mathbb{C}[[\zeta^{1/k}]]$ とし, (1.7) により $\hat{\mathcal{L}}_1$ を $\mathbb{C}[[\zeta^{1/k}]]$ に形式的に拡張すると

$$\hat{\mathcal{L}}_k(g)(z) = \hat{\mathcal{L}}_1(g^{(k)})(z^k).$$

Borel 変換と Laplace 変換に関して次の関係式が成立する:

定理 1.10. $f(z)$ は $S(d, \alpha, \rho)$ ($\alpha > \pi/k$) で正則で有界のとき

$$\mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) = f(z).$$

Proof. 十分小さな $\delta > 0$ に対し $z = \delta e^{2\pi i d}$ の近傍で

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty e^{id}} \int_{\gamma} f(\tilde{z}) e^{\zeta^k(\tilde{z}^{-k} - z^{-k})} z^{-k} \tilde{z}^k d(\tilde{z}^{-k}) d\zeta^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\tilde{z}) z^{-k} \tilde{z}^k d(\tilde{z}^{-k}) \int_0^{\infty e^{id}} e^{\zeta^k(\tilde{z}^{-k} - z^{-k})} d\zeta^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-f(\tilde{z}) z^{-k} \tilde{z}^k}{\tilde{z}^{-k} - z^{-k}} d(\tilde{z}^{-k}) \\ &= \frac{-k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z}) \tilde{z}^{k-1}}{\tilde{z}^k - z^k} d(\tilde{z}) \end{aligned}$$

ここで, $\delta > 0$ を十分小さくとることにより z は閉曲線 γ に囲まれているとしてよい. よって, Cauchy の積分公式から主張が得られる. \square

同様にして次が得られる:

定理 1.11. $g(\zeta)$ は $S(d, \alpha)$ ($\alpha > 0$) で正則, $\zeta = 0$ で有界で *exponential size* k のとき

$$\mathcal{B}_{k,d} \circ \mathcal{L}_{k,d}(g)(\zeta) = g(\zeta).$$

1.5 Borel 総和可能性

まず, 次の Borel-Ritt 型の定理を証明する:

定理 1.12. $d \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, \pi/k)$, $\rho > 0$ とする. このとき, 任意の $\hat{f}(z) \in \mathbf{C}[[z]]_{1/k}$ に対し $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となる $f(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ が存在する.

Proof. $g(\zeta)$ は $\overline{D}_\delta = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\zeta| \leq \delta\}$ ($\delta > 0$) で正則とする. このとき $g(\zeta)$ に対し $\mathcal{L}_{k,d}^\delta(g)(z)$ を

$$\mathcal{L}_{k,d}^\delta(g)(z) = \int_0^{\delta e^{id}} g(\zeta) e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k$$

により定義する. ここで, $\hat{f}(z) \in \mathbf{C}[[z]]_{1/k}$ に対し δ を十分小さく取れば $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \overline{D}_δ で正則とできる. $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) := \mathcal{L}_{k,d}^\delta \circ \hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$ とし, $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ で $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となることを示す. まず, $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \overline{D}_δ 上正則より, ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $N \geq 0$, $\zeta \in \overline{D}_\delta$ に対し

$$\left| \hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n \hat{\mathcal{B}}_k(z^n)(\zeta) \right| \leq C^{N+1} |\zeta|^N \quad (1.8)$$

となる. また, (1.5), (1.7), 及び (1.8) より次の評価が得られる: ある定数 $C_1 > 0$ が存在し $z \in S(d, \alpha, \rho)$ に対し

$$\begin{aligned} |f_n(z^n - \mathcal{S}_{k,d}^\delta(z^n))| &= \left| \int_{\delta e^{id}}^{\infty e^{id}} \frac{f_n \zeta^n}{\Gamma(1 + n/k)} e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k} d\zeta^k \right| \\ &\leq C^{n+1} \Gamma(1 + n/k) |z|^n \exp[-(\delta e^{id}/z)^k], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}_{k,d}^\delta \left(\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n \hat{\mathcal{B}}_k(z^n)(\zeta) \right) \right| &\leq \int_0^{\infty e^{id}} C^{N+1} |\zeta|^N |e^{-(\zeta/z)^k} z^{-k}| |d\zeta^k| \\ &\leq C_1^{N+1} \Gamma(1 + N/k) |z|^N. \end{aligned}$$

以上から $S(d, \alpha, \rho)$ 上 $\mathcal{S}_{k,d}^\delta(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となることがわかる. \square

定理 1.12 から $\alpha \in (0, \pi/k)$ に対し $T_k : A_k(S(d, \alpha, \rho)) \rightarrow \mathbf{C}[[z]]_{1/k}$ は全射となることがわかる. しかしながら, 例えば $\exp[-(e^{id}/z)^k] \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ となり T_k は単射とはならない. 一方, $\alpha > \pi/k$ の場合は T_k は全射とはならないが, 次の Watson の補題が示すように単射となる:

補題 1.13. $\rho > 0$, $\alpha > \pi/k$ に対し $A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho)) = 0$.

Proof. $f(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ とすると $f(z) \cong_k 0$ より, 定理 1.8 から $\mathcal{B}_{k,d}(f)(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_k(0)(\zeta) = 0$. よって, 定理 1.10 から

$$f(z) = \mathcal{L}_{k,d} \circ \mathcal{B}_{k,d}(f)(z) = \mathcal{L}_{k,d}(0)(z) = 0.$$

□

以上から次が得られる:

定理 1.14. $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し, 次は同値.

- (i) ある $f(z) \in A_k(S(d, \alpha, \rho))$ ($\rho > 0, \alpha > \pi/k$) が存在し $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$.
- (ii) ある $\varepsilon > 0$ が存在し $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は $S(d, \varepsilon)$ に解析接続され *exponential size* k .

このとき, $\hat{f}(z)$ に対し $f(z)$ は一意的に定まり $f(z) = \mathcal{L}_{k,d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$ で与えられる.

定義 1.15 (Borel 総和可能性). $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が定理 1.14 の同値な条件を満たすとき $\hat{f}(z)$ は d 方向に k -Borel 総和可能, あるいは k -summable といい, d 方向に k -summable な級数のなす集合を $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ と表す. このとき $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ に対し, その Borel 和 $\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z)$ を

$$\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z) := \mathcal{L}_{k,d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(z)$$

とする. また, $\mathbb{R} \bmod 2\pi$ で有限個の方向を除いて k -summable な級数のなす集合を $\mathbb{C}\{z\}_k$ と表す. また, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が k -summable でない方向を $\hat{f}(z)$ の特異方向といい, その集合を $\text{Sing}(\hat{f})$ ($\subset \mathbb{R} \bmod 2\pi$) と表す.

$$\mathfrak{n}_d := \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathfrak{m} = z\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$$

$$\mathfrak{n} := \mathbb{C}\{z\}_k \cap \mathfrak{m} = z\mathbb{C}\{z\}_k$$

とすると次が得られる:

命題 1.16. $(\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathfrak{n}_d), (\mathbb{C}\{z\}_k, \mathfrak{n})$ は正則局所環で PID となる.

例 1.17. 任意の方向 $d, k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$.

例 1.18. 任意の $k > 0$ に対し $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_k$.

例 1.19. $\hat{f}_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(1 + n/k) z^n$ とすると $\hat{B}_k(\hat{f}_k)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1}$. よって, $\hat{f}_k(z)$ は $d \notin 2\pi\mathbb{Z}$ の方向で k -summable で $\text{Sing}(\hat{f}_k) = \{0 \bmod 2\pi\}$ となる. しかしながら, $k \neq l$ に対し $\hat{f}_k(z) \notin \mathbb{C}\{z\}_l$.

$\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathbb{C}\{z\}_k$ は以下の性質を満たす:

命題 1.20. $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \mathbb{C}\{z\}_k$ は $\mathbb{C}\{z\}$ 上忠実平坦.

命題 1.21. $a < b$ とし $d_0 \in (a, b), k > 0$ とする. このとき, $\hat{f}(z) \in \bigcap_{d \in (a,b) \setminus \{d_0\}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ で, ある $\tilde{k} > 0$ に対し $\hat{B}_k(\hat{f})(\zeta)$ は $S(d_0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) で exponential size \tilde{k} とすると $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d_0}$.

命題 1.21 は次の Phragmén-Lindelöf の定理から従う:

定理 1.22. $g(\zeta)$ は $S = S(d, \pi/k)$ 上正則で exponential size \tilde{k} ($\tilde{k} \in (0, k)$) とする. 更に $g(\zeta)$ が S の境界 ∂S 上連続で有界のとき $g(\zeta)$ は S 上有界となる.

Proof. $d = 0$ の場合を示せば十分. まず

$$\sup_{\partial S} |g(\zeta)| \leq M$$

とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ と $\ell \in (\tilde{k}, k)$ に対し ∂S 上 $|e^{-\varepsilon\zeta^\ell} g(\zeta)| \leq M$ となる. よって, 最大値の原理から S 上

$$|g(\zeta)| \leq M e^{\varepsilon|\zeta|^\ell}$$

となるが, $\varepsilon > 0$ は任意だったので, S 上 $|g(\zeta)| \leq M$ となる. \square

命題 1.23. 任意の $k > 0$ に対し

$$\mathbb{C}\{z\} = \bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}.$$

Proof. $\bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \subset \mathbb{C}\{z\}$ を示せばよい. $\hat{f}(z) \in \bigcap_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ とすると $\hat{B}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \mathbb{C} 上正則で exponential size k となる. よって, ある定数 $\rho > 0$ が存在し $\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \rho\}$ 上一価正則で有界となる. よって, $z = 0$ は除去可能な特異点となり $\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z)$ は $z = 0$ で正則となり $\mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})(z) \cong_k \hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}$. \square

系 1.24. $k_1 > k_2 > 0$ に対し

$$\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2} = \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}.$$

Proof. $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \subset \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}$ となるが, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_2}$ とすると $\widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta)$ は \mathbb{C} 上正則で exponential size k_3 ($k_3^{-1} = k_2^{-1} - k_1^{-1}$) となる. よって, 命題 1.21, 命題 1.23 から主張が得られる. \square

1.6 合成積代数

$\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ には自然な積構造が与えられたが, 本節では $\widehat{\mathcal{B}}_k$ と両立するような $\mathbb{C}\{\zeta\}$ の積構造を考える. まず, 合成積を次で定義する:

定義 1.25 (合成積). $k, k_1 > 0$ とする. このとき, $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$) に対し $f(\zeta)$ と $g(\zeta)$ の合成積 $f *_k g(\zeta)$ を

$$f *_k g(\zeta) = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t f((t - \tilde{t})^{1/k}) g(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}$$

により定義する.

注 1.7. $\cdot *_k \cdot$ と $\cdot *_1 \cdot$ との関係は次で与えられる: $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ に対し $f^{(k)}(\zeta) = f(\zeta^{1/k})$, $g^{(k)}(\zeta) = g(\zeta^{1/k})$ とすると

$$f *_k g(\zeta) = f^{(k)} *_1 g^{(k)}(\zeta^k).$$

このとき次が成立する:

命題 1.26. $f(\zeta), g(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$) とし $f(\zeta) \cong_{k_1} \hat{f}(\zeta)$, $g(\zeta) \cong_{k_1} \hat{g}(\zeta)$ とする. このとき, $h(\zeta) := f *_k g(\zeta)$ とすると $h(\zeta) \in A_{k_1}(S(d, \alpha, \rho))$ で $h(\zeta) \cong_k \hat{h}(\zeta)$,

$$h_n = \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(1 + (n-j)/k) \Gamma(1 + j/k)}{\Gamma(1 + n/k)} f_{n-j} g_j \quad (n \geq 0)$$

となる.

例えば,

$$\zeta^m *_k \zeta^n = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tilde{t})^{m/k} \tilde{t}^{n/k} d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{d}{dt} t^{1+(m+n)/k} B(1+m/k, 1+n/k) \right] \Big|_{t=\zeta^k} \\
&= \frac{\Gamma(1+m/k)\Gamma(1+n/k)}{\Gamma(1+(m+n)/k)} \zeta^{m+n}
\end{aligned}$$

となるが, $\nu_h(\zeta, N)$ の評価等も同様にして得られ, 命題 1.26 が従う.

$\mathbb{C}\{\zeta\}$ に $\cdot *_k \cdot$ により積構造を定めた環を Conv_k とすると, 命題 1.26 から直ちに次が得られる:

命題 1.27. $\widehat{\mathcal{B}}_k : \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow \text{Conv}_k$ は環同型を与える.

注 1.8. $\widehat{\mathcal{B}}_k$ の逆は $\widehat{\mathcal{L}}_k$ により与えられる.

また, $\text{Exp}_{k,d} \subset \mathbb{C}\{z\}$ を, ある $\varepsilon > 0$ が存在し $S(d, \varepsilon)$ で exponential size k の関数のなす空間に $\cdot *_k \cdot$ により積構造を定めた環とすると, 定理 1.14 から次が従う:

命題 1.28. $\widehat{\mathcal{B}}_k : \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \rightarrow \text{Exp}_{k,d}$ は環同型を与える.

次に, 微分に関してだが $s \geq 0$ に対し

$$\widehat{\mathcal{B}}_k \left(z \frac{d}{dz} z^{k+s} \right) (\zeta) = \frac{(k+s)\zeta^{k+s}}{\Gamma(1+(k+s)/k)} = k\zeta^k \widehat{\mathcal{B}}_k(z^s)$$

より, $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し次が成立する:

$$\widehat{\mathcal{B}}_k \left(z \frac{d}{dz} (z^k \hat{f}(z)) \right) = k\zeta^k \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})(\zeta). \quad (1.9)$$

最後に, 命題 1.28 を用いて次を示す:

命題 1.29. $f(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, $\hat{g}(z) \in \mathfrak{n}_d$ ならば, $f(\hat{g}(z)) \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$.

Proof. $g_B(\zeta) := \widehat{\mathcal{B}}_k(\hat{g})(\zeta)$ とし, $g_B(\zeta)$ は $S(d, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) で正則で, $S(d, \varepsilon)$ の閉部分角領域 \bar{S}_1 上 $C, h > 0$ が存在し

$$|g_B(\zeta)| \leq C|\zeta|e^{h|\zeta|^k}$$

が成立するとする. Cauchy の評価式から, C, h を大きく取り直すことにより, $dg_B/d\zeta$ も \bar{S}_1 上

$$\left| \frac{dg_B}{d\zeta}(\zeta) \right| \leq Ce^{h|\zeta|^k}$$

とできる. ここで, $n \geq 0$ に対し $\widehat{B}_k(\hat{g}^n)(\zeta) = g_B^{*n}(\zeta)$ とすると,

$$|g_B^{*n}(\zeta)| \leq \frac{C^n |\zeta|^n}{\Gamma(1 + n/k)} e^{h|\zeta|^k} \quad (1.10)$$

が成立する. 実際, $n = n_0$ のとき成立するとすると, $g_B(0) = 0$ より,

$$\begin{aligned} |g_B *_k g_B^{*n_0}(\zeta)| &= \left| \int_0^t \frac{dg_B}{d\zeta}((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} g_B^{n_0}(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right|_{t=\zeta^k} \\ &\leq \int_0^{|\zeta|} C e^{h(|t| - |\tilde{t}|)} \frac{1}{k} (|t| - |\tilde{t}|)^{1/k-1} \frac{C^{n_0} |\tilde{t}|^{n_0/k}}{\Gamma(1 + n_0/k)} e^{h|\tilde{t}|} d|\tilde{t}| \Big|_{|t|=|\zeta|^k} \\ &\leq C^{n_0+1} |\zeta|^{n_0+1} e^{h|\zeta|^k} \frac{B(1/k, 1 + n_0/k)}{\Gamma(1 + n_0/k)} \\ &\leq \frac{C^{n_0+1} |\zeta|^{n_0+1}}{\Gamma(1 + (n_0 + 1)/k)} e^{h|\zeta|^k}. \end{aligned}$$

よって, (1.10) から $\widehat{B}_k(f(\hat{g}))(\zeta)$ は \bar{S}_1 上正則で exponential order k となることがわかる. \square

1.7 Weierstrass 型割り算定理

本節では $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ の Hensel 性に関して議論する. まず, $f(\zeta, w), g(\zeta, w) \in \mathbb{C}\{\zeta, w\}$ に対し, その積 $f * g(\zeta, w)$ を次で定義する:

$$f * g(\zeta, w) = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t f((t - \tilde{t})^{1/k}, w) g(\tilde{t}^{1/k}, w) d\tilde{t} \right] \Big|_{t=\zeta^k}. \quad (1.11)$$

また, $\text{Exp}_{k,d}^w$ を $f(\zeta, w) \in \mathbb{C}\{\zeta, w\}$ で, ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$S^w = S(d, \varepsilon) \times \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$$

上正則に解析接続され, $\overline{S^w}$ 上連続で

$$|f(\zeta, w)| \leq C e^{h|\zeta|^k}$$

となる関数のなす空間とする. $\text{Exp}_{k,d}^w$ についても同様の積構造を考える. 以後 \mathcal{R} は $\mathbb{C}\{\zeta, w\}$, 或は $\text{Exp}_{k,d}^w$ とする. ここで, \mathcal{R}^0 を $f(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ で $f(0, 0) \neq 0$ となるものとする, \mathcal{R}^0 は \mathcal{R} の単元のなす集合と一致する. このとき, 通常の Weierstrass 型の割り算定理と同様にして (例えば [GR] を参照), 次が得られる:

定理 1.30. $g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は

$$\partial_w^j g(0, 0) = 0 \quad (0 \leq j \leq n-1), \quad (1.12)$$

$$\partial_w^n g(0, 0) \neq 0 \quad (1.13)$$

を満たすとする. このとき, 任意の $f(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ に対し次を満たす $q(\zeta, w), r(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ が一意に存在する:

$$\begin{aligned} f &= q * g + r, \\ \partial_w^n r(\zeta, w) &= 0. \end{aligned}$$

$g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は (1.12), (1.13) を満たすとき w に関し order n であるとい
い, 更に w に関して monic な n 次多項式となるときの $g(\zeta, w)$ は Weierstrass 多
項式であるという. すると, 定理 1.30 から次が得られる:

定理 1.31. $g(\zeta, w) \in \mathcal{R}$ は w に関し order n とする. このとき, 次数 n の
Weierstrass 多項式 $W(\zeta, w)$, 及び $q(\zeta, w) \in \mathcal{R}^0$ で, 次を満たすものが一意
に存在する:

$$g = q * W.$$

よって, monic な多項式 $f(z, w) \in (\mathbb{C}[[z]]_{1/k})[w]$ に対して, $f(0, w) = \bar{g}(w)\bar{h}(w)$ ($\bar{g}, \bar{h} \in \mathbb{C}[w]$ は互いに素) となるときの, 定理 1.31 から $g(z, w), h(z, w) \in (\mathbb{C}[[z]]_{1/k})[w]$ で $f(z, w) = g(z, w)h(z, w)$, $g(0, w) = \bar{g}(w)$, $h(0, w) = \bar{h}(w)$ と
なるものが存在することがわかる. $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ についても同様の命題が
成立するため, 次が得られる:

定理 1.32. $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$, $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, $\mathbb{C}\{z\}_k$ は Hensel 環となる.

注 1.9. より一般に, 多変数の Gevrey 級数のなす環に対しても, 接的な Weier-
strass 型の割り算定理が成り立つことが知られている. 詳しくは [Z] を参照.

注 1.10. [Ro] では $\mathbb{C}[[z]]$ の Hensel 性という観点から $\mathbb{C}[[z]]$ の完備性を用いて
特異点における微分作用素の分解定理が議論されている.

1.8 Cauchy-Heine 変換

本節では Cauchy-Heine 変換と, その応用について述べる. まず, Cauchy-Heine
変換を次で定義する:

定義 1.33 (Cauchy-Heine 変換). $\psi(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$), $a \in S(d, \alpha, \rho)$ とする. このとき, $\psi(z)$ の Cauchy-Heine 変換 $\text{CH}_a(\psi)(z)$ を

$$\text{CH}_a(\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w-z} dw$$

により定義する.

$\text{CH}_a(\psi)(z)$ は次を満たす:

命題 1.34. $\psi(z) \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ ($\alpha, \rho > 0$), $a \in S(d, \alpha, \rho)$ とし, $\tilde{d} = d + \pi$, $\tilde{\alpha} = \alpha + 2\pi$, $\tilde{\rho} = |a|$ とする. このとき, $\text{CH}_a(\psi)(z) \in A_k(S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}))$ で

$$\text{CH}_a(\psi)(z) \cong_k \widehat{\text{CH}}_a(\psi)(z),$$

$$\widehat{\text{CH}}_a(\psi)(z) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^a w^{-n-1} \psi(w) dw.$$

更に, $z \in S(d, \alpha, \tilde{\rho})$ に対し

$$\text{CH}_a(\psi)(z) - \text{CH}_a(\psi)(ze^{2\pi i}) = \psi(z).$$

Proof. まず, $\text{CH}_a(\psi)(z)$ の $S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho})$ での正則性は, 積分路 $[0, a]$ を端点を固定しながら z が積分路上に現れないように $S(d, \alpha, \rho)$ 内で変形することにより得られるが, $\text{CH}_a(\psi)(z) \in A_k(S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}))$ となることは, $\psi \in A_k^{(0)}(S(d, \alpha, \rho))$ と

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n w^{-n-1} + \frac{z^N w^{-N}}{w-z}$$

から剰余項の評価が得られ, 導かれる. 最後の主張は Cauchy の積分公式から従う. \square

次に正規被覆を定義する:

定義 1.35 (正規被覆). $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の被覆 I_j ($1 \leq j \leq m$) が正規被覆であるとは,

$$\alpha_{j+1} < \beta_j < \alpha_{j+2} \quad (1 \leq j \leq m)$$

を満たす $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq m$) が存在し, $I_j = (\alpha_j, \beta_j) \bmod 2\pi$ と表されることである. ただし, $j > m$ に対し $\alpha_j = \alpha_{j-m} + 2\pi$ とする.

また, $D_r^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$ ($r > 0$) の被覆 S_j ($1 \leq j \leq m$) が正規被覆であるとは, 同様の α_j, β_j ($1 \leq j \leq m$) により $S_j = S((\alpha_j + \beta_j)/2, (\beta_j - \alpha_j)/2, r)$ と表されることである.

このとき、命題 1.34 から直ちに次が得られる:

定理 1.36. S_j ($1 \leq j \leq m$) を D_r^* の正規被覆とし、 $\psi_j(z) \in A_k^{(0)}(S_{j-1} \cap S_j)$ ($S_0 = S_m$) とする. このとき、 $a_j \in S_{j-1} \cap S_j$ に対し

$$f_j(z) = \sum_{\ell=1}^j \text{CH}_{a_\ell}(\psi_\ell)(z) + \sum_{\ell=j+1}^m \text{CH}_{a_\ell}(\psi_\ell)(ze^{2\pi i}) \quad (0 \leq j \leq m) \quad (1.14)$$

とし、 $\tilde{S}_j := S_j \cap D_\rho^*$ ($\rho = \min_j |a_j|$) とすると $f_j(z) \in A_k(\tilde{S}_j)$ ($0 \leq j \leq m$) で次を満たす:

$$\begin{aligned} f_j(z) &\cong_k \sum_{\ell=1}^m \widehat{\text{CH}}_{a_\ell}(\psi_\ell)(z), \\ f_j(z) - f_{j-1}(z) &= \psi_j(z), \\ f_m(ze^{2\pi i}) &= f_0(z). \end{aligned}$$

最後に次の k -summable な級数に関する分解定理を与える:

定理 1.37. $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ とし、 $\text{Sing}(\hat{f}) = \{d_j \bmod 2\pi \mid 1 \leq j \leq m\}$ とする. このとき、 $\text{Sing}(\hat{f}_j) = \{d_j \bmod 2\pi\}$ となる $\hat{f}_j(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ ($1 \leq j \leq m$) が存在し

$$\hat{f}(z) = \sum_{j=1}^m \hat{f}_j(z)$$

と表される.

Proof. $d_1 < d_2 < \dots < d_m < d_{m+1} = d_m + 2\pi$ としてよい. このとき、 $\tilde{d}_j \in (d_j, d_{j+1})$ に対し $\tilde{f}_j(z) = \mathcal{S}_{k, \tilde{d}_j}(\hat{f})(z)$, $\tilde{f}_0(z) = \tilde{f}_m(z)$ とし、 $\psi_j(z) = \tilde{f}_j(z) - \tilde{f}_{j-1}(z)$ ($1 \leq j \leq m$) とすると、 $\psi_j(z) \in A_k^{(0)}(S_{j-1} \cap S_j)$ となる. ただし、 S_j はある $\varepsilon, \rho > 0$ に対し定義 1.35 で $\alpha_j = d_j - \pi/2k + \varepsilon$, $\beta_j = d_{j+1} + \pi/2k - \varepsilon$ とした D_ρ^* の被覆である. ここで、 $a_j = \tilde{\rho}e^{2\pi i d_j}$ ($\tilde{\rho} \in (0, \rho)$) とし、 \tilde{S}_j を $\alpha_j = d_j - \pi - \pi/2k + \varepsilon$, $\beta_j = d_j + \pi + \pi/2k - \varepsilon$ とした D_ρ^* の被覆とすると命題 1.34 から $\text{CH}_{a_j}(\psi_j)(z) \in A_k(\tilde{S}_j)$ となる. ここで、 $\varepsilon > 0$ は任意に小さく取れるので、 $\text{CH}_{a_j}(\psi_j)(z) \cong_k \widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ で $\text{Sing}(\widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)) = \{d_j \bmod 2\pi\}$ となる. ここで、 $f_j(z)$ を (1.14) により定義し $g_j(z) := \tilde{f}_j(z) - f_j(z)$ とすると、命題 1.34 から $S_{j-1} \cap S_j$ 上 $g_j(z) - g_{j-1}(z) = 0$ となる. よって、 $g_j(z)$ は D_ρ^* で正則で $z = 0$ で有界となり、 $h(z) = g_j(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ となる. よって、 $f_j(z) + h(z) = \tilde{f}_j(z) \cong_k \hat{f}(z)$ となるので、 $\hat{f}_j(z) = \widehat{\text{CH}}_{a_j}(\psi_j)(z)$ ($1 \leq j \leq m-1$), $\hat{f}_m(z) = \widehat{\text{CH}}_{a_m}(\psi_m)(z) + h(z)$ とすればよい. \square

1.9 層論的考察

本節では $k > 1/2$ とする. まず, \mathbb{S}^1 上の Gevrey order k で漸近展開可能な関数のなす層 \mathcal{A}_k は次で定義される: I を \mathbb{S}^1 の連結な開集合とする. このとき $\mathcal{A}_k(I)$ を, ある連続関数 $\rho: I \rightarrow (0, 1)$ が存在し $S_\rho := \{\tilde{\rho}e^{i\theta} \mid 0 < \tilde{\rho} < \rho(\theta), \theta \in I\}$ に含まれる任意の角領域上漸近展開可能な関数のなす集合とする. \mathbb{S}^1 の連結な開集合全体は \mathbb{S}^1 の開基となるので, これから \mathbb{S}^1 上の層 \mathcal{A}_k が自然に定まる. 本節では [Ra2],[MR] 等に従い, \mathcal{A}_k の基本的性質について解説する.

まず, $\mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ を \mathbb{S}^1 上の定数層と考えると, \mathcal{A}_k の定義から自然な射 $T_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が定まる. このとき, $\mathcal{A}_k^{(0)} := \text{Ker } T_k$ とすると, 定理 1.12 から次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

$\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) = 0$, $\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) = \mathbb{C}\{z\}$, $\Gamma(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) = H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) = \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に注意して, (1.15) から次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

ここで, 被覆の細分を取り, \mathbb{S}^1 の正規被覆を考えることにより定理 1.36 から次が得られる:

定理 1.38. (1.16) の射 $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k)$ の像は 0 となる.

定理 1.38 から, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

また, $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ となることもわかる. ここで,

$$I_k^{(d)} = [d - \pi/2k, d + \pi/2k] \bmod 2\pi$$

としたとき, 次の完全列に注意する:

$$0 \rightarrow (\mathcal{A}_k)_{\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}} \rightarrow \mathcal{A}_k \rightarrow (\mathcal{A}_k)_{I_k^{(d)}} \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

ここで,

$$I_k^{(d)} \xrightarrow{\iota_1} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\iota_2} \mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}$$

とすると, $I_k^{(d)}$ は閉集合より, $(\mathcal{A}_k)_{\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}} = \iota_2! \iota_2^{-1} \mathcal{A}_k$ となるので, (1.18) から次の完全列が得られる:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma_c(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) &\rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \\ &\rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{A}_k) \rightarrow H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

$\mathcal{A}_k^{(0)}$ に関しても (1.19) と同様の完全列が得られる. ここで, 定義から

$$T_k : \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$$

で, Watson の補題より

$$\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) = 0$$

となる. また, $\Gamma_c(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) = 0$, $H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathbb{C}[[z]]_{1/k}) \simeq \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ より,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & \longrightarrow & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \wr \\ & & H^1(\mathbb{S}^1; \mathcal{A}_k^{(0)}) & \xrightarrow{0} & H^1(\mathbb{S}^1; \mathcal{A}_k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} \end{array}$$

が成立する. よって, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1 \setminus I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

また, \mathbb{S}^1 の連結な開集合 I に対し $\mathcal{B}_k(I)$ を I の任意の方向で k -summable な級数のなす集合とすると, これから \mathbb{S}^1 上の k -summable な級数のなす層 \mathcal{B}_k が定まるが, $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ は以下のようにして関係づけることができる: まず, $\widehat{\mathbb{S}}^1$ を \mathbb{S}^1 のコピーとし,

$$D_k = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \widehat{\mathbb{S}}^1 \mid |\arg \theta_1 - \arg \theta_2| \leq \pi/2k\}$$

とする. また, p_1 を第1成分に関する射影, p_2 を第2成分に関する射影とする:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^1 \times \widehat{\mathbb{S}}^1 & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{S}^1 & & \widehat{\mathbb{S}}^1 \end{array}$$

このとき,

$$\mathcal{A}_k^\wedge = p_{2*}(p_1^{-1}\mathcal{A}_k)_{D_k}$$

とすると, $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ は次の関係式を満たす:

$$\mathcal{B}_k \simeq \mathcal{A}_k^\wedge.$$

また, $\mathcal{G}_k := \mathrm{GL}(n; \mathcal{A}_k)$, $\widehat{G}_k := \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ とすると, 自然な射 $T_k : \mathcal{G}_k \rightarrow \widehat{G}_k$ が定まるが, $\mathcal{G}_k^{(0)} := \ker T_k$ とする. このとき, (1.15) と同様に次の完全列が得られる:

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}_k \rightarrow \widehat{G}_k \rightarrow 1. \quad (1.21)$$

ここで, Cartan の補題と類似の議論により定理 1.38 から次が導かれる:

定理 1.39. (0.2) から得られる自然な射 $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{G}_k^{(0)}) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{G}_k)$ の像は 1 となる.

注 1.11. 定理 1.38, 定理 1.39 と同様の主張が通常の漸近展開可能な関数のなす層に関するしても成立する. 詳細は [Si] を参照. また, 多変数の漸近解析においても同様の主張が成立することが知られている. 詳細は [Ma], [H] を参照.

1.10 多重総和可能性

本節では多重総和可能性に関して説明する. まず, 次の相対的 Watson の補題を示す.

定理 1.40. $l > k > 1/2$ に対し

$$\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)}) = 0.$$

Proof. まず, 次の完全列に注意する:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_l^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} \rightarrow \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)} \rightarrow 0.$$

このとき, Watson の補題から $\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) = \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) = 0$ より, 次の完全列が得られる:

$$0 \rightarrow \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)} / \mathcal{A}_l^{(0)}) \rightarrow H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) \xrightarrow{\iota^1} H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}).$$

よって, ι^1 の単射性を示せばよい. 定理 1.38 から次の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & \\
& & & \downarrow & & & \\
\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l) & \xrightarrow{T_l} & \mathbb{C}[[z]]_{1/l} & \xrightarrow{\partial_l} & H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l^{(0)}) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \iota^1 & & \\
\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k) & \xrightarrow{T_k} & \mathbb{C}[[z]]_{1/k} & \xrightarrow{\partial_k} & H^1(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k^{(0)}) & &
\end{array}$$

ここで, $\varphi \in \text{Ker } \iota^1$ とすると, $\partial_l(\hat{f}) = \varphi$ となる $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ が存在する. よって, $\hat{f} \in \text{Im } T_l(\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l))$ を示せばよい. ここで, $\partial_k(\hat{f}) = 0$ より $\hat{f} \in T_k(\Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k))$ に注意すると, 次の命題に帰着される. \square

命題 1.41. $l > k > 1/2$ に対し

$$T_l : \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/l}.$$

Proof. Watson の補題から単射性は明らか. 全射性を示す. $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ とすると $T_k(f) = \hat{f}$ となる $f \in \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_k)$ が存在する. ここで, 定理 1.8 より $k_1^{-1} = k^{-1} - l^{-1}$ とすると $\overline{S(d, \pi/2k_1)} \setminus \{0\}$ 上正則で $\mathcal{B}_{l,d}(f) \cong_{k_1} \widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f})$ となる. ここで, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/l}$ より $\widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{z\}$ となるので, T_l の単射性から $\mathcal{B}_{l,d}(f) \cong_{\infty} \widehat{\mathcal{B}}_l(\hat{f})$. また, $\mathcal{B}_{l,d}(f)$ は $\overline{S(d, \pi/2k_1)}$ 上 exponential order l より, 定理 1.9 から $f = \mathcal{L}_{l,d} \circ \mathcal{B}_{l,d}(f) \in \Gamma(I_k^{(d)}; \mathcal{A}_l)$ で, $f \cong_l \hat{f}$ となる. \square

次に多重総和可能な級数を定義する. まず

$$\infty = k_{m+1} > k_m > k_{m-1} > \cdots > k_1 = k > 1/2$$

に対し $\vec{k} = (k_m, k_{m-1}, \dots, k_1)$ とし, $\vec{d} = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1) \in \mathbb{R}^m$ は

$$I_{k_m}^{(d_m)} \subset I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})} \subset \cdots \subset I_{k_1}^{(d_1)}$$

を満たすとする. ここで, $1 \leq j \leq m$ に対し

$$A_j := \Gamma(I_{k_j}^{(d_j)}; \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k_{j+1}}^{(0)}),$$

$$B_j := \Gamma(I_{k_{j+1}}^{(d_{j+1})}; \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k_{j+1}}^{(0)})$$

とする. このとき, 自然な射による次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & & A_2 & & & & A_m \\
 & \searrow & & \searrow & & & \searrow \\
 & & B_1 & & B_2 & \cdots & B_{m-1} \\
 & & & \swarrow & & & \swarrow
 \end{array}$$

このファイバー積 $A_1 \times_{B_1} A_2 \times_{B_2} \cdots \times_{B_{m-1}} A_m$ を $A_{\vec{k}, \vec{d}}$ と表す. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ を \vec{k} -precise quasifunction, f_j を k_j -precise quasifunction と呼ぶ. ここで, $\mathcal{A}_l^{(0)} \subset \text{Ker } T_k$ ($l \geq k$) より, 自然な射 $T_k: A_j \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ ($1 \leq j \leq m$) が定まるが, $(f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し $T_k(f_1) = \cdots = T_k(f_m)$ となることに注意する. そして, $(f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し $T_k(f_1)$ を対応させることにより自然な射 $T_{\vec{k}}: A_{\vec{k}, \vec{d}} \rightarrow \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ が定まるが, この像 $\text{Im } T_{\vec{k}}$ を $\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ と表し, その元を \vec{d} 方向に \vec{k} -summable な級数と呼ぶ. また, $(f_1, \dots, f_m), (g_1, \dots, g_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し, その積を $(f_1 g_1, \dots, f_m g_m)$ で定めることにより $A_{\vec{k}, \vec{d}}$ は環となり, $T_{\vec{k}}$ は環準同型となる.

注 1.12. $\mathcal{A}_\infty^{(0)} = 0$ より, $A_m = \Gamma(I_{k_m}^{(d_m)}; \mathcal{A}_k)$ となり, 特に $m = 1$ のとき $T_k: A_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{k_1, d_1}$ となる.

このとき, 次が成立する:

定理 1.42. $\text{Ker } T_{\vec{k}} = 0$.

Proof. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in \text{Ker } T_{\vec{k}}$ とする. すると, $T_k(f_1) = 0$ より, $f_1 \in \Gamma(I_{k_1}^{(d_1)}; \mathcal{A}_k^{(0)}/\mathcal{A}_{k_2}^{(0)})$ となり, 定理 1.40 から $f_1 = 0$ となる. 次に B_1 の元として $f_1 = f_2$ となるので, $f_2 \in \Gamma(I_{k_2}^{(d_2)}; \mathcal{A}_{k_2}^{(0)}/\mathcal{A}_{k_3}^{(0)})$ となり, 再び定理 1.40 から $f_2 = 0$ となる. 同様にして, 帰納的に $f_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$) となる. \square

特に, 定理 1.42 から

$$T_{\vec{k}}: A_{\vec{k}, \vec{d}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$$

となるが, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し $T_{\vec{k}}^{-1}(\hat{f}) = (f_1, \dots, f_m)$, 或は f_m のことを \hat{f} の多重 Borel 和と呼び, $\mathcal{S}_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ と表す.

注 1.13. $\vec{f}, \vec{g} \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ とし, $f_m = g_m$ とすると, $\vec{f} - \vec{g} \in \text{Ker } T_{\vec{k}}$ となる. よって, 定理 1.42 から f_m を定めれば $A_{\vec{k}, \vec{d}}$ の元 \vec{f} が一意的に定まることがわかる.

$\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ は環であるが, より詳しく次が成立する:

命題 1.43. $\hat{f} \in \mathfrak{m} \cap \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$, $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ に対し $g(\hat{f}) \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$.

実際, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ で $T_{\vec{k}}(\vec{f}) = \hat{f}$ とすると, $g(\vec{f}) = (g(f_1), \dots, g(f_m)) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ で $T_{\vec{k}}(g(\vec{f})) = g(\hat{f})$ となることがわかる.

以上から, $\mathfrak{n}_{\vec{k}, \vec{d}} = \mathfrak{m} \cap \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$, とすると次が得られる:

命題 1.44. $(\mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}, \mathfrak{n}_{\vec{k}, \vec{d}})$ は正則局所環で PID となる.

次に \vec{k} -summable な級数に関する分解定理について述べる. まず, $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) とする. このとき,

$$\hat{f} = \hat{f}^{(1)} + \dots + \hat{f}^{(m)} \quad (1.22)$$

とすると $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる. 実際,

$$f_m = \mathcal{S}_{k_1, d_1}(\hat{f}^{(1)}) + \dots + \mathcal{S}_{k_m, d_m}(\hat{f}^{(m)}) \quad (1.23)$$

とすれば, f_m は $A_{\vec{k}, \vec{d}}$ の元を定め, $T_{\vec{k}}(f_m) = \hat{f}$ となることがわかる. 逆に, \vec{k} -summable な級数に関する次の分解定理が成立する:

定理 1.45. $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し以下は同値:

- (i) $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$
- (ii) $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) が存在し (1.22) の形に表される.

Proof. (i) \Rightarrow (ii) を示す. $(f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k}, \vec{d}}$ とし, $T_{\vec{k}}(f_m) = \hat{f}$ とする. ここで, B_{m-1} で $f_m = f_{m-1}$ より, f_{m-1} から次のような $I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})}$ の正規被覆 $\{I_j\}_{j=1}^p$ と $f_{m-1, j} \in \Gamma(I_j; \mathcal{A}_k)$ が定まる: ある q ($1 \leq q \leq p$) に対し

$$I_{k_m}^{(d_m)} \subset I_q,$$

$$\overline{I_j} \cap I_{k_m}^{(d_m)} = \emptyset \quad (j \neq q),$$

$$f_{m-1, q} = f_m,$$

$$f_{m-1, j} - f_{m-1, j+1} \in \Gamma(I_j \cap I_{j+1}; \mathcal{A}_{k_m}^{(0)}).$$

ここで, Cauchy-Heine 変換を用いた定理 1.36 と同様の議論から $g_{m-1, j} \in \Gamma(I_j; \mathcal{A}_{k_m})$ で $I_j \cap I_{j+1}$ 上

$$f_{m-1, j} - f_{m-1, j+1} = g_{m-1, j} - g_{m-1, j+1}$$

となるものが存在する. よって, $h_{m-1,j} = f_{m-1,j} - g_{m-1,j}$ とすると, $I_j \cap I_{j+1}$ 上 $h_{m-1,j} = h_{m-1,j+1}$ となり $h_{m-1} \in \Gamma(I_{k_{m-1}}^{(d_{m-1})}; \mathcal{A}_k)$ が定まる. また, $g_{m-1,q} \cong_{k_m} \hat{f}^{(m)}$ とすると $\hat{f}^{(m)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_m, d_m}$ となる. ここで, 任意の $\hat{g} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k_m}$ に対し $g_j \in A_j$ ($1 \leq j \leq m-2$) で $T_k(g_j) = \hat{g}$ となるものが取れるので, $\hat{h} = \hat{f} - \hat{f}^{(m)}$ とすると, $\vec{k}' = (k_1, \dots, k_{m-1})$, $\vec{d}' = (d_1, \dots, d_{m-1})$ に対し $\hat{h} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}', \vec{d}'}$ となる. よって, 帰納的に $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$) が存在し \hat{f} は (1.22) の形に表されることがわかる. \square

注 1.14. 一般に $\hat{f}^{(j)} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j, d_j}$ ($j = 1, \dots, m$), $P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ に対し $P(\hat{f}^{(1)}, \dots, \hat{f}^{(m)}) \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる.

定理 1.45 の分解を用いると, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ の多重 Borel 和は $\mathcal{S}_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ (1.23) で与えられるが, J. Ecalle による Acceleration 作用素を用いて, 以下のように直接的に $\mathcal{S}_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ を構成することができる. まず, $\tilde{k} > k > 0$ に対し d 方向の (\tilde{k}, k) -Acceleration 作用素 $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}$ は次で定義される:

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \zeta^{-k} \int_0^{\infty e^{id}} f(\tilde{\zeta}) C_{\tilde{k}/k}((\tilde{\zeta}/\zeta)^k) d\tilde{\zeta}^k,$$

$$C_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} u^{1-1/\alpha} e^{u^{-1}-tu^{-1/\alpha}} du^{-1} \quad (\alpha > 1).$$

ただし, $C_\alpha(t)$ の積分路 γ_1 は (1.4) で $d = 0$, $k = 1$ としたものとする. ここで, $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}$ の定義域が問題となるが, $f(\zeta) \in \text{Exp}_{k, d}$ に対しては $\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)$ が定義可能で

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \mathcal{B}_{\tilde{k}, d} \circ \mathcal{L}_{k, d}(f)(\zeta) \quad (1.24)$$

となる. 実際,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\tilde{k}, d} \circ \mathcal{L}_{k, d}(f)(\zeta) &= \int_\gamma e^{(\zeta/z)^{\tilde{k}}} z^{\tilde{k}} dz^{-\tilde{k}} \int_0^{\infty e^{id}} e^{-(\tilde{\zeta}/z)^k} z^{-k} f(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}^k \\ &= \int_0^{\infty e^{id}} f(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}^k \int_\gamma z^{\tilde{k}-k} e^{(\zeta/z)^{\tilde{k}} - (\tilde{\zeta}/z)^k} dz^{-\tilde{k}} \end{aligned}$$

となるが, $u = (z/\zeta)^{\tilde{k}}$ と積分変数を変換することにより (1.24) が得られる. よって, 特に $f(\zeta) = \zeta^s$ ($s \geq 0$) に対し

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}, k, d}(f)(\zeta) = \frac{\Gamma(1 + s/k)}{\Gamma(1 + s/\tilde{k})} \zeta^s \quad (1.25)$$

となる. また, $\hat{f}(\zeta) = \sum_n f_n \zeta^n \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ に対し $\widehat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta)$ を

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n/k)}{\Gamma(1+n/\tilde{k})} f_n \zeta^n$$

により定義する. ここで, 次に注意する:

命題 1.46. $\alpha > 1$ に対し β を

$$\beta^{-1} = 1 - \alpha^{-1}$$

とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $c_1, c_2 > 0$ が存在し $S(0, \pi/\beta - \varepsilon)$ 上

$$|C_\alpha(t)| \leq c_1 e^{-c_2 |t|^\beta} \quad (1.26)$$

を満たす.

Proof. $C_\alpha(t)$ の定義式で積分変数を $v = t^{-\alpha} u$ とすると

$$C_\alpha(t) = \frac{t}{2\pi i} \int_{\gamma_1} v^{1-1/\alpha} e^{t^{-\alpha} v^{-1} - v^{-1/\alpha}} dv^{-1}$$

となる. よって, $f(v) = v^{-1/\alpha} e^{-v^{-1/\alpha}}$ とすると $C_\alpha(t) = t \mathcal{B}_{1,0}(f)(t^{-\alpha})$ となる. ここで, $f(v) \in A_{1/\alpha}^{(0)}(S(0, \alpha\pi))$ より, 定理 1.8 から $\mathcal{B}_{1,0}(f)(\zeta) \in A_{\alpha-1}^{(0)}(S(0, (\alpha-1)\pi))$ となる. よって, $\zeta = t^{-\alpha}$ として, 命題 1.7 から (1.26) を得る. \square

よって, 命題 1.46 から次が得られる:

定理 1.47. $S = S(d, \delta)$ ($\delta > 0$) とし, $\tilde{k} > k > 0$ に対し κ を

$$\kappa^{-1} = k^{-1} - \tilde{k}^{-1}$$

により定める. このとき, $f(\zeta) \in A_l(S)$ は S で exponential size κ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\rho(\varepsilon) > 0$ が存在し $\tilde{S} = S(d, \delta + \pi/\kappa - \varepsilon, \rho(\varepsilon))$ 上 $\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta)$ は正則となる. また,

$$\tilde{l}^{-1} = l^{-1} + \kappa^{-1}$$

とすると $\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta) \in A_{\tilde{l}}(\tilde{S})$ で

$$\mathcal{A}_{\tilde{k},k,d}(f)(\zeta) \cong_{\tilde{l}} \widehat{\mathcal{A}}_{\tilde{k},k}(\hat{f})(\zeta).$$

となる.

注 1.15. $\mathcal{A}_{\vec{k},k,d}$ の定義域は $\mathcal{L}_{k,d}$ のものに比べ広がっている.

このとき, 次が成立する:

定理 1.48. $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ に対し以下は同値:

- (i) $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k},\vec{d}}$
- (ii) \vec{k} に対し κ_j ($1 \leq j \leq m$) を

$$\kappa_j^{-1} = k_j^{-1} - k_{j+1}^{-1}$$

により定める. $g_j(\zeta)$ ($1 \leq j \leq m$) を帰納的に

$$\widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\hat{f})(\zeta) = g_1(\zeta),$$

$$g_{j+1}(\zeta) = \mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}(g_j)(\zeta)$$

により定めるとき, ある $\varepsilon > 0$ に対し $g_j(\zeta)$ は $S(d_j, \varepsilon)$ で exponential size κ_j .

Proof. まず (i) \Rightarrow (ii) を示す. 定理 1.45 の分解を用いることにより $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j,d_j}$ に対し示せば良い. このとき, $i < j$ に対しては $g_i(\zeta)$ は整関数で exponential size $(k_i^{-1} - k_j^{-1})^{-1}$ となるが, $(k_i^{-1} - k_j^{-1})^{-1} < \kappa_i$ より成立する. また, $g_j(\zeta) = \widehat{\mathcal{B}}_{k_j}(\hat{f})(\zeta)$ となるが, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_j,d_j}$ より $g_j(\zeta)$ は d_j 方向で exponential size $k_j (< \kappa_j)$ となる. よって, $g_{j+1}(\zeta) = \mathcal{B}_{k_{j+1},d_j} \circ \mathcal{L}_{k_j,d_j}(g_j)(\zeta)$ となるので $g_{j+1}(\zeta)$ は d_{j+1} 方向で exponential size k_{j+1} となる. 同様にして $i \geq j+1$ に対しても $g_i(\zeta)$ は d_i 方向で exponential size k_i となることがわかる.

次に (ii) \Rightarrow (i) に関してだが, まず

$$f_j(z) = \mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta(g_{j+1})(z) \quad (1 \leq j \leq m-1),$$

$$f_m(z) = \mathcal{L}_{k_m,d_m}(g_m)(z)$$

とする. ここで, $\mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta$ は定理 1.12 の証明で用いた作用素で, $|d - d_j| < \varepsilon/2 + \pi/2\kappa_j$ に対し $\mathcal{L}_{k_{j+1},d}^\delta$ の積分端点 δe^{id} の差は Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. このとき, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in A_{\vec{k},\vec{d}}$ となり, $T_{\vec{k}}(\vec{f}) = \hat{f}$ となる. 実際, $f_j \in A_j$ で $T_k(f_j) = \hat{f}$ となることは明らかだが, B_{j-1} の元として $f_j = f_{j-1}$ となることは次のようにしてわかる: まず, $g_j(\zeta)$ に対し $\mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$ を

$$\mathcal{A}_{k_{j+1},k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta) = \mathcal{B}_{k_{j+1},d_j} \circ \mathcal{L}_{k_j,d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$$

により定義する. ここで, $g_{j+1}^\delta(\zeta) = \mathcal{A}_{k_{j+1}, k_j, d_j}^\delta(g_j)(\zeta)$ とすると, 命題 1.46 から $g_{j+1}(\zeta) - g_{j+1}^\delta(\zeta)$ は Gevrey order $k_j k_{j+1}/(k_{j+1} - k_j)$ で 0 に漸近展開されるため, $\mathcal{L}_{k_{j+1}, d_{j+1}}^\delta(g_{j+1} - g_{j+1}^\delta)(z)$ は Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. また, 定理 1.10 より $f_{j-1}(z) = \mathcal{L}_{k_{j+1}, d_j}^\delta(g_{j+1}^\delta)(z)$ となるが, $f_{j-1}(z) - \mathcal{L}_{k_{j+1}, d_{j+1}}^\delta(g_{j+1}^\delta)(z)$ も Gevrey order k_{j+1} で 0 に漸近展開される. 以上から B_{j-1} の元として $f_j = f_{j-1}$ となることがわかる. よって, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ となる. \square

定理 1.48 から次が得られる:

系 1.49. $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{\vec{k}, \vec{d}}$ に対し, その多重 Borel 和 $\mathcal{S}_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f})$ は次で与えられる:

$$\mathcal{S}_{\vec{k}, \vec{d}}(\hat{f}) = \mathcal{L}_{k_m, d_m} \circ \mathcal{A}_{k_m, k_{m-1}, d_{m-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{k_2, k_1, d_1} \circ \widehat{B}_{k_1}(\hat{f}).$$

2 不確定特異点における形式解の構造

収束級数係数の n 次正方行列 $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$, 正整数 k に対し, 次の連立微分方程式系の形式解を構成することを考える:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \varphi = A(z) \varphi. \quad (2.1)$$

一般に (2.1) は $z = 0$ に不確定特異点と呼ばれる特異点を持つが, 本節では, [BJL], [Ra2], [Ba2] に従い, このような特異点における形式解の構造, 特に Borel 総和可能性に関して考察する.

2.1 Splitting Lemma

本節では, (2.1) を $A(0)$ の特性根 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ に応じて分解することを考える. 正則行列 $P \in GL(n; \mathbb{C})$ による変換 $\varphi = P\tilde{\varphi}$ により $A(0)$ は Jordan 標準形としてよい. λ_j に関する Jordan 細胞を集めたものを $J(\lambda_j) \in M(n_j; \mathbb{C})$ とする. 簡単のため, まず $\ell = 2$ の場合を考える:

$$A(0) = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

以下, $\varphi = T(z)\psi$ ($T(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$) なる変換で, (2.1) を次の形に変換するものを構成する:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = B(z)\psi, \quad (2.2)$$

$$B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & 0 \\ 0 & B_2(z) \end{pmatrix}.$$

ただし, $B_j(z) \in M(n_j; \mathbb{C}\{z\}_k)$ ($j = 1, 2$) で $B_j(0) = J(\lambda_j)$ を満たすとする. ここで, (2.1) に $\varphi = T(z)\psi$ を代入すると ψ は

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} \psi = T^{-1} \left(-z^{k+1} \frac{d}{dz} T + AT \right) \psi$$

を満たすことがわかる. よって, (2.2) と比較して, $T(z)$, $B(z)$ を

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T = AT - TB \quad (2.3)$$

を満たすように構成すればよい.

最初に, $T(z), B(z) \in M(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ で (2.3) を満たすものが存在することを示す. まず, $T(z)$ は次の形であると仮定する:

$$T(z) = I_n + \begin{pmatrix} 0 & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし, I_n は n 次の単位行列とし, $T_{ij} \in M(n_i, n_j; z\mathbb{C}[[z]])$ とする. $A(0)$ の行列の分け方に合わせて, $A(z)$ を

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と表す. このとき, (2.3) の (1, 1) 成分を比較して

$$0 = A_{11} + A_{12}T_{21} - B_1 \quad (2.5)$$

が得られる. 次に (2, 1) 成分を比較して

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{21} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}B_1 \quad (2.6)$$

が得られる. よって, (2.5) を用いて (2.6) から B_1 を消去すると, T_{21} は次を満たすように構成すればよいことがわかる:

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{21} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}A_{11} - T_{21}A_{12}T_{21}. \quad (2.7)$$

B_2, T_{12} に関しても (2, 2) 成分, (1, 2) 成分を比較することにより同様の式が得られる.

以下 T_{21} の構成を考える. T_{21}, A_{ij} の z^p の係数を $T_{21}^{(p)}, A_{ij}^{(p)}$ とする:

$$T_{21} = \sum_{p=1}^{\infty} T_{21}^{(p)} z^p,$$

$$A_{ij} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{ij}^{(p)} z^p.$$

そして, (2.7) の z^p の係数を比較することにより次の式が得られる:

$$(p-k)T_{21}^{(p-k)} = A_{21}^{(p)} + \sum_{q=1}^p A_{22}^{(p-q)} T_{21}^{(q)} - \sum_{q=1}^p T_{21}^{(q)} A_{11}^{(p-q)} - \sum_{\substack{q_1+q_2+q_3=p \\ q_1, \dots, q_3 \geq 1}} T_{21}^{(q_1)} A_{12}^{(q_2)} T_{21}^{(q_3)}.$$

これを整理して

$$\begin{aligned} -A_{22}^{(0)} T_{21}^{(p)} + T_{21}^{(p)} A_{11}^{(0)} &= A_{21}^{(p)} + \sum_{q=1}^{p-1} A_{22}^{(p-q)} T_{21}^{(q)} - \sum_{q=1}^{p-1} T_{21}^{(q)} A_{11}^{(p-q)} \\ &\quad - \sum_{\substack{q_1+q_2+q_3=p \\ q_1, \dots, q_3 \geq 1}} T_{21}^{(q_1)} A_{12}^{(q_2)} T_{21}^{(q_3)} - (p-k)T_{21}^{(p-k)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで, (2.8) の右辺は $T_{21}^{(q)}$ ($1 \leq q \leq p-1$) のみで定まり, $T_{21}^{(p)}$ を含んでいない. また, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より, $-A_{22}^{(0)} \cdot + \cdot A_{11}^{(0)}$ は $M(n_2, n_1; \mathbb{C})$ 上の可逆な線形作用素 L となる. よって, (2.8) より帰納的に $T_{21}^{(p)}$ ($p \geq 1$) が定まることがわかる.

次に $T_{21} \in M(n_2, n_1; z\mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となることを示す. 行列 $P = (p_{ij}) \in M(p, q; \mathbb{C})$ に対し, そのノルム $|P|$ を

$$|P| = \sum_{i,j} |p_{ij}|$$

とする. まず, $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\})$ より, ある定数 $C_0 > 0$ が存在し $p \geq 0$ に対し

$$|A_{ij}^{(p)}| \leq C_0^{p+1}$$

が成立する. 以下, 帰納的に次を示す: ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $p \geq 1$ に対し

$$|T_{21}^{(p)}| \leq C^p \Gamma(p/k). \quad (2.9)$$

$p = 1$ のときは明らかなので, $1 \leq p \leq p_0 - 1$ に対し (2.9) が成立するとして $p = p_0$ のとき (2.9) が成立することを示す. $C > C_0$ とする. 例えば, (2.8) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \left| \sum_{q=1}^{p_0-1} A_{22}^{(p_0-q)} T_{21}^{(q)} \right| &\leq \sum_{q=1}^{p_0-1} C_0 C^{p_0} \left(\frac{C_0}{C} \right)^{p_0-q} \Gamma(\ell/k) \\ &\leq \frac{C_0}{C - C_0} C^{p_0} \Gamma\left(\frac{p_0 - 1}{k}\right) \end{aligned}$$

となる. また, (2.8) の右辺第 5 項は

$$\begin{aligned} \left| (p_0 - k) T_{21}^{(p_0-k)} \right| &\leq C^{p_0-k} (p_0 - k) \Gamma\left(\frac{p_0 - k}{k}\right) \\ &= k C^{p_0-k} \Gamma\left(\frac{p_0}{k}\right) \end{aligned}$$

となる. 他の項に関しても同様の評価が得られるが, L^{-1} も有界作用素であることから, $C > 0$ を十分大きく取れば任意の $p \geq 1$ に対し (2.9) が成立することがわかり, $T_{21} \in M(n_2, n_1; z \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となる.

次に $T_{21} \in M(n_2, n_1; z \mathbb{C}\{z\}_k)$ となることを示す. まず, $X := \widehat{\mathcal{B}}_k(T_{21})$, $\tilde{A}_{ij,B} := \widehat{\mathcal{B}}_k(A_{ij} - A_{ij}^{(0)})$ とすると, (1.9), (2.7) から $T_{21,B}$ は次を満たす:

$$-A_{22}^{(0)} X + X A_{11}^{(0)} + k \zeta^k X = k \zeta^k * X + \tilde{A}_{21,B} + \tilde{A}_{22,B} * X - X * \tilde{A}_{11,B} - X * \tilde{A}_{12,B} * X. \quad (2.10)$$

ここで, (2.10) の左辺の線形作用素 $-A_{22}^{(0)} \cdot + \cdot A_{11}^{(0)} + k \zeta^k \cdot$ を L_ζ とすると, $\bar{S} \cap \{\zeta \in \mathbb{C} \mid k \zeta^k = \lambda_2 - \lambda_1\} = \emptyset$ となる角領域 $S = S(d, \alpha)$ 上 L_ζ は可逆となる. ここで, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ を S で正則で, \bar{S} 上連続な関数 $f(\zeta)$ で

$$\|f\| := \sup_{\zeta \in \bar{S}} e^{-h|\zeta|^k} |f(\zeta)| < \infty$$

となる関数のなす空間とすると, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ は Banach 空間となる. $P(\zeta) = (p_{ij}(\zeta)) \in M(p, q; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ に対しても $\|P\|$ を $\|P\| = \|(\|p_{ij}\|)\|$ により定義する. まず次に注意する: ある定数 $C_0, h_0 > 0$ が存在し \bar{S} 上

$$|\tilde{A}_{ij,B}| \leq C_0 e^{h_0 |\zeta|^k} \quad (2.11)$$

が成立する. $h > h_0$ とすると, 例えば (2.10) の右辺第 3 項は $\tilde{A}_{22,B}(0) = 0$ より

$$|\tilde{A}_{22,B} * X| \leq \left| \int_0^t \frac{d\tilde{A}_{22,B}}{d\zeta} ((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \Big|_{t=\zeta^k} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_0 k^{-1} \int_0^{|t|} e^{h_0(|t|-\tilde{t})} (|t| - \tilde{t})^{1/k-1} \|X\| e^{h|\tilde{t}|} d\tilde{t} \Big|_{t=\zeta^k} \\
&\leq C_0 k^{-1} (h - h_0)^{-1/k} e^{h|t|} \|X\|.
\end{aligned}$$

ただし, (2.11) から $d\tilde{A}_{22,B}/d\zeta$ も (2.11) と同様の評価を満たすことを用いた. 同様に (2.10) の右辺第5項についても

$$|X * \tilde{A}_{12,B} * X| \leq C_0 k^{-2} (h - h_0)^{-1/k} e^{h|t|} \|X\|^2$$

が成立する. (2.10) の他の項についても同様の評価が成立する. よって,

$$F(X) = L_\zeta^{-1} (k\zeta^k * X + \tilde{A}_{21,B} + \tilde{A}_{22,B} * X - X * \tilde{A}_{11,B} - X * \tilde{A}_{12,B} * X)$$

とすると, L_ζ^{-1} は $M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ 上の有界な線形作用素となるので, $h, M > 0$ を十分大きく取ると, F は

$$\mathcal{B}_M := \{X \in M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S})) \mid \|X\| \leq M\}$$

上の縮小写像となる. よって, Banach の不動点定理から (2.10) を満たす $X \in M(n_2, n_1; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ が存在し, これが $\hat{\mathcal{B}}_k(T_{21})$ の解析接続を与える. 以上から T_{21}, B_1 の各成分は $d = (\arg(\lambda_2 - \lambda_1) + 2\pi\mathbb{Z})/k$ の方向を除いて k -summable となることがわかる. 同様に T_{12}, B_2 の各成分は $d = (\arg(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\pi\mathbb{Z})/k$ の方向を除いて k -summable となることがわかる.

同様の議論により, 一般に次が成立することが示される: $A^{(0)}$ の特性根を $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ とし,

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_\ell) \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $B_j(z) \in M(n_j; \mathbb{C}\{z\}_k)$, $T_{ij}(z) \in M(n_i, n_j; z\mathbb{C}\{z\}_k)$ で $B_j^{(0)} = J(\lambda_j)$ となるものが存在し,

$$B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & & & \\ & B_2(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell(z) \end{pmatrix}$$

$$T(z) = I_n + \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & \cdots & \cdots & T_{1\ell} \\ T_{21} & 0 & T_{23} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & T_{(\ell-1)\ell} \\ T_{\ell 1} & \cdots & \cdots & T_{\ell(\ell-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $\varphi = T(z)\psi$ により (2.1) は (2.2) に変換される. また, X_{ij}, B_j は

$$\bigcup_{p \neq j} \left\{ \frac{1}{k} \arg(\lambda_p - \lambda_j) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k} \right\}$$

の方向を除いて k -summable となる.

実際, (2.3) から A_{ij}, B_j, T_{ij} は

$$B_j = A_{jj} + \sum_{p \neq j} A_{jp} T_{pj},$$

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} T_{ij} = \sum_p A_{ip} T_{pj} - T_{ij} B_j$$

を満たすが, T_{ij} に対し $\ell = 2$ の場合の L に対応する作用素が $-J(\lambda_i) \cdot \cdots \cdot J(\lambda_j)$ で与えられることから明らかであろう.

注 2.1. 一般に次が示される: $X = (X_1, \dots, X_n), F(z, X) = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbb{C}^n\{z, X\}$ とする. $F(z, X)$ は

$$F(0, 0) = 0$$

を満たし,

$$J = (\partial_{X_i} F_j(0, 0))$$

としたとき J は正則とする. このとき,

$$z^{k+1} \frac{d}{dz} X = F(z, X)$$

の形式冪級数解 $X(z) \in \mathbb{C}^n[[z]]$ が一意的に存在し $X(z) \in \mathbb{C}^n\{z\}_k$ となる. 更に, J の固有値を λ_j ($1 \leq j \leq n$) とすると, 各 X_j は

$$\bigcup_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \arg(\lambda_j) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k} \right\}$$

の方向を除いて k -summable となる.

2.2 有理型微分方程式への変換

前節の結果を踏まえ, 本節では $A(z) \in M(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$ で $A^{(0)} = J(\lambda)$ となる微分方程式 (2.1) を考える. また, 変換

$$\varphi = e^{-\lambda k^{-1} z^{-k}} \tilde{\varphi}$$

を考えることにより $\lambda = 0$ とできる. 以下, 変換 $\varphi = T(z)\psi$ ($T(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}\{z\}_k)$) により (2.1) を (2.2) で, 十分大きな $M, N > 0$ に対し

$$B(z) = \sum_{p=0}^{N+M} B^{(p)} z^p,$$

$$B^{(p)} = A^{(p)} \quad (0 \leq p \leq N-1)$$

とした有理型微分方程式へと変換することを考える. $T(z)$ は次の形とする:

$$T(z) = I_n + \sum_{p=N}^{\infty} T^{(p)} z^p.$$

まず, このような変換 $T(z)$ で $T(z) \in \text{GL}(n; \mathbb{C}[[z]]_{1/k})$ となるものが存在することを示す. $X := \tilde{\mathcal{B}}_k(T - I_n)$, $\tilde{A}_B := \tilde{\mathcal{B}}_k(A - A^{(0)})$, $\tilde{B}_B := \tilde{\mathcal{B}}_k(B - B^{(0)})$ とすると (2.3) から次の式が成立する:

$$-A^{(0)}X + XA^{(0)} + k\zeta^k X = k\zeta^k * X + \tilde{A}_B - \tilde{B}_B + \tilde{A}_B * X - X * \tilde{B}_B. \quad (2.12)$$

ここで, $M(n; \mathbb{C})$ 上の線形作用素 $-A^{(0)} \cdot + \cdot A^{(0)}$ を L , $-A^{(0)} \cdot + \cdot A^{(0)} + k\zeta^k \cdot$ を L_ζ とし, $\det(\lambda - L) = \lambda^\mu f(\lambda)$ ($f(0) \neq 0$) とすると, $\zeta^{-k\mu} L_\zeta$ は $\zeta = 0$ の近傍 $D_\rho := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq \rho\}$ 上で可逆となる. また, \tilde{A}_B の各成分は D_ρ 上正則とする. ここで, \mathcal{B}_1 を D_ρ の内部で正則で, D_ρ 上連続な関数を係数に持つ n 次正方行列 $X(\zeta) = (x_{ij}(\zeta))$ で

$$\|X\|_1 := \sup_{D_\rho} \sum_{i,j} |\zeta^{-N} x_{ij}(\zeta)| < \infty$$

となるもののなす空間, \mathcal{B}_2 を

$$\bigoplus_{p=N}^{N+M} M(n; \mathbb{C}) \zeta^p$$

とし, $Y(\zeta) = (y_{ij}(\zeta)) \in \mathcal{B}_2$ に対し, そのノルムを

$$\|Y\|_2 := \sup_{D_\rho} \sum_{i,j} |\zeta^{-N} y_{ij}(\zeta)|$$

とすると, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ は Banach 空間となる. ここで,

$$\text{tr} A(z) = \sum_{p=0}^{N-1} A^{(p)} z^p$$

とし, $\text{tr} \tilde{A}_B := \widehat{\mathcal{B}}_k(\text{tr} A - A^{(0)})$ とすると, $\tilde{B}_B - \text{tr} \tilde{A}_B \in \mathcal{B}_2$ となる. このとき, $(X, Y) \in \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ に対し,

$$F_1(X, Y) = L_\zeta^{-1}(G(X, Y) - F_2(X, Y)),$$

$$F_2(X, Y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tilde{\zeta}|=\rho} G(X, Y)(\tilde{\zeta}) K_{N,M}(\zeta/\tilde{\zeta}) \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}$$

とする. ただし,

$$G(X, Y)(\zeta) = k\zeta^k * X + \tilde{A}_B - \text{tr} \tilde{A}_B + \tilde{A}_B * X - X * \text{tr} \tilde{A}_B - X * Y,$$

$$K_{N,M}(t) = t^N \frac{1 - t^{M+1}}{1 - t}$$

とする. まず, 留数定理から $F_2(X, Y) \in \mathcal{B}_2$ となることがわかる. また, $G(X, Y)$ の定義から $G(X, Y)$ は ζ^N で割り切れることがわかるが, $F_2(X, Y)$ の構成から, 更に $G(X, Y) - F_2(X, Y)$ は ζ^{N+M+1} で割り切れることがわかる. よって, M を $M \geq k\mu - 1$ とすれば $F_1(X, Y) \in \mathcal{B}_1$ となる.

以下, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, $F = (F_1, F_2)$ としたとき, 十分大きな $N, C > 0$ に対し F は

$$\mathcal{B}_C := \{(X, Y) \in \mathcal{B} \mid \|X\|_1 + \|Y\|_2 \leq C\}$$

上の縮小写像となることを示す. まず, ある $C_0 > 0$ に対し

$$\sup_{D_\rho} \left| \frac{d\tilde{A}_B}{d\zeta} \right| < C_0$$

とする. このとき, 次の評価が成立する:

$$|\tilde{A}_B * X| \leq \left| \int_0^t \frac{d\tilde{A}_B}{d\zeta} ((t - \tilde{t})^{1/k}) \frac{1}{k} (t - \tilde{t})^{1/k-1} X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right|_{t=\zeta^k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_0 k^{-1} \|X\|_1 \int_0^{|\zeta|} (|t| - |\tilde{t}|)^{1/k-1} |\tilde{t}|^{N/k} d|\tilde{t}| \Big|_{t=\zeta^k} \\
&\leq C_0 k^{-1} \|X\|_1 |\zeta|^{N+1} B(1/k, 1 + N/k).
\end{aligned}$$

$k\zeta^k * X$, $X * {}^{\text{tr}}\tilde{A}_B$ についても同様の評価が成立する. また, $X * Y$ に関しては

$$|X * Y| \leq k^{-1} \|X\|_1 \|Y\|_2 |\zeta|^{2N} B(N/k, 1 + N/k)$$

が成立する. ここで, $B(1/k, 1 + N/k) \rightarrow 0$, $B(N/k, 1 + N/k) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) に注意すると, $|\zeta| = \rho$ 上での評価を考えることにより, 最大値の原理から $N, C > 0$ を十分大きく取れば F は \mathcal{B}_C 上の縮小写像となることがわかる. よって, Banach の不動点定理より, 目標であった $T(z)$, 及び $B(z)$ の存在がわかる.

次に, $T(z)$ は $A(z)$ と同じ方向で k -summable となることを示す. $A(z)$ は d 方向で k -summable とする. このとき, $0 < \tilde{\rho} < \rho$ に対し $\zeta_0 = \tilde{\rho} e^{id}$ とし,

$$S := \zeta_0 + S(d, \varepsilon)$$

とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, \tilde{A}_B は \bar{S} 上正則で, ある定数 $C_0, h_0 > 0$ に対し次の評価を満たす:

$$|\tilde{A}_B| \leq C_0 e^{h_0 |\zeta|^k}. \quad (2.13)$$

\tilde{B}_B も \bar{S} 上 (2.13) と同様の評価を満たす. ここで, $\text{Exp}_k^h(\bar{S})$ を前節と同様に定義し, $X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ に対し

$$F(X) = L_\zeta^{-1} \left(\tilde{A}_B - \tilde{B}_B + R + \left(\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t K(t - \tilde{t}) X(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right) \Big|_{t=\zeta^k, t_0=\zeta_0^k} \right) \quad (2.14)$$

とする. ただし,

$$\begin{aligned}
K(t) \cdot &= tI_n \cdot + \tilde{A}_B(t^{1/k}) \cdot - \cdot \tilde{B}_B(t^{1/k}), \\
R(\zeta) &= \left(\frac{d}{dt} \int_0^{t_0} K(t - \tilde{t}) \tilde{T}_B(\tilde{t}^{1/k}) d\tilde{t} \right) \Big|_{t=\zeta^k, t_0=\zeta_0^k}
\end{aligned}$$

とし, $\tilde{T}_B = \hat{\mathcal{B}}_k(T - I_n)$, $\tilde{B}_B := \hat{\mathcal{B}}_k(B - B^{(0)})$ は, 上で構成した $T(z)$, $B(z)$ により定める. ここで, L_ζ^{-1} は $M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ 上の有界な線形作用素となるが, 前節と同様の議論により $h, C > 0$ を十分大きく取れば, F は $\{X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S})) \mid \|X\| \leq C\}$ 上の縮小写像となる. よって, Banach の不動点定理から $F(X) = X$ を満たす $X \in M(n; \text{Exp}_k^h(\bar{S}))$ が存在し, この X が \tilde{T}_B の S への解析接続を与える. 以上から, $T(z)$ は $A(z)$ と同じ方向で k -summable となることがわかる.

2.3 確定特異点型方程式への変換

本節では 2.1 節, 2.2 節の結果を踏まえ, (2.1) を summable な級数を用いて, 帰納的に確定特異点型方程式へと変換することを考える. 本節では $A(z) \in M(n; \mathbb{C}[z])$ で

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} J(0; n_1) & & & \\ & J(0; n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0; n_\ell) \end{pmatrix}$$

となる (2.1) に対し

- i) 方程式の不確定度 k ,
- ii) 方程式の階数 n

のどちらか一方が下がった場合に帰着させることを考える. ここで, $J(0; n_j) \in M(n_j; \mathbb{C})$ は固有値 0 に対する n_j 次の Jordan 細胞とする. これにより, (2.1) は帰納的に $k = 0$, あるいは $n = 1$ の場合へと変換されるが, $n = 1$ の場合は明らかであろう.

最初に $\ell = 1$ の場合を考える. $n \geq 2$ とする. まず, $T(z) = I_n + \tilde{T}(z)$,

$$\tilde{T}(z) = \sum_{p=1}^N T^{(p)} z^p$$

による変換 $\psi = T(z)\varphi$ により, 任意の $N > 0$ に対し (2.1) を (2.2) で

$$B(z) = J(0; n) + \sum_{p=1}^N B^{(p)} z^p + \tilde{B}(z), \quad (2.15)$$

$$B^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{n1}^{(p)} & \cdots & b_{nn}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$\tilde{B}(z) \in M(n; z^{N+1} \mathbb{C}[z])$ としたものと変換することを考える. (2.3) の z^p の係数を比較することにより, T, B を次を満たすように構成すればよい:

$$J(0; n)T^{(p)} - T^{(p)}J(0; n) = B^{(p)} - A^{(p)} + R^{(p)}. \quad (2.17)$$

ただし, $R^{(p)}$ は $A^{(q)}, T^{(q)}, B^{(q)}$ ($1 \leq q \leq p-1$) により定まる項とする. ここで, $T^{(p)} = (t_{ij}^{(p)})$ とすると

$$J(0; n)T^{(p)} - T^{(p)}J(0; n) = \begin{pmatrix} t_{21}^{(p)} & t_{22}^{(p)} & \cdots & t_{2n}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^{(p)} & t_{n2}^{(p)} & \cdots & t_{nn}^{(p)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t_{11}^{(p)} & \cdots & t_{1(n-1)}^{(p)} \\ 0 & t_{21}^{(p)} & \cdots & t_{2(n-1)}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_{n1}^{(p)} & \cdots & t_{n(n-1)}^{(p)} \end{pmatrix}$$

となる. よって, $T^{(p)}$, 及び, (2.16) の形の $B^{(p)}$ で, (2.17) を満たすものが存在することがわかる. 特に $t_{1j}^{(p)} = 0$ ($1 \leq j \leq n$) となる $T(z)$ は一意的に定まる. 以後, $B(z)$ は (2.15) の形とする. $\text{tr} B(z) = B(z) - \tilde{B}(z)$ とし,

$$b_j(z) = \sum_{p=1}^N b_{nj}^{(p)} z^p \quad (1 \leq j \leq n)$$

とする. ここで,

$$P(z, \zeta) = \det(\zeta - \text{tr} B(z)) = \zeta^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} b_{j+1}(z) \zeta^j$$

とすると

$$\det(\zeta - B(z)) = P(z, \zeta) \text{ mod } z^{N+1} \mathbb{C}[z, \zeta].$$

このとき, $P(z, \zeta)$ の Newton polygon は負の傾きを持つ面のみを持つが, 傾きの最も大きな面 F の傾きを $-r \in \mathbb{Q}$ とし, $\zeta = z^r \tilde{\zeta}$ とすると,

$$\tilde{P}(z, \tilde{\zeta}) = z^{-nr} P(z, z^{-r} \tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta}^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-z^{-r})^{n-j} b_{j+1}(z) \tilde{\zeta}^j$$

となる. ここで, F の端点に対応する項を ζ^n , 及び $(-1)^{n-j_0} b_{j_0+1}(z) \zeta^{j_0}$ とし, $b_{j_0+1}(z)$ の $z=0$ での零点の位数を v_0 とすると,

$$r = \frac{v_0}{n - j_0} \quad (2.18)$$

となる. $r = p_0/q_0$ (p_0, q_0 は互いに素) と表す. r の取り方から $\tilde{P}(z, \tilde{\zeta})$ の Newton polygon は傾きが0の面 \tilde{F} を一つ持ち, それ以外の面の傾きは全て負と

なる. このとき, 次の $S_r(z)$ による, Shearing 変換と呼ばれる変換 $\psi = S_r(z)\tilde{\psi}$ を考える:

$$S_r(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z^r & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{r(n-1)} \end{pmatrix}.$$

すると, この Shearing 変換により (2.2) は次の方程式へと変換される:

$$z^{k-r+1} \frac{d}{dz} \tilde{\psi} = C(z)\tilde{\psi}, \quad (2.19)$$

$$C(z) = J(0; n) + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{b}_1(z) & \cdots & \tilde{b}_n(z) \end{pmatrix} - z^{k-r} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & r & & \\ & & \ddots & \\ & & & r(n-1) \end{pmatrix} + \tilde{C}(z).$$

ただし, $\tilde{b}_j(z) = z^{-r(n-j+1)}b_j(z)$ ($1 \leq j \leq n$) とし, $\tilde{C}(z) \in z^{N-rn+1}\mathbf{M}(n; \mathbb{C}[z^{1/q_0}])$ とする. $k-r \leq 0$ の場合は既に (2.19) は確定特異点型なので, $k-r > 0$ とする. このとき, r の取り方から $C(z) \in \mathbf{M}(n; \mathbb{C}[z^{1/q_0}])$ となり, $\tilde{b}_{j_0+1}(0) \neq 0$, $\tilde{b}_{j+1}(0) = 0$ ($1 \leq j \leq j_0-1$) となるので, $N-rn+1 > 0$ となるように N を十分大きく取れば, $C(0)$ は 0 以外の固有値を持つことがわかる. $C(0)$ が複数の相異なる固有値を持てば, 2.1 節, 2.2 節の議論から方程式の階数 n が下がった場合に帰着される. また, $C(0)$ が固有値を一つだけ持つ場合には $\tilde{P}(0, \zeta) = 0$ は n 重根を持つが, このとき $\tilde{b}_j(0) \neq 0$ ($1 \leq j \leq n$) となり, $P(z, \zeta)$ の Newton polygon の面は F のみで, $(j-1, r(n-j+1)) \in \mathbb{Z}^2$ となる. よって, $r \in \mathbb{Z}$ となり不確定度 k が下がった場合に帰着される.

注 2.2. 上記の Shearing 変換で分岐が起きるのは方程式の階数 n が下がった場合に帰着される場合のみである. また, このときの分岐指数 q_0 は, (2.18) から $q_0 \leq n$ となる.

次に $\ell = 2$ の場合を考える. $A(z)$ は $A(0)$ の行列の分け方に合わせて (2.4) のように分割されているとする. まず, 十分大きな N に対し $A_{21}(z) \in z^N\mathbf{M}(n_2, n_1; \mathbb{C}[z])$ となる場合を考える. このとき, (2.1) で $A = A_{11}$ としたものに対し $\ell = 1$ の場合に上で構成した変換 $T(z)$, $S_r(z)$ を $T_1(z)$, $S_{r_1}(z)$ とし, $A = A_{22}$ としたものに対しても同様に $T_2(z)$, $S_{r_2}(z)$ とし,

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_1(z)S_{r_1}(z) & 0 \\ 0 & z^{r_1(n_1-1)}T_2(z)S_{r_2}(z) \end{pmatrix}$$

による変換を考えれば, $N - r_1 n_1 - r_2 n_2 > 0$ となるとき, $\ell = 1$ のときの議論から, n あるいは k が下がった場合に帰着される. 次に, このような N が十分大きく取れない場合を考える. $n_1 \geq n_2$ とし, $A_{21}^{(N)} \neq 0$ ($N \geq 1$) とする. このとき,

$$T(z) = I_n + z^N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (T_{21} \in M(n_2, n_1; \mathbb{C}))$$

による変換 $\varphi = T(z)\psi$ により (2.1) を (2.2) で

$$\begin{aligned} B(z) &= \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix}, \\ B_{jj}^{(0)} &= J(0; n_j) \quad (j = 1, 2), \\ B_{21}(z) &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z^N \bmod z^{N+1} M(n_2, n_1; \mathbb{C}[z]) \end{aligned} \quad (2.20)$$

としたものへと変換することを考える. このためには, (2.3) の z^N の係数を比較することにより, 次を満たす $T_{21}^{(N)}, B_{21}^{(N)} \in M(n_2, n_1; \mathbb{C})$ で, (2.20) の形のものが存在することを示せばよい:

$$J(0; n_2) T_{21}^N - T_{21}^{(N)} J(0; n_1) = B_{21}^{(N)} - A_{21}^{(N)}. \quad (2.21)$$

(2.17) の場合と同様に, このような $T_{21}^{(N)}, B_{21}^{(N)}$ の存在がわかる. $B_{21}^{(N)} = 0$ の場合は N を $N + 1$ として以上の議論を繰り返す. $B_{21}^{(N)} \neq 0$ の場合は, 次の $S(z)$ による Shearing 変換 $\psi = S(z)\tilde{\psi}$ を考える:

$$S(z) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & z^N I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

すると, (2.2) は

$$\begin{aligned} z^{k+1} \frac{d}{dz} \tilde{\psi} &= C(z) \tilde{\psi}, \\ C^{(0)} &= \begin{pmatrix} J(0; n_1) & 0 \\ B_{21}^{(N)} & J(0; n_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なる方程式へと変換される. ここで, $C^{(0)}$ は冪零行列であるが, $(C^{(0)})^j$ ($j \geq 1$) の階数を調べることにより, $c_m \neq 0, c_j = 0$ ($m + 1 \leq j \leq n_2$) となるとき, $C^{(0)}$ の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} J(0; n_1 + m) & 0 \\ 0 & J(0; n_2 - m) \end{pmatrix}$$

となることがわかる. ここで, $n_1 \geq n_2$, $m \geq 1$ より, この操作を繰り返せば $\ell = 1$ の場合, 或は N が十分大きく取れる場合に帰着され, その結果, k または n が下がった場合に帰着される. $\ell \geq 3$ の場合も同様にして k または n が下がった場合に帰着される.

最後に, 確定特異点型方程式に関してだが, よく知られているように, ある $M_0 \in M(n; \mathbb{C})$, $T(z) \in GL(n; \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}])$ が存在し (2.1) で $k = 0$ としたものは $\varphi = T(z)\psi$ により

$$z \frac{d}{dz} \psi = M_0 \psi$$

へと変換される. 特に M_0 は Jordan 標準形で, その固有値の実部が $[0, 1)$ に入るように取ることができる.

2.4 分解定理

以上の議論の結論として, 本節では不確定特異点における方程式の分解定理を与える. まず, $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^{\ell} \subset \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}]/\mathbb{C}\{\zeta\}$ に対し, 以下のようにグラフ G を定める: $L_k = \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}]/\zeta^{-k+1}\mathbb{C}\{\zeta\}$ とし,

$$\rho_k : L_k \rightarrow L_{k+1}$$

を自然な射影とする. このとき,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\lambda_i(\zeta) \bmod \zeta^{-k} \mathbb{C}\{\zeta\}\}_{i=1}^{\ell} \left(\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \right)$$

を node, ρ_k により定まる射を edge, $\{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^{\ell}$ を leaf とする樹形状の有向グラフ \tilde{G} が得られる. また, L_k の node を level k の node と呼ぶ. 更に, \tilde{G} の edge で, 終点が次数 2 の node となるものの始点をつぶして得られるグラフを G とする. ここで,

$$\lambda_i(\zeta) = \sum_k \lambda_i^{(k)} \zeta^{-k} \bmod \mathbb{C}\{\zeta\}$$

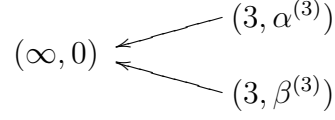
としたとき, G の $\lambda_i(\zeta)$ により定まる level k の node に $(k, \lambda_i^{(k)})$ を対応させた図式 G_{Λ} を考える.

例 2.1. $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^2$ を

$$\lambda_1(\zeta) = \alpha^{(3)} \zeta^{-3} + \alpha^{(2)} \zeta^{-2} + \alpha^{(1)} \zeta^{-1}$$

$$\lambda_2(\zeta) = \beta^{(3)} \zeta^{-3} + \beta^{(2)} \zeta^{-2} + \beta^{(1)} \zeta^{-1}$$

とすると, G_Λ は



例 2.2. $\Lambda := \{\lambda_i(\zeta)\}_{i=1}^4$ を

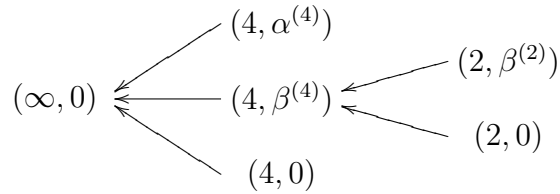
$$\lambda_1(\zeta) = \alpha^{(4)}\zeta^{-4} + \alpha^{(3)}\zeta^{-3} + \alpha^{(2)}\zeta^{-2} + \alpha^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_2(\zeta) = \beta^{(4)}\zeta^{-4} + \beta^{(2)}\zeta^{-2} + \beta_1^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_3(\zeta) = \beta^{(4)}\zeta^{-4} + \beta_2^{(1)}\zeta^{-1}$$

$$\lambda_4(\zeta) = \gamma^{(3)}\zeta^{-3} + \gamma^{(2)}\zeta^{-2} + \gamma^{(1)}\zeta^{-1}$$

とすると, G_Λ は



このとき, 次が得られる: ある正整数 q が存在し, $\zeta = z^{1/q}$ とすると, $\Lambda = \{\lambda_j(\zeta)\}_{j=1}^\ell \subset \zeta^{-1}\mathbb{C}[\zeta^{-1}]$, $T(\zeta) \in \text{GL}(n; (\mathbb{C}[[\zeta]]_{1/kq})[\zeta^{-1}])$, $M_j \in \text{M}(n_j; \mathbb{C})$ ($j = 1, \dots, \ell$) が存在し, (2.1) は座標変換 $\zeta = z^{1/q}$ と変換 $\varphi = T(\zeta)\psi$ により次の形へと分解される:

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \psi = \begin{pmatrix} B_1(\zeta) & & & \\ & B_2(\zeta) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell(\zeta) \end{pmatrix} \psi,$$

$$B_j(\zeta) = \lambda_j(\zeta)I_{n_j} + M_j.$$

ただし, M_j は Jordan 標準形で, その固有値の実部は $[0, 1)$ に入るとする. これを福原-Levelt-Turrittin の標準形と呼ぶ. 更に, $T(\zeta)$ は次のような分解を持つ:

$$T(\zeta) = T^{(m)}(\zeta)T^{(m-1)}(\zeta) \cdots T^{(1)}(\zeta)T^{(0)}(\zeta),$$

$$T^{(i)}(\zeta) = \begin{pmatrix} T_1^{(i)}(\zeta) & & & \\ & T_2^{(i)}(\zeta) & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{\ell^{(i+1)}}^{(i)}(\zeta) \end{pmatrix},$$

$$T_j^{(i)}(\zeta) \in \mathrm{GL}(n_j^{(i+1)}; \mathbb{C}\{\zeta\}_{k_i}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \ell^{(i+1)}),$$

$$T_j^{(0)}(\zeta) \in \mathrm{GL}(n_j^{(1)}; \mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}]) \quad (1 \leq j \leq \ell^{(1)}).$$

ただし, $\{k_i\}_{i=1}^{m+1}$ ($k_{i+1} > k_i$, $k_{m+1} = \infty$) は G_Λ の node の level のなす集合とし, $\{n_j^{(i)}\}_{j=1}^{\ell^{(i)}}$ は G_Λ の定める level k_i の n の分割, つまり,

$$\Lambda \bmod \zeta^{-k_i+1} \mathbb{C}\{\zeta\} = \{\tilde{\lambda}_j^{(i)}(\zeta)\}_{j=1}^{\ell^{(i)}}$$

としたとき, $n_j^{(i)}$ は $\lambda_{j_1}^{(i)}(\zeta) \bmod \zeta^{-k_i+1} \mathbb{C}\{\zeta\} = \tilde{\lambda}_j^{(i)}(\zeta)$ となる j_1 に関し n_{j_1} を足し合わせたものとする. また, G_Λ に $\tilde{\lambda}_j^{(i+1)}(\zeta)$ を終点, 或は edge 上の点として持つような edge の始点となる level k_i の node が無い場合には $T_j^{(i)}(\zeta) = I_{n_j^{(i+1)}}$

とする. また, このような node の係数の集合を $\{\lambda_{j, j_1}^{(k_i)}\}_{j_1=1}^{\ell_j^{(i)}}$ とすると, $T_j^{(i)}(\zeta)$ の各成分は

$$\mathrm{Sing}_{k_i} := \bigcup_{j_1 \neq j_2} \left\{ \frac{1}{k_i} \arg(\lambda_{j, j_1}^{(k_i)} - \lambda_{j, j_2}^{(k_i)}) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k_i} \right\}$$

の方向を除いて k_i -summable となる. 特に, $A(0)$ が Jordan 標準形で, 異なる固有値を持つ場合, $\{n_{j, j_1}^{(i)}\}_{j_1=1}^{\ell_j^{(i)}}$ を G_Λ の定める level k_i の $n_j^{(i+1)}$ の分割とし, $T_j^{(i)}(\zeta)$ をこの分解に合わせて $T_{j, j_1 j_2}^{(i)}(\zeta) \in \mathrm{M}(n_{j, j_1}^{(i)}, n_{j, j_2}^{(i)}; \mathbb{C}\{\zeta\}_{k_i})$ により

$$T_j^{(i)}(\zeta) = \begin{pmatrix} T_{j, 11}^{(i)}(\zeta) & \cdots & T_{j, 1\ell_j^{(i)}}^{(i)}(\zeta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{j, \ell_j^{(i)}1}^{(i)}(\zeta) & \cdots & T_{j, \ell_j^{(i)}\ell_j^{(i)}}^{(i)}(\zeta) \end{pmatrix},$$

と分割すると, $T_{j, j_1 j_2}^{(i)}(\zeta)$ は

$$\bigcup_{p \neq j_2} \left\{ \frac{1}{k_i} \arg(\lambda_{j, p}^{(k_i)} - \lambda_{j, j_2}^{(k_i)}) + \frac{2\pi \mathbb{Z}}{k_i} \right\}$$

の方向を除いて k_i -summable とできる.

注 2.3. 注 2.2 から $q \leq n!$ と取れることがわかる.

注 2.4. 福原-Levelt-Turrittin の標準形は $\lambda_j(\zeta)$, M_j の Jordan 細胞の並べ替えを除いて一意である. 実際, 二つの変換 $T(\zeta)$, $\tilde{T}(\zeta)$ により二つの標準形が得られたとする. これらの方程式の係数を, それぞれ $B(\zeta)$, $\tilde{B}(\zeta)$ とすると, $S(\zeta) := T^{-1}(\zeta)\tilde{T}(\zeta)$ は次を満たす:

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} S = BS - S\tilde{B}. \quad (2.22)$$

よって, $S(\zeta) \in \mathrm{GL}(n; (\mathbb{C}[[\zeta]])_{1/kq}[\zeta^{-1}])$ となる (2.22) の解の存在条件から福原-Levelt-Turrittin の標準形の一意性が導かれる. また, このような S は定数行列に限られることもわかる.

以上から, $\vec{d} = (d_m, \dots, d_1)$, $d_i \notin \mathrm{Sing}_{k_i}$ に対し, $T^{(i)}(\zeta)$ の Borel 和 $\mathcal{S}_{k_i, d_i}(T^{(i)})$ を取ることにより, 確定特異点型方程式

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} \psi = M_j \psi$$

の解の基底 ζ^{M_j} を用いて (2.1) の \vec{d} 方向での解の基底

$$\mathcal{S}_{k_m, d_m}(T^{(m)}) \cdots \mathcal{S}_{k_1, d_1}(T^{(1)}) T^{(0)} \begin{pmatrix} \zeta^{M_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta^{M_\ell} \end{pmatrix}$$

が得られる.

注 2.5. 方程式の分解を用いずに直接形式解の多重総和可能性を示すこともできる ([Br1]). また, 非線形常微分方程式の形式解に関する多重総和可能性も知られている. [Br2] では Acceleration 作用素を用いて, [RS] では多重総和可能な級数の Cohomological な定式化を用いて証明が与えられている.

注 2.6. 多変数の漸近解析に関しては [Ma] が基本的である. また, 最近の進展に関しては [Mo], [Sa1], [Sa2] 等を参照.

References

[Ba1] W. Balser: From divergent power series to analytic functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1582, Springer-Verlag, 1994.

- [Ba2] ———: Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Springer, New York, 2000.
- [BJL] W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz: Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations, *J. Math. Analysis Applic.* **71** (1979), 48–94.
- [Br1] B. L. J. Braaksma: Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations, *J. Diff. Eq.* **92** (1991), 45–75.
- [Br2] ———: Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **42** (1992), 517–540.
- [GR] H. Grauert and R. Remmert: Coherent analytic Sheaves, Springer-Verlag, 1984.
- [H] Y. Haraoka: Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables, *Funkcial. Ekvac.* **32** (1989), 365–388.
- [Ma] H. Majima: Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1075, Springer-Verlag, 1984.
- [MR] B. Malgrange and J. -P. Ramis: Fonctions multisommables, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **42** (1992), 353–368.
- [Mo] T. Mochizuki: The Stokes structure of a good meromorphic flat bundle, *J. Inst. Math. Jussieu* **10**(3) (2011), 675–712.
- [Ra1] J. -P. Ramis: Dévissage Gevrey, *Astérisque* **59-60** (1978), 173–204.
- [Ra2] ———: Les séries k -sommable et leurs applications, *Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings “Les Houches” 1979*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 126, Springer (1980), 178–199.
- [RS] J. -P. Ramis and Y. Sibuya: A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **44** (1994), 811–848.

- [Ro] P. Robba: Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentielles; applications à la réduction formelle des équations différentielles, Enseign. Math. **26** (1980), 279–311.
- [Sa1] C. Sabbah: Introduction to Stokes structures, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2060, Springer-Verlag, 2013.
- [Sa2] _____: Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2, Astérisque **263** (2000).
- [Si] Y. Sibuya: Linear differential equations in the complex domain: Problems of analytic continuation, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 82, American Mathematical Society, Providence, 1974.
- [Z] M. -A. Zurro: On the rings of formal solutions of polynomial differential equations, Banach Center Publications, **44** (1998), 277–292.

超幾何微分方程式の rigidity による大域解析

原岡喜重 述
近内翔太郎 記

2014.9.1-2014.9.2

熊本大学の原岡です。私は Fuchs 型方程式について今日と明日お話ししようと思います。元々、どうしてそのようなことを考えるのかということの説明するのは大事だと思いますし、説明したいのですが、準備していたら話す量が膨大になってしまったので、大事だけれどそうゆうところは省略して、ぐいぐいといこうと思います。気になるという人は随時ブレイクして何でそのようなことを考えるのか、ということについて聞いてくれると嬉しいです。

1 Introduction

予備知識はこちらで適当に想定したものに基づいて喋りますので分からないところがあればその都度聞いてください。例えば、超幾何微分方程式はこのような

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

y を未知関数とする 2 階の線型微分方程式です。このように書いたとき $p(x), q(x)$ が係数で、これから考える場合は大抵有理関数だけど、この極のことを特異点と呼びます。特異点ではこの $p(x)$ とか $q(x)$ とかが発散するから、解について変なことが起こるわけです。そういうところは嫌だな、と思うかもしれないけど、そういうところの方が却って情報が集積していて調べやすいことがあります。のっぺりした普通のところだと様子が捕まえにくいんだけど、人間でも危機的状況になるとその人の性格が現れたりするのと同じで、特異点を調べるというのは実は調べやすいことになっている。それで、特異点の近くで調べることを局所解析と言います。

Fuchs 型というのは、特異点が確定特異点であるような微分方程式で、その確定特異点のまわりでどんなことが起きているかということについては 19 世紀の間に理論が完成してもう完全に分かっています。

それで、特異点がいくつかあると、それぞれの近くでは解の様子が分かるけれど、離れた特異点同士の間、つまりある特異点の近くで解があったとき、それを別の特異点に解析接続して、その近くでどんな風になっているか、ということ調べるのを大域解析と言います。この特異点の間の関係を調べる大域解析、これはまだ、一般には Fuchs 型

微分方程式の場合であってもこうやれば分かるという話は全然できていなくて、我々はその解析方法を持っていないわけです。

ですが、Gauss の超幾何微分方程式のような Fuchs 型微分方程式の全体を見ると、この中に rigid と呼ばれる非常に特別なクラスがあって、ここに属する微分方程式については、雑に言うとも何でも分かる。難しいといわれる大域解析もできるということになっています。それ以外にも、rigid ではない方程式でも特別な事情があって大域的な様子が分かる方程式が散在的にあるわけですけど、すごく分かるクラスとほとんど絶望的に分からないクラスという風に、かっちりと分かれているというのがしばらく前までの状況でした。

この rigid というのは、別の言い方をするとアクセサリー・パラメーターを持たない微分方程式と呼ばれるもので、大久保謙二郎先生（残念ながら今年の7月に亡くなられました）が、1970年代ぐらいにこういう風に方程式を見るのが大事ということに気づいて、調べるための色々なアイデアを出され、非常に先駆的なことをやられました。ですから、実は大久保先生の作られた話で大分できるということが今では分かるのですが、とにかく大久保先生の話はあったけど、当時はこういう状況でしかなかったわけです。

ところが、1996年に Nicholas Katz という人が“Rigid local systems”という本を出して [6]、Fuchs 型方程式についての理論を作りました。その結果、Katz の後に Crawley-Boevey [1] や大島先生 [7] が色々な仕事を Katz の仕事に基づいてされて、rigid という分かる世界以外は全部分からない世界だったものに精密な構造が入り、全体が階層構造になっていてその中の一番わかるのが rigid で、分からなさがだんだんと上がっていくという構造になっているというようになりました。Katz は、さらに middle convolution という操作を導入して、同じ階層の方程式が middle convolution で移り合うということを見つけ出しましたが、それが方程式だけでなく方程式に伴う色々な量、つまり局所的な量、大域的な量、解の表示に対しても移り合うことがわかってきました。そうすると、Fuchs 型微分方程式を調べるためにはこの middle convolution で移り合うように類別して、各類の代表元についてだけ調べれば、Fuchs 型方程式全部について分かる、というような非常に精密な構造があることが分かりました。

聴講者 A: 群構造が作用してて、transitive に作用しているというような感じになっているのですか？場所が分かれば全部分かる、等質空間みたいに。

そんな感じですよ。これは今、rigidity というものでクラス分けしているのだけれど、rigid なクラスはその類に推移的に作用することになっていて、そうでないやつはスペクトル型によって類に分かれて、その類の間では移り合うという構造になっています。

聴講者 A: じゃあ、その rigid というところは同値類が1個？

1個です。

だから、雑な言い方ですけど1個簡単な方程式があって、そいつから全てが分かっちゃう。何でも分かるといったけれど、その分かり方も非常にはっきり記述されるようになったわけです。

ここら辺の話をよく見ると、middle convolution とかというのは、良く昔から知られている Riemann-Liouville 積分、複素数回微分というやつがあるんですけど、その話なんで

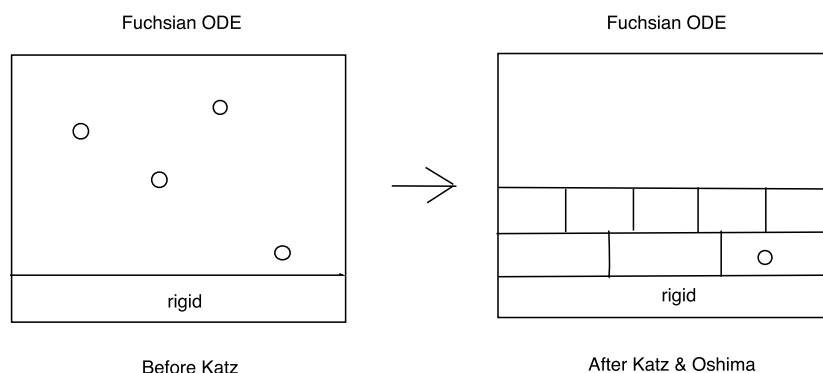


図 1: Fuchs 型常微分方程式全体

す。だから、こういう風に階層分けするというのは、アクセサリー・パラメーターの個数で分けなさいという大久保先生の話自体なので、ここに出ているような登場人物は、実は我々が昔から知っているものばかりだった。だから、Katz がちょっとアイデアを出してこうしたんだというのではなく、多分多くの人がこういう素材を知っていたんだけど、こういう話まで組み上げることはなかなかできなかった。けれども、我々が知っている素材を上手く組み合わせて堅牢な体系を作り上げた、というのが、彼の大きな仕事ですごいところだと思います。

これは、常微分方程式の話ですけど、同じように偏微分方程式系で、連立することで解空間の次元が有限になるようなものを完全積分可能系とか holonomic 系とか言いますが、それについても rigid かどうかという見方でもって、話ができるのではないかと、ということが私がこの話を知ってすぐに思いついたことです。それで、考えていくと、多変数の完全積分可能系の研究にもこの rigidity の考え方が有効であることが分かったので、今日はこの常微分方程式についての rigid, Katz 理論の内容をざっと説明して、上手くいけば今日中にその話が終わり、明日はそれに基づいて多変数でどうすればよいかという話をしたいと思います。

2 Fuchs 型常微分方程式

2.1 正規 Fuchs 型方程式

私の話ではこのような形を限った方程式を考えます。

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{x - a_j} Y, \quad a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}, \quad A_1, \dots, A_p \in M(n; \mathbb{C}) \quad (1)$$

このような形の微分方程式を正規 Fuchs 型, 文献によっては Schlesinger 標準系や Fuchsian system という人もいます。この方程式を見ると分かりますが, $x = a_j$ になるというのはこの係数の極になっているから特異点になっています。だから a_1, \dots, a_p がこの方程式の特異点で, さらに $a_0 = \infty$ も特異点となります。特異点の情報を握るのは主要部と言って, ローラン展開の負幂の項が大事となります。 a_j については 1 位の極なので留数行列 A_j が主要部を決定していますが, 無限遠点においては $t = \frac{1}{x}$ として方程式を書き換えると, $t = 0$ が無限遠点に相当しますから, t に関する主要部が出てきてその特異性が分かります。その時の A_j に相当する留数行列 A_0 は $A_0 = -\sum_{j=1}^p A_j$ となります。

それで, これは私からの提案ですけどこういう方程式を考えると, 正方行列は Jordan 標準系に直すと固有値が出てきますが, その固有値の中で同じものはあってもよいんだけど, 違うものがあつたときにはその違うもの同士の間には整数差がない, という状況が, こういう微分方程式を考える時には非常によくでてきて大事なのですが, そういうことを述べる言葉が多分ないんじゃないかと思うので, 名前をつけたいと言う提案です。どういう風につけたいかというのには特に強い意見はないのですが, 今は分離的という言葉方をしたいと思います。非共鳴的という言葉もあるかと思つたけど, 共鳴的ではないという否定形で述べるのが嫌だったので, 肯定形でシンプルな言い方がないかと思つてとりあえず分離的と呼ぶことにします。さらに, A_0, A_1, \dots, A_p が分離的なとき, (1) を分離的と呼ぶことにします。

以下, これを仮定します。そうすると非常に色々嬉しいことが起こります。なぜ嬉しいのかというのは証明を見ないと分からないのでしませんが, 特異点 a_j の近くで解の様子を調べるのが局所解析だったのだけれど, こういう仮定をしていると, 局所解が

$$\mathcal{Y}_j(x) = F(x)(x - a_j)^{A_j}$$

のように構成できる。 $F(x)$ は行列の $x = a_j$ におけるテイラー展開で初項が $F(a_j) = I_n$ です。念のため言っておくと $(x - a_j)^{A_j} = e^{A_j \log(x - a_j)}$ で行列の指数関数。ともかく, 多価性を持つような項及び収束する冪級数という形で解を作ることができます。

このことによつて, a_j の近傍に点 x_0 をとると, この近くでこの関数は正則になります。この正則関数を a_j の回りを 1 周するように曲線 γ で解析接続, これを γ_* と書くと, F はそのまま, $(x - a_j)^{A_j}$ だけが変化して $e^{2\pi i A_j}$ が右から掛かるという効果を表します。ということで, これで特異点の近くの解の表示とその解を特異点の近くで回したらどう変化するかということを記述したわけです。

$$\gamma_* \mathcal{Y}_j(x) = \mathcal{Y}_j(x) e^{2\pi i A_j}.$$

局所解析についてはこれでお終い。

今、Riemann 球 \mathbb{P}^1 があってそこに a_0, \dots, a_p という特異点があって、それぞれの近くで解を作り、それぞれの点の近くで x_0 に相当する点を取り、回ると何が起こるかが分かるという話をしましたが、これはそれぞれの場所ごとの話でした。それで、何でもないところに例えば点 b をとってやると、その近傍では解が作れるわけですけども、この点 b における解がどんな多価性を持っているかということを調べようと思ったら、定義域の中を可能な限り解析接続したときに一体どんな変化を受けるか、ということ全体を全部言えればその解の多価関数としての性質は完全に捉まえたことになります。

こういうことをやろうと思うと、 $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{a_0, \dots, a_p\}$ として、 $b \in X$ を取ってきてこれの基本群 $\pi_1(X, b)$ というのを考えてやる。それで、この $\pi_1(X, b)$ から道 γ を取ってきてやります。 $\mathcal{Y}(x)$ というのを $x = b$ の近傍における基本解行列とします。そうすると、 $\mathcal{Y}(x)$ を γ に沿って解析接続した結果はまた点 b の近傍における解となりますが、それは基本解系の線型結合で表されることになるので、ある行列 M があって $\mathcal{Y}(x)M$ という結果になることが分かります。ここは、初めて聞く人には何のことか分からないかもしれませんが我慢して聞いてもらうことにして、分からないときは後でフリータイムの時間いてください。

聴講者 A: 基本解行列の基本解は縦に並べているのか横に並べているのか。

(1) は列ベクトルを未知関数として試しています。

聴講者 A: 列ベクトルを未知関数。

はい。だから $\mathcal{Y} = {}^t(Y_1, \dots, Y_n)$ としています。それで、 n 階の方程式なので n 個の線型独立な解があって、それを並べると $n \times n$ の行列ができ、それを基本解行列と言っています。

岩崎: すみません。どうして突然軟かい \mathcal{Y} になったのですか。

気分の問題でしたが、 \mathcal{Y} を行列、 Y と書いたら列ベクトルとしましょう。

こうすることで写像

$$\begin{aligned} \rho: \pi_1(X, b) &\rightarrow GL(n, \mathbf{C}) \\ \gamma &\mapsto M_\gamma \end{aligned}$$

ができます。どの道に沿って解析接続するかを指定するとその結果どの行列が掛かるかが決まる。この対応のことをモノドロミーとかモノドロミー表現と言います。で、これは両方とも群で群の間の反準同型になることが分かります。それで、この M_γ というのを全て見つけることができれば、この ρ が完全に分かれば、解が多価関数としてどんなものかが完全に分かる。ということで、これが大域解析の一つの目標になります。

聴講者 C: 反表現になるというのは基本群の積の向きは?

基本群の積は左から読んでいく。 $\gamma_1 \gamma_2$ としたら γ_1 を回ってから γ_2 を回る。多分、トポロジではこちらがスタンダードじゃないかと思うので。

聴講者 C: そういうとき、その行列と反表現になる。

そうです。そうすると $M_{\gamma_2} M_{\gamma_1}$ という風に対応することになります。

ということで、これは解の多価性を表す大域解析で非常に重要な量で、これを調べようと思うと、まず元である基本群について分かっていると少し様子が分かるのとで基本群の表示を与えますが、これは

$$\pi_1(X, b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_p = 1 \rangle$$

という表示を持ちます。 b を基点として最初に a_0 を回ってこれを γ_0 , a_1, \dots, a_p を回るのを $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ とします。1個だけ回って他は回らないという道を上手く配列すると、それらが群を生成し、 $p+1$ 個の元の間には $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p = 1$ が成り立つわけです。

こういう表示がありますので、 $\rho(\gamma_j) = M_j$ とすると、反表現なので

$$M_p \cdots M_1 M_0 = I_n \quad (2)$$

を満たす $p+1$ 個の行列の組 (M_0, M_1, \dots, M_p) が表現 ρ を決定していることになります。生成元の行き先さえ決めればよい。そしてその行き先は自動的にこの表示によって関係式 (2) を満たすようになっていく。以下、 ρ と言ったら適宜 $p+1$ 個の行列の組と思うことにします。次の命題は、明日のために必要となります。

命題 1. $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X, b)$ をともに a_j のみを正の向きに1周し、他の a_k は回らないものとする $\implies \gamma \sim \gamma'$ in $\pi_1(X, b)$.

これは、 μ を次の図 (図2) のような a_k を1周するような道とすると、 $\gamma = \mu \gamma' \mu^{-1}$ となることから分かります。今、 γ_j を ρ で送ると行列 M_j ができますが、 $[M_j]$ で相似変換による共役類を表すと、これは特異点 a_j によって決まります。他の γ'_j があってもこれは $\pi_1(X, b)$ で γ_j と共役で、その行き先は $GL(n, \mathbb{C})$ で共役、共役類は一致するので $[M_j]$ は特異点 a_j によってのみ決まる同値類となるわけです。これを、局所モノドロミーと言います。

2.2 rigidity

さっき具体的に書いた局所解を解析接続したものを局所モノドロミーとも言いますが、表現の言葉で言うと γ_j の像 M_j の共役類のことを局所モノドロミーと言います。言いたかったことは、共役類を取っていますから \mathcal{Y}_j を回して出てくる $e^{2\pi i A_j}$ 、これが局所モノドロミーを決定するわけです。だから、局所モノドロミーは微分方程式を見るだけで計算できるようになっています。つまり $M_j \sim e^{2\pi i A_j}$ で、 M_j たちには関係式 (2) が成立する。この $p+1$ 個の行列の組を決めてしまえば勝ちなわけです。そして、決定したらそれはモノドロミー表現が決定されたことになって、大域挙動が分かったことになるわけです。

そして、局所モノドロミーと関係式 (2) という条件だけから (M_0, M_1, \dots, M_p) が完全に決定してしまう特別な場合があって、そういう場合のことを rigid と言います。この場

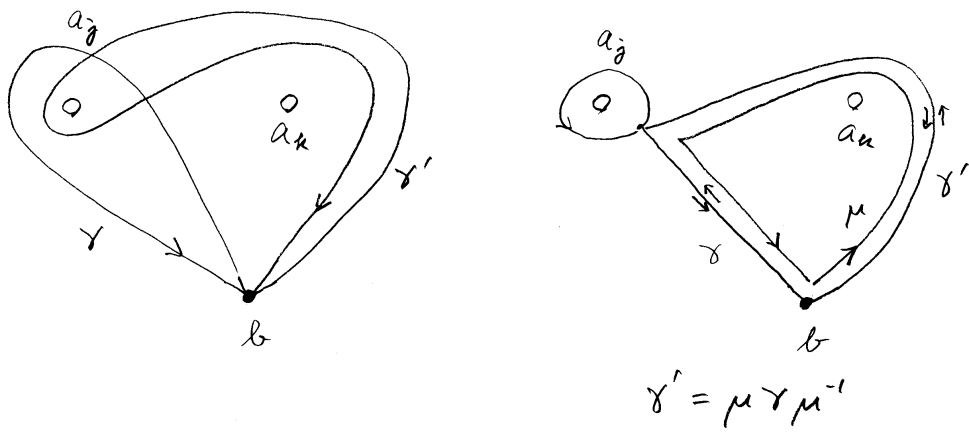


图 2: $\gamma \sim \gamma'$

この例のように、 A の各固有値の e_j を集めて並べたものを A のスペクトル型と言います。このとき、

$$\dim Z(A) = \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} e_j(A : \alpha)^2$$

となることが分かります。これもやった方が教育的だと思うけど、申し訳ないですが演習問題に回します。

つまり、Jordan 標準形の型だけを取り出すと rigidity 指数の右辺に出てくる値を計算できます。そして、rigidity 指数に関しては次の Katz による定理が成立します。

定理 5. (Katz) ρ が既約なら rigidity 指数は 2 以下。さらに ρ が既約のとき、rigid であることと rigidity 指数が 2 であることは同値。(ここで $\rho = (M_0, M_1, \dots, M_p)$ が既約とは、各 M_j の全てに共通の不変部分空間が自明なものしかないことを言う。)

だから、 p と n とスペクトル型を与えれば ι が決まり、これがちょうど 2 になるようなものを与えることができれば rigid なスペクトル型ができて、そういうスペクトル型を留数行列に持つような正規 Fuchs 型方程式については、局所モノドロミーから大域的なモノドロミーが計算できるわけです。

岩崎: 一意的に決まるというのと計算できるというのはちょっとギャップがある気がしますけど

ギャップはあります。一意的に決まるというのは定義からですけど実際、事実としては具体的に書けるということまで言えるので、大域的な M_j たちの一斉相似類というのは、具体的に書き下すことができます。

M_j たちを決定するというのは、 $M_j \sim e^{2\pi i A_j}$ と関係式 (2) をみたく行列の組を見つけないさいという問題ですから、 M_j の成分を未知数とする連立の代数方程式になって、その未知数の個数と方程式の個数が一致すれば解けるという感じで、未知数の個数と方程式の個数が一致するのが $\iota = 2$ という条件になっている。だから、後は、その代数方程式を解けば良くて、その代数方程式が解けるかどうかというのは別問題だけど、それはちゃんと解けるということが示されるのでモノドロミーは決まります。

高山: ρ が既約だと 2 以下というのが直感的に分からないのですけど、スペクトル型を決めても色々なパラメータがありますよね。そこでの既約って言うのはどういう。

例えば、 $M \sim \alpha I_{n_1} \oplus \beta I_{n_2}$ とすると $\dim Z(M) = n_1^2 + n_2^2$ と結構大きくなるわけです。固有値が全部違うとすると $\dim Z(M) = n$ となって、前者の方が圧倒的に大きくなるわけです。なので、同じ固有値がたくさん並んでいるという状況があると中心化群の次元は大きくなります。大きくなると、 ι も大きくなる。それで ι があんまり大きくなる、つまり同じ固有値をたくさん持つ行列が多くあると、共通の不変部分空間がありやすくなるというような感じです。仮に、全部スカラー行列とすると各次元は n^2 と非常に大きく、共通の不変部分空間をたくさん持っている、そういうのに近づくということで rigidity 指数が大きいということは可約に近づいているという雰囲気がある。

聴講者 A: もちろん, ι は負になることもあるんですよ。

そうです。2から ι を引いたものの個数がアクセサリパラメータの個数になります。

$\iota = 2$ であれば rigid で, 大域挙動が分かるから, そういう方程式を全部リストアップしようと思うのは普通ですが, これは p と n とスペクトル型で決めることなので, そういうのを全部決めようとおもいます。ちょっとやってみます。

例 6. (1) $n = 2$ のとき

対応するスペクトル型は (11), ((11)), (2) の3種類。このうち (2) というのはスカラー行列でつまらないので削る, 考えないことにします。そうするとどちらでも中心化群の次元は $1^2 + 1^2 = 2$ となつて, Jordan 細胞があるかないかに関わらず中心化群の次元が計算できる。このようなところで, e_j という表し方は便利です。そうすると, 各々の特異点のスペクトル型から決まる中心化群の次元を z_j と書くと

$$\iota = (1 - p) \times 2 + \sum_{j=0}^p z_j$$

となつていて, こいつが2になつて欲しいわけですけど, 今 $z_j = 2$ なので

$$\iota = 6 - 2p$$

より, $p = 2$ 。よつて $n = 2$ のときは $p = 2$ のときだけが rigid でそのときのスペクトル型は ((11), (11), (11))。((11), (11)) は ((11)) かもしれないけど, 結果に関係しないので ((11)) と書いたらどちらかを表していると理解してください。あるいは面倒くさければ Jordan を考えず対角化可能な場合だと思つて読んでもらつても構いません。

それでおなじように $n = 3$ を考えます。

(2) $n = 3$ のとき

可能なスペクトル型は (111) と (21) で中心化群の次元は3と5となる。 $\iota = (1 - p) \times 9 + \sum_{j=0}^p z_j$ なので, rigid になるための条件は $\sum_{j=0}^p z_j = 9p - 7$ 。

$p = 2$ のとき $z_0 + z_1 + z_2 = 11$ よりスペクトル型は ((211), (111), (111)) となる。

$p = 3$ のとき $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 20$ なのでスペクトル型は ((21), (21), (21), (21))。

$p \geq 4$ のときは存在しない。

(3) $n = 4$ のとき

可能なスペクトル型は (31), (22), (211), (1111) となり,

$p = 2$ のとき

rigid なスペクトル型は ((31), (1111), (1111)), ((22), (211), (1111)), ((211), (211), (211))

$p = 3$ のとき

((31), (31), (31), (1111)), ((31), (31), (22), (211)), ((31), (22), (22), (22)),

$p = 4$ のとき

((31), (31), (31), (31))

このようにして, このゲームは答えを出すわけですけど, 実は ((31), (31), (31), (1111)) を持つような行列のスペクトル型の組は存在しません。

だから、単に $\iota = 2$ になるようなスペクトル型の組を見つけてくるだけではダメで、何らかの判定が関わっています。これは、大島先生もやられているけど Crawley-Boevey という人が、彼はスペクトル型とは言っていないけど、こういうようなスペクトル型を求めるための特徴付けというのをされていて、それを良く読むと実現可能な、つまり存在するようなスペクトル型を見つけるアルゴリズムというのがあります。これは明日紹介しますが、そのアルゴリズムにかけるとこれは撥ねられて、 $\iota = 2$ だけど存在しないことが分かります。

岩崎: その存在しないというのは、そのスペクトル型を持つ既約表現が存在するかということ?

既約じゃなくて、もう行列の組として存在しないということ。

岩崎: もう行列として。

さっきも言ったけども連立代数方程式が解を持たないということになる。

岩崎: では、持ったとしても既約になることはある。

持ったとしても可約になってしまう。

岩崎: ああ、可約になってしまう。

可約になってしまうことも理論的にはあるけどアルゴリズムにかけるとちゃんと既約な状態のものだけがアウトプットとして出てくる。

岩崎: そのアルゴリズムというのは単に行列の組でその代数方程式をみたすもの。

で既約なものが、

岩崎: かつ既約という条件が入れているという意味で。

既約なものがあるように固有値をとれるような時のスペクトル型を篩に掛けるやり方です。

2.3 middle convolution

middle convolution というのを Introduction で出しましたが、それは Fuchs 型方程式を別の Fuchs 型方程式に移すような変換だと思えることができ、それに付随してモノドロミーとか接続係数とか解の表示とかいうのも移っていくわけです。だから、その移り合うものの中で一番簡単なものについて、解の表示でもモノドロミーでも求めてやると、それで移り合うような方程式については全部分かってしまうというものになっています。これはやると時間が掛かるので、今日は導入だけを話そうと思います。ちょっとイントロでも言ったけど

$$I_a^\lambda f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x f(t)(x-t)^\lambda dt$$

として $a \in \mathbb{C}$, f はしかるべきところで正則な関数で, $\lambda \in \mathbb{C}$, その f に対してこういう風に変換して別な関数を作るという操作があります。こういうのを Riemann-Liouville 積分といいます。これは、昔から知られていて岩崎先生が書かれている “From Gauss to Painlevé” を読んでいただくと良く分かると思いますが、複素数回微分するというのに相当していて、この $\lambda = -n$ という負の整数の時には f を n 回微分することと同じ結果を生み出すような解析的な表示になっています。また、これは

$$I_a^\lambda I_a^\mu = I_a^{\lambda+\mu}$$

のような加法性を持っていたりします。

高山: $-n$ になると, $\frac{1}{\Gamma(\lambda)}$ って 0 になりますよね。

そうです。 $-n$ になると $(x-t)^{-n}$ が極を持つので端点 x での積分は発散するので、そこは積分の正則化ということをして、すると正則化する係数が発散するのでその発散する奴とその Γ 関数が打ち消しあってちょうど微分の項が残るという形にできます。

聴講者 C: その a というのは何なんですか?

a っていうのは、領域 D があって、その領域 D の端でも中でも良くて、 a を止めておいて x という色々動くのを取るわけです。それで a から x まで適当に道をとるというものです。

聴講者 C: x の n 階微分というのの証明は。

この a は関係なくなります。今の高山先生を質問をもう少しちゃんと言うと、 a から x までの道を a から x の近くまでの道と x の周りを回る道の 2 つに分けます。それで説明はしませんが、積分の正則化というのをします (図 3)。このとき、 Γ の中は $-n$ になると極になるからその逆数は 0 になるので、 a から x の近くまでの道には 0 が掛かっているから消えてしまって、 x の周りの積分だけになります。そうすると、コーシーの積分表示で n 階微分になるというわけで a は関係しなくなる。

それで、(1) のような微分方程式を考えていたわけですけど、これに対し

$$Z(x) = I_a^\lambda Y(x)$$

というのを考えてみます。そうすると、まだきちんと定式化していない雑な言い方ですけど、 $Z(x)$ はまた別な微分方程式を満たします。そして、積分変換をただけだから $Z(x)$ の満たす微分方程式を書き下すことができます。そういう方程式は一般に可約になるかもしれないから、その既約部分を取り出します。可約な微分方程式というのは、より階数の小さい微分方程式を続けて解くことで解けるような方程式なので、そこに出てくる、より階数が小さくて、それ自身はそれ以上分解できないような既約部分を取り出す。その既約部分を取り出す操作を middle convolution というわけです。

実際に定式化する際には、この積分を表に出さずに単にこの行列 A_j 達に対してどうすれば良いかという風に言うことができ、その手続きによって、元の方程式から別な方程

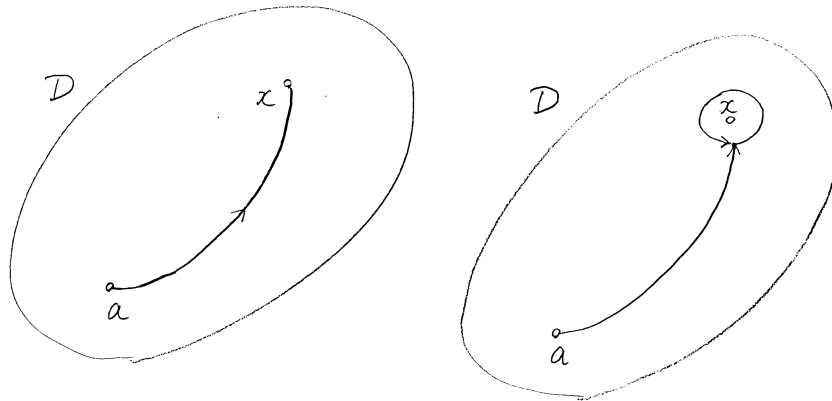


図 3: Riemann-Liouville 積分の正則化

式を代数的に構成することができます。だから、実質的には Riemann-Liouville 変換をしているだけですけど、それを微分方程式の操作として定式化することができます。ここでやっているように Riemann-Liouville 積分では続けてやると和をパラメータとするような一発の変換にできるわけですけど、middle convolution でも同じように λ と μ に関する middle convolution を続けて行くと $\lambda + \mu$ に関する 1 回の middle convolution になったり、 $\lambda = 0$ のときの middle convolution は何もしないことと同じになるという性質があります。あるいは、既約成分を取り出すということから当たり前かもしれないけど既約な方程式を middle convolution しても既約な方程式が手に入る。それから、middle convolution によって rigidity 指数は変化しない。というようなことがわかります。

最初の Introduction につなげれば、rigid な方程式というのは middle convolution, 他に addition というのもやるけれど、何回かやると階数が 1 の方程式まで落とすことができる。階数が 1 の方程式というのは求積できてしまうから、求積できる方程式と middle convolution でつながっているのが rigid な方程式ということになって、階数が 1 の方程式の解というのは $(x - a_j)^{\alpha_j}$ の積だから、それをこういう積分変換をしていくと rigid な方程式の解の積分表示が手に入ります。だから、rigid なときには middle convolution を使って解の積分表示を構成することもできます。具体的な A_j から middle convolution の係数を導くプロセスは、明日お話しします。

この middle convolution の考え方は、流用すると多変数の場合にも定義することができます。そうすると、Appell の超幾何関数みたいな系列とか色々な多変数の完全積分可能系と言われているやつの微分方程式系が rigid な常微分方程式から具体的に作るという手

順を与えたりすることができたりします。

終わります。何か質問はありますか。

高山: 聞いたことだけで原理的には演習問題は全部解けるんでしょうか。

1 番は聞いたことではないけれど解けると思います。

2 番も定義が書いてあるから頑張ると解けるかもしれません。

3 番は出てくる文字は講義で言ったので解けるかどうかは分かりませんが何をすれば良いかは分かると思います。

4 番は, rigid というのは局所モノドロミーから全体が決まるということだけれど, それを具体的に手を動かして決まるかどうかというのを見るので, これは多分教育的な問題で, やってもらうと様子が分かると思います。

4 番では具体的にこれが rigid であるというのを書き下しましたが 5 番では別の場合に, 書き下すことを自分でやってみてしかも rigid であることを示してくださいという問題で, これも多分問題の意味は伝わると思います。

6 番はここでやった $n = 4$ までの場合を $n = 5$ の場合にもやってみると感じが掴めると思って出した問題です。ただ, このアルゴリズムについては今日言えなかったもので, その中で実現できないやつもこの状態だとリストアップされてしまうかも知れませんが, それは明日アルゴリズムを知った後で削ると正解になります。

7 番は Riemann-Liouville 変換の加法性を示しなさいという問題で, ヒントの積分の順序交換をすると上手く示せることになります。

演習問題

問 1 正規 Fuchs 型微分方程式

$$\frac{dY}{dx} = \left(\sum_{j=1}^p \frac{A_j}{x - a_j} \right) Y \quad A_j \in M(n, \mathbb{C})$$

を $t = \frac{1}{x}$ で変数変換し, $A_0 = -\sum_{j=1}^p A_j$ が $t = 0$ における留数行列となることを確かめよ。

問 2 $A \in M(n, \mathbb{C})$ とする。このとき x_0 を基点とし, 原点の周りを反時計回りに 1 周して x_0 まで戻ってくる曲線 γ に対して $\gamma_* x^A = x^A e^{2\pi i A}$ を示せ。

問 3

$$\dim Z(A) = \sum_{\alpha} \sum_{j \geq 1} e_j(A; \alpha)$$

を示せ。

問 4 スペクトル型 $((11), (11), (11))$ が rigid であることを示せ。すなわち, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2, c_1 \neq c_2, a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2 = 1$ とし,

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}, \quad C \sim \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}$$

とする。行列の組 (A, B, C) は既約とする。このとき $[(A, B, C)]$ は一意であることを示せ。但し、

$$(A, B, C) \sim (A', B', C') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists P \in GL(2, \mathbb{C}), A' = P^{-1}AP, B' = P^{-1}BP, C' = P^{-1}CP$$

と定めるとき、 \sim による同値類を $[(A, B, C)]$ と表す。

問5 (1) スペクトル型 $((21), (111), (111))$ が rigid であることを示せ、という問を、前問のように定式化せよ。

(2) (1) で定式化したものを解け。

問6 $n = 5$ の rigid なスペクトル型を列挙せよ。

問7

$$(I_0^\lambda f)(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^\lambda dt$$

と定めるとき、 $I_0^\lambda \circ I_0^\mu = I_0^{\lambda+\mu}$ を示せ。(ヒント: 積分の順序交換)

2日目

昨日、高山先生に参考文献といわれましたが、今書いているものがありますので欲しい方は欲しいということをはらoka@kumamoto-u.ac.jp まで送っていただければ送ります。middle convolution とかそこら辺のことを分からないとは言わせないぐらい書きましたので、それを見てもらうと分かると思います [5]。

2.4 middle convolution

昨日、middle convolution は実質的には Riemann-Liouville 積分だということを言いましたが、それを正規 Fuchs 型微分方程式 (1) の特異点の位置を気にしない留数行列に対する変換として紹介します。

$\lambda \in \mathbb{C}$ をパラメーターとし、

$$G_j = \begin{pmatrix} O & \cdots & O & \cdots & O \\ A_1 & \cdots & A_j + \lambda & \cdots & A_p \\ O & \cdots & O & \cdots & O \end{pmatrix} \in M(pn; \mathbb{C})$$

とし、ここで λ は $\lambda = \lambda I_n$ を表すものとします。ここで、

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{pn} \mid v_j \in \text{Ker} A_j \right\}, \quad \mathcal{L} = \text{Ker} G_0 = \bigcap_{j=1}^p \text{Ker} G_j, \quad G_0 = - \sum_{j=1}^p G_j$$

とにおいて、 \mathcal{K} のベクトルに G_j を掛けてやると

$$G_j \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ v_j \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$$

となるので \mathcal{K} はあらゆる G_j に対する不変部分空間になっています。また、 \mathcal{L} も G_j たちの不変部分空間になります。そこで、全体をこの不変部分空間で割った商空間 $\mathbb{C}^{pn}/\mathcal{K} + \mathcal{L}$ を考えると、この G_j は商空間に作用しているわけです。ですので、 G_j を $\mathbb{C}^{pn}/\mathcal{K} + \mathcal{L}$ への作用として見たものを B_j とすると、これはサイズが $pn - \dim(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ で状況によって n より大きくなるときも、小さくなるときも、等しくなるときもあります。それで

$$mc_\lambda : (A_1, \dots, A_p) \mapsto (B_1, \dots, B_p)$$

と書いて、これを middle convolution と定めます。昨日ちょっとと言いましたけど、元の方程式を Riemann-Liouville 変換をするとある別な微分方程式を満たすわけですが、それは可約かもしれないのでその既約部分を取り出すと説明しました。だから、大雑把に言うと、元の方程式の解を Riemann-Liouville 変換すると G_j 達を留数行列にするような微分方程式の解になって、そいつは一般には可約なので既約部分を取り出す、というのがこの商空間への作用ということで、そうすると B_j を留数行列にする微分方程式ができて、それはある条件のもとでは既約だということが証明できるということになっています。

2.5 middle convolution の解析的な意味

今言ったことを少しちゃんと述べることにします。(1) の解 $Y(x)$ に対して

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{Y(x)}{x-a_1} \\ \vdots \\ \frac{Y(x)}{x-a_p} \end{pmatrix}$$

とすると、これは次を満たすので示してみてください。

問1 W は

$$(x - T) \frac{dW}{dx} = (G - 1)W \quad (3)$$

を満たす。ただし

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \vdots & & \vdots \\ A_1 & \dots & A_p \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_1 I_n & & \\ & \ddots & \\ & & a_p I_n \end{pmatrix}$$

である。

(3) のような形の微分方程式を大久保型といいます。これは大久保先生が、アクセサリーパラメータを持たない微分方程式などを調べるのにふさわしい形だろうと提唱された方程式で、色々、例えば Laplace 変換や Riemann-Liouville 積分など積分変換と非常に相性が良い方程式です。それで

$$U(x) = \int_{\Delta} W(t)(x-t)^\lambda dt$$

という方程式 (3) の Riemann-Liouville 変換とします。大久保方程式を満たす解は, Riemann-Liouville 変換するとスカラーだけシフトするという性質を持つので, これは

$$(X - T) \frac{dU}{dx} = (G + \lambda)U$$

という変換をするということになります。この方程式は, 正規 Fuchs 型に書き直すと

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{G_j}{x - a_j} U$$

となりますので, これで Riemann-Liouville 変換をしたときの微分方程式を手に入れたこととなります。そして, この G_j 達は不変部分空間を持つので, $\mathcal{K} + \mathcal{L} = 0$ の時はこれでお終いですが, $\mathcal{K} + \mathcal{L} \neq 0$ の時には不変部分空間を持って, そこから既約成分を取り出すと

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{B_j}{x - a_j} V$$

という middle convolution をした微分方程式に辿り着くことになっています。間もですけど, 計算をフォローするとこちら辺は様子が掴めると思います。これは, 若干の普通に成り立つような仮定がいりますけど, 次のような性質を満たします。

- 定理 7. (i) $mc_0 = id$
(ii) $mc_\lambda \circ mc_\mu = mc_{\lambda+\mu}$
(iii) $(A_1, \dots, A_p) : \text{既約} \Rightarrow mc_\lambda(A_1, \dots, A_p) : \text{既約}$
(iv) mc_λ は *rigidity* 指数を保つ

それで, middle convolution は解析的に実現できるので, 微分方程式の色々な量がこの線型代数的なメカニズムを追跡したり, この積分を追跡するなどをして, どのように移っていくかということを見ることができて, 非常に役に立ちます。

Katz の定義した操作では addition というのも使いますが, これは簡単で留数行列に対して

$$(A_1, \dots, A_p) \mapsto (A_1 + \alpha_1, \dots, A_p + \alpha_p), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$$

とスカラーシフトを施す操作です。これは, 解のレベルで言うと

$$Y(x) \mapsto \prod_{j=1}^p (x - a_j)^{\alpha_j} Y(x)$$

という冪関数を掛けるという変換に対応する操作になります。これは明らかに既約性を保ったり, 加法性が成立したり, スペクトル型は不変だから *rigidity* 指数を保つことが分かります。

ということで, 何か微分方程式があったら addition とか middle convolution をして別の微分方程式に移すことで色々行き来ができるようになって, どちらかの方程式が分かっているならもう片方の方程式についても具体的に分かるようになることが期待され

るわけです。特に，addition も middle convolution も 2 回やると 1 回やったことと同じになるので続けてやる限り同じですけど，交互にやると違うもの，つまり 1 回の middle convolution では実現できない新しい操作になるから色々と移るわけです。

だから，目標は色々移していったらなるべく簡単にする。なるべく簡単なものにたどり着いたらそれを調べれば，後は addition と middle convolution を追跡して今知りたいものについて分かるということになります。なので，与えられた式をなるべく簡単なものまで帰着させたい，ということになるわけです。

何を持って簡単かというのはちょっと分かりませんが，普通は方程式の階数が小さい方が簡単だろうということで，なるべく簡単というのは階数が addition と middle convolution をやっていく中で一番小さくなるものまで持っていくこととする。すると，後はそれだけを相手にして考えれば良いということになって，こういうもののことを，大島先生の言い方で basic と呼ぶことにします。

定理 8. (Katz) 既約 rigid な方程式は階数 1 の方程式に帰着できる。

既約 rigid な方程式があったら，階数が高いかもしれないけど addition と middle convolution を繰り返していくと 1 階の方程式に帰着できる。階数 1 というのは

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j}{x - a_j} y$$

というスカラー方程式ですから $y = \prod_{j=1}^p (x - a_j)^{\alpha_j}$ という解がとれて，これを Riemann-Liouville 変換したり，あるいは addition で冪関数を掛けるということは何回か繰り返していくとこういう rigid な方程式の解が得られますので，このことから rigid な方程式は Euler 型の積分表示を持つことが分かります。これは，他にもモノドロミーや接続係数が追跡できます。後一つ，昨日する予定だったお話を。

聴講者 A: すみません。1 階のものに帰着されたとき，方程式の rank は元々高かったものが小さいものになっているので，解の個数は減っているように見えますよね。それで，基本解系を作るためには複数いるのだけれども，そういうのを作るシステムみたいのはちゃんとあるのか。

このメカニズムで言うと積分の積分路を。

聴講者 A: 積分路をちゃんと独立な分だけ決定してくださいという話になるんですね。

はい。まず，階数を p 倍したいわけです。それで，解は積分の端点を a_1, \dots, a_p と選ぶことによって p 倍される。

聴講者 A: それがちゃんと独立であるかとかは保証されているのか。パラメータは一般として。

今，証明は頭に浮かびませんが，証明されているんだったと思います。

聴講者 B: それは generic だという仮定が。

はい。なんせ、方程式があるのですから、この方程式は階数が高いので。あるいはコホモロジーの次元とかを数えても良いかもしれないけど。ホモロジーの次元としてとれるというのは。もちろんいろんなことが起こると積分でなく留数をとったやつとか色々出てくるから、全てがこう書けるというのは超幾何の場合にすら成り立たないわけですけど。

聴講者 A: だから、generic という状況では。

これは Riemann-Liouville 積分だから特異点を端点とするような積分が普通で、 a_j というのは既に特異点であることが分かっているからそこを端点に持ってくる。

聴講者 A: 線積分なわけですね。

そうです。

聴講者 A: $W(t)$ というのが方程式の解のように思うと、それが rank の高い local system を決めていると思うということですよ。さらに、 $(x-t)^\lambda$ が掛かってきている。

だから、 x から a_j というので揃えれば良いわけですね。

2.6 Fuchs 型方程式の存在, 構成

岩崎: すみません。今の Katz の定理の証明のアイデアを一言で言うと。

middle convolution をすると、単に行列が出ると言ったんだけど、実はこのスペクトル型が元の行列のスペクトル型によってどう変わるかというのが記述されます。それを見て、middle convolution はパラメータ λ によってますが、なるべく階数が低くなるように λ を選ぶ、あるいは addition をする。つまり $K + L$ で割ってますけど、これは $\text{Ker} A_j$ を並べたものと $\text{Ker} G_0$ だったので、これを大きくすると階数が下がってくれる。だから各 A_j 達の中で重複度が一番大きいやつを、それを差し引く addition をすれば $\text{Ker} A_j$ は大きくなる。そういう準備をします。それから λ を $\text{Ker} G_0$ がなるべく大きくなるようにとります。そうすると階数なるべく低くなります。その時にスペクトル型がどうなっているか分かるので、それと rigidity 指数が 2 という話を組み合わせてあげると、やるごとに本当に階数が下がるという不等式が出てきて、階数が 1 までいくという証明になっています。そのようなことをこれから言おうと思うんですけど。

それで、rigidity 指数を見ると rigidity 指数は既約ならば 2 以下だから 4 以上だとその時点で可約ということが分かっちゃうから、これは既約な方程式があるかということについて一つの判定法を与えます。今言ったように middle convolution でもってスペクトル型が変化していくというのを組み合わせて考えて、Fuchs 型方程式とっていますけど固有値のことは忘れてスペクトル型の話だと思って、既約な方程式に対応するスペクトル

ル型としてはどんなものがあるか。あるいは、勝手にスペクトル型を与えたときに、何らかの既約な微分方程式の留数行列のスペクトル型になっているかどうか、ということを考えたいと思います。

こういう話は、元々は固有値も込めると共役類ということになるから、留数行列の共役類のセットを与え、つまり (A_0, A_1, \dots, A_p) が入っているべき共役類のセットを指定して、その指定した中から行列を取ってきて足したら O の状態ににできるか、そいつらが既約になるようにできるか、という話にできて、Kostov という人がこれを Deline-Simpson 問題と名づけ、その必要十分条件を与えています。Kosov はそれを、昨日も言いましたけど行列の成分に対する連立代数方程式に解があるかどうかという問題なので、解があるかどうかということ陰関数定理に持ち込んで証明するというやり方で示しています。

一方、Crawley-Boevey という人は quiver の表現を使って、行列があるかどうかというのは quiver みたいなのを与えたときにその表現があるかどうかという問題なので、quiver の表現の存在定理というもう一人のカッツ (Victor Kac) の結果に帰着させることで同じ問題を解いています。それで、Crawley-Boevey の結果の方がスペクトル型を追跡する時に見やすいので、それを使わせてもらうことにします。説明すると長くなるのでその成果のみを紹介しますが、それは、スペクトル型のセットが与えられたとき、それが既約実現可能かどうか、つまりそれをスペクトル型とするような行列の組で足して O で、既約なものがあるかどうか、ということに関するアルゴリズムのことです。

既約実現可能の判定アルゴリズム (Crawley-Boevey)

Step 1. $\iota \leq 2$ か。 $\iota = 0$ のときはスペクトル型の最大公約数 (スペクトル型に出てくる全ての値の最大公約数) は 1 か。

Step 2. (A_0, A_1, \dots, A_p) に対応するスペクトル型 $(e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(p)})$ を次のように定める。

$$e^{(i)} = ((e_j^{(i,1)})_{j \geq 1}, (e_j^{(i,2)})_{j \geq 2}, \dots), \quad |e^{(i)}| = \sum_k \sum_j e_j^{(i,k)} = n, \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

$(e_j^{(i,k)})_{j \geq 1}$ は A_i のある固有値に関する Jordan ブロックの個数から決まる数を並べたもの。また、 $i = 1, \dots, p$ についての各固有値の固有空間の次元 $e_1^{(i,k)}$ で最大のものは $e_1^{(i,1)}$ 、すなわち

$$\max_k e_1^{(i,k)} = e_1^{(i,1)}$$

とする。

$$d = \sum_{i=0}^p e_1^{(i,1)} - (p-1)n$$

を求める。このとき

$$\begin{aligned} d \leq 0 &\Rightarrow \text{既約実現可能} \\ d > 0 &\Rightarrow \begin{cases} e_1^{(i,1)} < d \text{ となるものがある} \Rightarrow (e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(p)}) \text{ は既約実現不可能} \\ e_1^{(i,1)} < d \text{ となるものがない} \Rightarrow \text{Step 3 へ} \end{cases} \end{aligned}$$

Step 3. 新しいスペクトル型

$$e'^{(i)} = ((e_1^{(i,1)} - d, e_2^{(i,1)}, e_3^{(i,1)}, \dots), (e_j^{(i,2)})_{j \geq 1}, (e_j^{(i,3)})_{j \geq 1}, \dots)$$

を作る。 $e_1^{(i,1)} - d = 0$ のときはその固有空間がないと思う。このとき $n' = |e^{(i)}| = n - d < n$ に対して

$n' = 1$ なら既約実現可能で rigid

$n' > 1$ なら **Step 2** へ

これは1ステップ毎に n が確実に下がっていきますから、いつかは終わり、 $n' = 1$ か $d \leq 0$ でストップしたものが既約実現可能となります。

岩崎: Step2 にいくんですか?

2 にいきます。

岩崎: 1 は?

ここでやったスペクトル型を作るという操作は、addition と middle convolution でやった結果なんですよ。だから i は変化していない。

岩崎: そうすると、アルゴリズムとしては i が2以下であるようなスペクトル型を与えるのがスタート地点で、Step2 を Step1 と思ってもよい。

そうですね。アルゴリズムっぽい言い方だとそうかもしれないですね。ただ、実際の作業としてはまずスペクトル型をぼんと与えたときにまずやることは Step1 だなと思って Step1 を書いた。

高山: 新しいスペクトル型を作ると言うのが、さっきの middle convolution と私には繋がって見えないのですけれど。どういう風に。

G_j はある列に A_1, \dots, A_p を入れて後は O が入った大きい行列、だからその固有値というのは (j, j) ブロックの $A_j + \lambda$ の固有値と 0 なのでやたら 0 を増やしている。これが G_j の固有値の状態です。それで、 B_j というのはそれをある部分空間に制限したものになるから、固有値はそこからどれかを選んでくることになります。大抵の場合は λ でずらした分だけ固有値がずれて、それだけの固有空間があつて後は $\text{Ker} A_j$ 達でどれだけ減るのかを追跡すれば固有値と固有空間の次元が分かります。

例えば A_j に $-\lambda$ という固有値があると、 (j, j) ブロックにも固有値 0 が出てきて被ることによって固有値 0 の Jordan 細胞のサイズが 1 上がる特別な場合があつて、それを追うことでスペクトル型の変化を追うことができるわけです。

それで、ここで d を引いているのは、 $V = \mathbb{C}^n$ に対し B_j 達が作用する空間を $mc_\lambda(V)$ とすると、 $\lambda \neq 0$ ならば $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ は \mathcal{K} と \mathcal{L} の直和なので

$$\begin{aligned} \dim mc_\lambda(V) &= pn - \dim(\mathcal{K} + \mathcal{L}) \\ &= pn - \dim \mathcal{K} - \dim \mathcal{L} \\ &= pn - \sum_{j=1}^p \dim \text{Ker} A_j - \dim \text{Ker} G_0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $e_1^{(j,1)}$ というのは固有空間の次元だったので、それが 0 になるように調整すると、 $\dim \text{Ker} A_j = e_1^{(j,1)}, \dim \text{Ker} G_0 = e_1^{(0,1)}$ となってくれます。つまり、0 の固有空間の次元が一番高くなるように addition で調整します。そうすると、 p 個については $\dim \text{Ker} A_j = e_1^{(j,1)}$ となっちゃうけど、残りの 1 個については middle convolution のパラメータ λ を上手くとることで一番大きくするから $\dim \text{Ker} G_0 = e_1^{(0,1)}$ となる。そして、middle convolution をすると 1 個の固有空間の次元のみが変化することが分かって、その変化の量がちょうど d になっています。

つまり、こういう数になるべく大きくなるように選んでなるべく階数を下げようということ middle convolution と addition を使って実現する。その結果のスペクトル型がこれになるわけです。それで、下手なスペクトル型ときには d が大きすぎて不可能な状況になってしまうし、上手くいけば d でつつがなく降りてきて 1 階にまでなれば rigid, あるいは $d \leq 0$ となればその時点で既約実現可能。それはなぜか、というと Crawley-Boevey の quiver の表現に帰着させる話なのでブラックボックスですけど。

問2 好きに与えられたスペクトル型についてこのアルゴリズムを適用し、既約実現可能性を判定せよ

自分で適当なスペクトル型を与えてみて、それが既約実現可能かを流してみる。最初はなるべく複雑な方がおもしろいと思いますけど、判定してみると様子が分かると思います。ヒントというかアドバイスとしては、これは Jordan 細胞がある場合を一般に書いていますけれど、全部半単純だと思ってやるのが楽です。つまり $e_1^{(i,1)}$ しかない、 $j \geq 2$ 以上はない。こういう状態でも実質的に何も変わりませんので、こういうスペクトル型を与えてやると多分考え易いと思います。

岩崎: 昨日紹介された rigid は $i = 2$ という Katz の定理がありますよね。それともそれはそのアルゴリズムを使って証明するんですか。それとは独立な話ですか?

このアルゴリズムを使っても証明できるかもしれないですね。でてきた経緯は独立ですけども、数学的に独立かどうかはちょっとわかりません。

岩崎: 理論関係をちょっと知りたかったの。

見かけ上は独立ですけど。

岩崎: 独立に証明できる?

もちろん、このアルゴリズムを使わずに最初は証明されています。それは、各行列毎に相似であれば $i = 2$ を使って一斉に相似になるような行列の存在を示すというやり方で証明しています。

岩崎: だから、Step1 で $i = 2$ かどうかを判定するわけだから $i = 2$ になったらそこで。

$\iota = 2$ でも、昨日やった $n = 4$ で rigid なスペクトル型をリストしたとき 1 個 $\iota = 2$ になるけどダメなやつがあるといったのは、 $\iota = 2$ だけれど d が $e_1^{(i,1)}$ よりも大きくなる場合があるというのに相当しますのでそこでは撥ねなくちゃいけないということがあります。

岩崎: Katz の定理を知らずそのアルゴリズムをやってどこで止まるかという
と階数が 1 になったところで?

d が $e_1^{(i,1)}$ より大きくなった時に撥ねられる。そうでないときはずっとスルーして。

岩崎: そうすると、 $d \leq 0$ となってしまうと既約実現可能ということになりますよね。だから、rigid でも $d \leq 0$ になってそこで終了する場合がありますか?

0 以下になるのは必ず non-rigid な場合です。rigid になるのは $d > 0$ で階数が 1 まで落ちるというやつだけが rigid です。

3 完全積分可能系

残りの時間でこれに関連する完全積分可能系の話をしようと思います。領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の方程式で

$$du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{k=1}^n A_k(x) dx_k$$

となるものを考えます。ここで

$$u = {}^t(u_1, \dots, u_N), \quad A_k(x) = (a_{ij}^k(x))_{1 \leq i, j \leq N}$$

で、 $a_{ij}^k(x)$ は D 上正則です。これは u を未知関数ベクトルとする連立の偏微分方程式で、ばらして書けば

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k(x) u \quad (1 \leq k \leq n),$$

あるいはさらに未知関数ベクトルの成分毎に書けば

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^k(x) u_j \quad (1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq N)$$

となります。こういう方程式を線型 Pfaff 系と言って、これは偏微分方程式系で、偏微分方程式系の解空間は一般には無限次元なんだけれども上手く連立されていることによって解空間が有限次元、今なら次元は N になって、非常に常微分方程式と近い方程式になっています。それで、近いところと違うところがあって、そこが私はおもしろいと思うのですけど、近いから調べやすく、調べやすいけど違ってくる、その違いがなかなか楽しい。

この方程式は勝手に a_{ij}^k を与えても解が存在しないので、解が存在するための条件と言うのがあります。微分方程式の解は正則関数で C^2 級になっているから $\partial_{x_l} \partial_{x_k} u = \partial_{x_k} \partial_{x_l} u$ という条件が必要になります。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(A_k u) = \frac{\partial}{\partial x_k}(A_l u) \Leftrightarrow \frac{\partial A_k}{\partial x_l} + A_k A_l = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} + A_l A_k$$

となつてなくてはならない。これを、完全積分可能といいます。この行列関数の組がこの条件を満たしていなければ解はありません、またこれを満たしていれば解があるということは別に証明できます。ということで、これは解が存在するための必要十分条件となります。

常微分方程式では係数に好きな関数を与えても解がありますが、線型 Pfaff 系では勝手に与えたやつは大体解がなくて、こういう非常に難しい条件をクリアする A_k 達を絶妙に与えたときにだけ解があるということになります。だから、完全積分可能系においては、方程式を与えるというところから難しいわけです。

これが、まず大きな違いでそれから特異点集合がまた面白くて、常微分方程式は1変数で1変数関数の特異点というのは点ですけれども、これは2変数以上になりますから、ある正則関数の零点集合と言うのが特異点集合になるから広がりを持っているわけです。つまり $a_{ij}^k(x)$ というものの特異点集合、何か超曲面があつて、それが特異点集合になっているという状況を考えるので、これも1変数の時との非常に大きな違いです。

超曲面というのは、1つの正則関数が0になるような点の集合でそれを S とします。それで今、特に言っていないけど全体として $\mathbb{C}P^n$ みたいなのを考えていて、ここの中に超曲面があるというような状況を考えていて、 $S = \bigcup S_j$ と既約分解する。だから、多項式の零点集合が S で、それを既約分解した時の一つ一つの既約多項式の零点集合が S_j というような状況を考えてもらいます。

さて $\gamma, \gamma' \in \pi_1(\mathbb{C}P^n \setminus S, b)$ で、ともに S_j を1周し、他の S_k を回らないものとしします。と言いましても1変数のときと違って、 S_j というのは点でなく広がりを持っているので回ると言っても色々ありますが、1変数の時に紹介したように、 $\gamma \sim \gamma'$ ということが示せます。この話は局所モノドロミーを定義するときに使ったわけですが、多変数でも同じようになっているので、まずモノドロミー表現

$$\rho: \pi_1(\mathbb{C}P^n \setminus S, b) \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$$

を考えることができる。それで、こういうモノドロミー表現があつたとき、何でも良いから S_j を1周する道 γ を持ってきて、共役類 $[\rho(\gamma)]$ を考えたら、これは S_j のみで決まります。これを S_j における局所モノドロミーと呼びます。そうすると、常微分のときにずっと説明していたのと同じ舞台設定ができて、表現があつて、それに対して局所モノドロミーという概念ができたから、局所モノドロミーを指定したとき表現が決まるか、という問題を設定することができ、rigidity に関して同じ枠組みで議論することができます。

それで、常微分のときにはスペクトル型から計算できる rigidity 指数という非常にありがたい量があつて、それが2であるかどうかを見れば rigid かどうかを判定できたわけです。多変数の場合にそのようなものがあるかということを考えますと、常微分のときには

基本群の表示が非常にシンプルで、 $p+1$ 個の生成元 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ に対して $\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_p = 1$ という関係式しかないというものだった。なので、結局考えるものは $p+1$ 個の行列があつて、その共役類が指定されていて、それらを全部掛けたら単位行列になる組があるか、という問題として設定されていた。こういうわけですけど、今度は $\pi_1(\mathbb{C}P^n \setminus S, b)$ というのが、 S が広がりを持っていることによって幾何学的な形状が色々変わっていますから、これは S 毎に全然違って来るわけです。そうすると、全ての場合に共通するような設定はできないので恐らく、そういう指数があるかどうかは知りませんが、ともかく常微分のときのようにこの数です、というのは存在しないと思われる。あるいは一方で、rigidity は常微分の時とはスペクトル型で決まって、固有値の特殊値というのはあまり関係がなかった。この場合でも固有値の特殊値というのはあまり関係しないのでできるというのは似ているところです。

例えば、次のような $\mathbb{C}P^2$ 上から次の超平面を除いた空間は、Appell の F_1, F_2, F_3, F_4 とか色々な関数の微分方程式の定義域となるが知られていて、考えることになかなか意味があります (図4)。

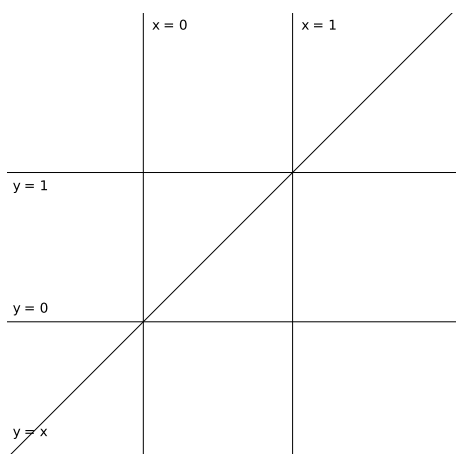


図 4: $xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0$

それで、私は大学院生のとき高山先生が Gérard-Levelt の論文を読んでいるのを聞いて覚えていますけど、下手に因子を与えると方程式は全部、初等関数しか解を持たない。それで初等関数以外の意味のある解を持つ一番小さいやつがこれだ、みたいなことを多分書いてあったんじゃないかと思うのですが。こういう風に、2次元だと、2本が交わる場所を正規交叉と言って、こういうところを回る2つの道は、どっちを先に回っても良いという可換性を持っているので、モノドロミー表現も可換になって、可換な行列は一斉に三角化できて可約になってしまうという話です。だから、意味のあるものを作ろうとしたらこういう風に3本以上交わるような点を持つような配置を持ってこなくてはならない、というような話だったと思います。

岩崎: すみません。今因子で1位の極を持っているようなのを考えているのですか。

実は考えていますけど、単に今は π_1 の話をしようと思っっているから、これからはそう
です。

今書いている図ですけど、実は実4次元空間の中の話を書けないので実2次元として
書いているから色々嘘なんですけど、ここでこういう因子を除いた補空間の基本群の
元を作ろうと思ったら、ある面で切って(図5)、これは線に見えるけど、実際は面だか
ら、その上に b がのっけていて、因子との交点が抜けているわけです。それで、この中でそ
れらの交点を回ってくる道を取ってきて b から遠いところから順に $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ とする。こ
れが生成元になって、このうち γ_1 と γ_2 の交点は正規交叉になっているので可換になっ
ていることが分かります。おなじように γ_4 と γ_5 も可換であることが分かって、それ以外は
3本で交わるようになっているので3つの元のサイクリックな式が出てきます。つまり、

$$\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus S, b) = \left\langle \gamma_1, \dots, \gamma_5 \left| \begin{array}{l} \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1, \gamma_4\gamma_5 = \gamma_5\gamma_4 \\ \gamma_1\gamma_3\gamma_5 = \gamma_3\gamma_5\gamma_1 = \gamma_5\gamma_1\gamma_3 \\ \gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_3\gamma_4\gamma_2 = \gamma_4\gamma_2\gamma_3 \end{array} \right. \right\rangle$$

という群になります。この関係式を求める方法は Zariski-van Kampen という定理があり
まして、例えば、特異点の数理というシリーズの4巻目 [8] にきちんと書かれていて、そ
れを使うとどういう風に生成元を取って、それに関する基本関係式がどうなるか、とい
うことを求めることができます。そして、それを実行すればこの様な表示が手に入ります。

だから、こういう因子を特異点に持つような線型 Pfaff 系のモノドロミー表現を考えよ
うと思うと、 γ_j に沿った解析接続の行列を M_j と置けば、 M_1, \dots, M_5 を決めれば表現は
決まりますが、常微分の時にはそれら全部の積が単位行列という関係式だけだったけれ
ども、今回は基本群の関係式に付随する条件を満たさなければいけなくなります。だか
ら、非常に条件がきつくなって存在しにくくなり、存在するとしたら決まり易くなる
ということが分かります。つまり、多変数で考えた方が存在はしにくいけど、あったとし
たら rigid になり易い。ということで、Appell の F_1, F_2, F_3, F_4 みたいなのをこの上の方程式
だと思ったとき、それぞれスペクトル型は決まっているから、それを満たすような行列
の組を求めなさいという鬼のような計算をしますと、ほぼ rigid であるというようなこ
とが言えます [4]。そこは時間がないので詳しくは言えませんが、とにかく条件が増える
ことによって特異点の幾何学的な形状が表現、あるいは解の多価性を規定している状況が
現れて、そのことによって方程式は存在しにくくなるし、存在したら決まり易くなる
ということになっています。

それで、最後に middle convolution を多変数の場合にも定義します。それは、1つ変
数を選んでそれを x_i 方向とすると、その方向に関する middle convolution をすること
になります。その発想は、常微分のときのように (A_1, \dots, A_p) から (G_1, \dots, G_p) 、そして
 (B_1, \dots, B_p) に移るという操作を見掛け上追跡するだけではなく、背後にある解析的など
いう変換をしたか、ということを考えて元の完全積分可能系の解を Riemann-Liouville
変換をして、その満たす方程式から既約部分を取り出す、という操作を Pfaff 系に対しても
実現することを考えるというようになっていきます。1個だけ例をお見せして、それで終
わります。

$$du = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{dy}{y-1} + A_3 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_4 \frac{dx}{x-1} + A_5 \frac{dy}{y} \right) u, \quad A_1, \dots, A_5 \in M(n, \mathbb{C})$$

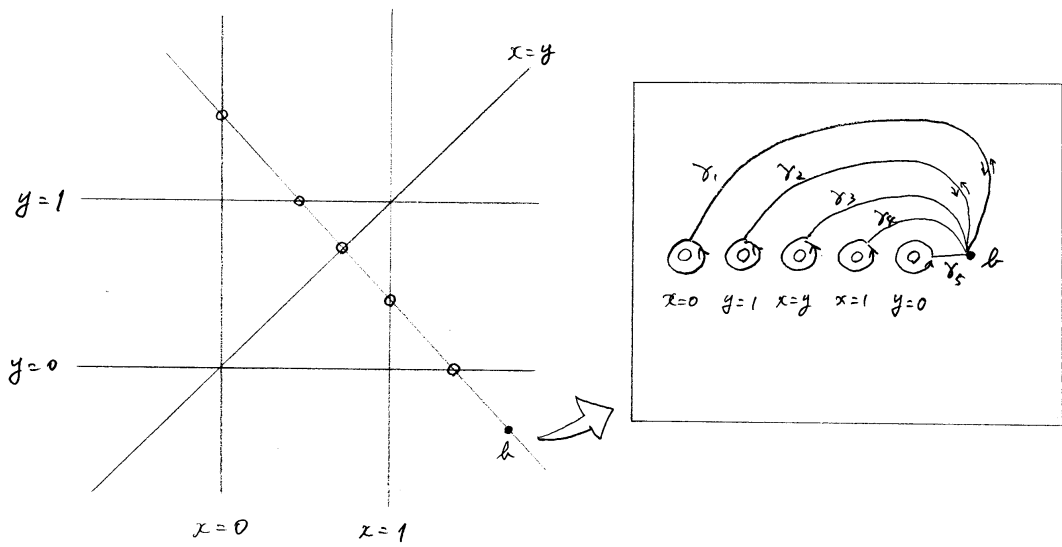


図 5: $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus S, b)$ の生成元

このような対数形式で書けているような線型 Pfaff 系を考えます。これは完全積分可能としておく。だから、問として

問3 この方程式の完全積分可能条件を書き下せ。

を与えておきます。これは定数行列の間関係式になって、それを書いてみるというのはよい練習問題になると思います。それで、 x 方向の middle convolution というのは、 x の方程式だと思って middle convolution をするというをまずします。つまり A_1, A_3, A_4 にとり留数行列に対して G_1, G_3, G_4 を作る。すなわち

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda & A_3 & A_4 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ A_1 & A_3 + \lambda & A_4 \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ A_1 & A_3 & A_4 + \lambda \end{pmatrix}$$

であって、これは常微分のときにやったやつです。このとき y 方向について、 G_2 と G_5 が自明ではない話ですが

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_2 & O & O \\ O & A_2 + A_4 & -A_4 \\ O & -A_3 & A_2 + A_3 \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} A_3 + A_5 & -A_3 & O \\ -A_1 & A_1 + A_5 & O \\ O & O & A_5 \end{pmatrix}$$

と定義されて、 (A_1, \dots, A_5) を (G_1, \dots, G_5) に置き換えた完全積分可能系が得られます。だから、もとが完全積分可能だと新しいやつも完全積分可能で、これに伴って x 方向の G_1, G_3, G_4 に関して $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ が求まって、このとき G_2 と G_5 も上手く $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ で割れる、つまり $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ は G_2, G_5 の不変部分空間になっている。このとき既約成分を取り出してあげるとそれが middle convolution になっているということになります。

聴講者: G_2, G_5 を決める指針というのは?

元の微分方程式の解の Riemann-Liouville 変換、つまり $(x-t)^\lambda$ を掛けて積分するみたいなことをします。これは、 y の方程式もみたら、その y の方程式がどう変化するかということを追跡することで得られます。

聴講者: ではそっちの方を見ないと...

分からない。

例えば、Appell の F_1, F_2, F_3, F_4 というのは、 A のサイズが 1 の場合から addition と middle convolution を繰り返すことによって得られます。あるいは、次のように切ると (図6)、4 点を特異点を持つような常微分方程式が出ますが、そのうち $x = 0, 1, \infty$ を固定しておくと、4 点目の特異点は切る場所によって動くわけです。しかし、完全積分可能系があればこれはモノドロミーが決まっています、動く特異点に関係なく決まっていますので、これはモノドロミー保存変形を与えているとすることができるわけです。つまり、 x 方向の常微分があつて 4 点以上特異点を持っている時には、4 点目以降の特異点に関する偏微分方程式を変形方程式として手に入れることができるのだけど、この場合は middle convolution によって、その変形方程式を作ることができる。 A_2, A_5 とかを使つ

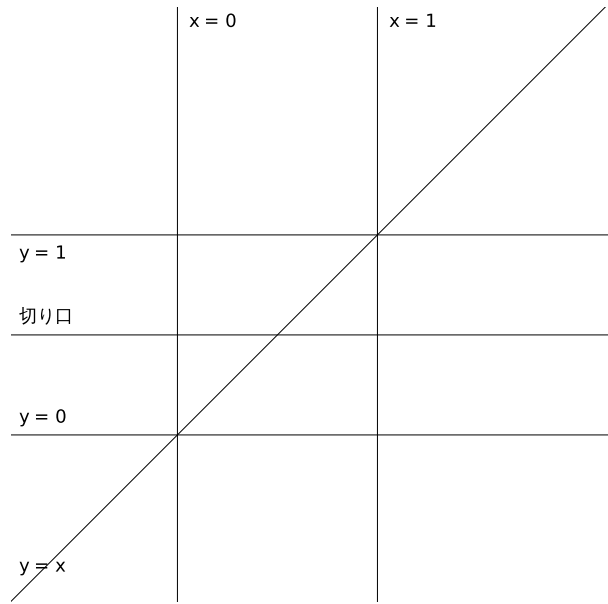


図 6:

て有理的な変形方程式を rigid な方程式から作ることができるというような話とすることもできます。

それで、興味がある方はこの middle convolution をどう作るかという話を書いた論文 [2] を持ってきましたので言っていただければお渡し致します。それから、Appell の F_4 をこのように π_1 の表現でスペクトル型が決まっているものと思うと rigid になるということを書いた論文 [3] がありますのでついでにこれも差し上げたいと思います。以上です。

参考文献

- [1] W. Crawley-Boevey: On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero, *Duke Math. J.* **118** (2003), 339-352.
- [2] Y. Haraoka: Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Stud. Pure Math.* **62** (2012), 109-136.
- [3] Y. Haraoka and Y. Ueno: Rigidity for Appell's hypergeometric series F_4 , *Funk. Ekvac.* **51** (2008), 149-164.
- [4] Y. Haraoka and T. Kikukawa: Rigidity of monodromies for Appell's hypergeometric functions, *Opuscula Mathematica.* **35** (2015), 567-594.
- [5] 原岡喜重: 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015年9月出版予定.
- [6] N. M. Katz: *Rigid Local Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

- [7] T. Oshima: Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs, **28**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2012.
- [8] 徳永浩雄, 島田伊知朗: 基本群と特異点, 代数曲線と特異点 (特異点の数理4), 共立出版, 2001, 1-156.

Pfaff系の不確定特異点における漸近解析

小池達也 述

紫垣孝洋 記

2014.9.2, 9.3

今回の話は真島先生（お茶の水女子大学）が書かれたシュプリングアのレクチャーノート [M1] の入門的な紹介をします。多変数の漸近解析と、その微分方程式への応用という話になります。特に最近の研究の動向を考えてこれにしたというわけではなく、かなり個人的な理由というか、高山先生と数年前に A 超幾何系の研究をしていた時、多変数の漸近解析について僕が良く知らなかったので勉強してみようというのが（理由の）一つです。あと一変数の常微分方程式でも非線形の場合だと漸近展開とか summability を考えたとき、2つのスケールが出てくることがあります。座標変数を x にすると、 x と $e^{-1/x}$ の2つのもので展開されるといったとがあり、このことも多変数の漸近展開についてよく知っておきたいと思った動機の一つです。最近、不確定特異点を持つ偏微分方程式系の研究が進展しているようなので、知っていても無駄ではないと思うのですが。

ということで僕の話は2つになります。1つは漸近展開についてです。もう1つは微分方程式への応用です。初日の9月1日に前者、二日目の9月2日には後者についてお話しします。漸近展開の方は多変数の話をしましたが、2変数に限ります。1変数の場合の漸近展開については見たことがある人も多いと思いますが、の復習を少ししてから、その次にこの本に書いてあることの2変数の場合の簡単な紹介をしようと思っています。

1 漸近展開

1.1 1変数の場合

最初は1変数の場合を簡単に振り返ります。証明はほとんどしません。Wasow の本 [W, pp.30-43] を見てください。微分方程式を考える上で漸近展開は、線型常微分方程式の場合だと特異点の近傍で解を考えた場合に出てきます。9月1日の原岡先生のお話の中で確定特異点の場合について説明がありました。確定特異点の場合は級数解を構成するとそれは収束していました。単独方程式の場合にはフロベニウスの方法などで、 \log が出てくるかもしれ

ませんが、収束級数が得られます。不確定特異点の場合は少し事情が異なります。例を一つ挙げてみます。微分方程式

$$x^3 \frac{d^2 u}{dx^2} + (x^2 + x) \frac{du}{dx} - u = 0 \quad (1.1)$$

を考えます。未知関数を u とし、独立変数を x として、複素平面上で考えています。2階導関数 $d^2 u/dx^2$ の係数が x^3 なので、原点はこの方程式の不確定特異点です。原点の近傍での解を作るために、解が級数展開できると仮定して方程式に代入すると、係数に関する漸化式が得られ、それを解くことで

$$u = \hat{u}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$$

という解があることがわかります。ところが係数は $n!$ ですから、この級数は収束しません。原点の近くで全く収束しない形式べき級数解がこのようにして得られるのですが、この形式級数がなにか解を表しているのかどうか問題になるわけです。収束していればその級数で1つの関数が得られると考えられるわけですが、このような収束しない級数は解の漸近展開としてとらえます。

実は (1.1) の解は次のようになります：

$$u_1(x) = e^{-1/x}, \quad u_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt.$$

(2階の方程式では一方の解がわかると求積法として良く知られた方法で、もう一方の解を求めることができます。今の場合、 u_1 から u_2 を求めることができます。) この二つの解のうち、 u_2 と \hat{u} が関係しています。解 u_2 において

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

という原点での Taylor 展開を代入して積分と和の順序を交換すると

$$u_2(x) \stackrel{\text{formal}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-t/x} dt = \hat{u}(x)$$

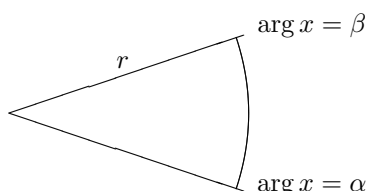
となります。ただし Taylor 展開の収束半径は 1 ですから、積分区間全体では展開は成立していません。また、積分と極限の順序交換もしていますし、最初の等号は形式的なものです (注 1)。二つ目の等号はガンマ関数の定義から従います。形式的な計算で $u_2 \stackrel{\text{formal}}{=} \hat{u}$ となるので、ここから u_2 と \hat{u} は何か関係があるだろうということが想像できます。これを次のようにとらえます：

$$u_2(x) \sim \hat{u}(x) \text{ in } S(-\delta, \delta; r) \quad (0 < \delta < \pi/2, \quad 0 < r \ll 1) \quad (1.2)$$

(注 1) 講義では形式的な等号であることを表すときに “ $\stackrel{\text{formal}}{=}$ ” という記号を用いていましたが、出力の都合で講義録では “ $\stackrel{\text{formal}}{=}$ ” を用いました。

記号の意味を説明します。まず $S(-\delta, \delta; r)$ は複素平面内の角領域を表わします。

$$S(\alpha, \beta; r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg x < \beta, \quad 0 < |x| < r\}$$



ただし、周は含まず、とくに原点も除いています。また簡単のため以下では $\beta - \alpha < 2\pi$ とすることにします(注2)。以下、角領域をこの記号で表します。式(1.2)に表われる角領域は開き角が $-\delta$ から δ ですから、正の実軸について対称になります。ついでにいくつか記号を導入しておきます。

$$\bar{S}(\alpha, \beta; r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \arg x \leq \beta, \quad 0 < |x| \leq r\}$$

と定義します。領域 $S(\alpha, \beta; r)$ に(原点を除く)周を付け加えたもので、 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ での閉包です。そして、2つの角領域 $S(\alpha, \beta; r)$ と $S(\alpha', \beta'; r')$ について

$$S(\alpha', \beta'; r') \subset\subset S(\alpha, \beta; r) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bar{S}(\alpha', \beta'; r') \subset S(\alpha, \beta; r)$$

と定義します。これは $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, $0 < r' < r$ と同値です。さらに、角領域 S (といった場合は適当な α, β, r を考えています) に対して $\mathcal{O}(S)$ で S において正則な関数全体を表わすことにします。

これらの記号のもとで、 $u_2(x) \sim \hat{u}(x)$ の \sim がどういう意味か定義します。

Def 1.1. 角領域 S , $f(x) \in \mathcal{O}(S)$, $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ (この $\mathbb{C}[[x]]$ は形式巾級数環を表わします) に対して、 f が S において \hat{f} に漸近展開される(記号では $f(x) \sim \hat{f}(x) \text{ in } S$) ということを次式で定義。

$$\forall N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall S' \subset\subset S, \sup_{x \in S'} \left| \frac{1}{x^N} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right) \right| < \infty.$$

これは次に同値。

$$\forall N \in \mathbb{N}_0, \forall S' \subset\subset S, \exists C_{N, S'} > 0 \quad \text{s.t.} \quad \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \right| \leq C_{N, S'} |x|^N \quad (x \in S').$$

(注2)一般の α と β の場合は \log の Riemann 面で考えます。

この定義でべき級数 \hat{f} は収束することを仮定していませんが, 第 $N-1$ 項までの有限和 $\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ ともとの f との差が原点の近傍では $N-1$ より 1 つ大きい N 乗のオーダーで押さえられるという状況になっています. この $\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ は有限和ですから (関数となっていて), もとの f を近似しているものとしてとらえることができます. もっとも近似でべきを上げれば上げるほど $|x|^N$ は小さくなりますが定数の $C_{N,S'}$ はたいいて大きくなります. そのため, 近似として使う場合には N を大きくしすぎると誤差が大きくなることから適当な N で打ち切って使います.

この定義に出てくる $\{a_n\}$ は $f(x)$ から一意に定まります. 実際

$$a_0 = \lim_{S' \ni x \rightarrow 0} f(x), \quad a_1 = \lim_{S' \ni x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a_0}{x}$$

などが, 定義の評価式に $N = 1, 2, \dots$ を代入するとわかります. 従って $\sum a_n x^n$ と $\sum b_n x^n$ がそれぞれ漸近展開であれば, $a_n = b_n$ となります.

問 1. 漸近展開 (1.2) が成立することを示せ.

いくつか大事な性質を証明なしで挙げます.

Prop 1.2. $f \sim \hat{f}, g \sim \hat{g}$ in S のとき, S において次が成立.

$$(i) f + g \sim \hat{f} + \hat{g}, \quad fg \sim \hat{f}\hat{g} \quad (ii) \frac{df}{dx} \sim \frac{d\hat{f}}{dx}$$

Prop 1.3. 角領域 S と $f \in \mathcal{O}(S)$ に対して次の (i) から (iii) は同値.

(i) f が S において漸近展開される.

(ii) $\forall S' \subset\subset S, \forall n \in \mathbb{N}_0, \lim_{S' \ni x \rightarrow 0} \frac{d^n f}{dx^n}$ が存在.

(iii) $\forall S' \subset\subset S, \forall n \in \mathbb{N}_0, \sup_{x \in S'} \left| \frac{d^n f}{dx^n} \right| < \infty$

そしてこのとき $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n!} \lim_{S' \ni x \rightarrow 0} \frac{d^n f}{dx^n}$$

と定めると

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ in } S$$

が成立.

漸近展開できる関数 f に対して漸近展開した級数 \hat{f} を対応させる写像を Taylor map と言いますが, Prop1.2 は Taylor map は足し算・掛け算・微分を保つことを意味しており, 微分方程式への応用を考える上で便利な性質です. なお Prop1.2 (ii) は強い性質で, 複素平面内の角領域で考えているから成立します. 実軸上だけの漸近展開も同じようにして定義できますが, その場合はこの性質は満たされません.

問 2. 実軸上でのみ漸近展開を考えた場合は, Prop1.2 の (ii) は成立しない. 例を挙げよ.

(ヒント: $f(x) = e^{-1/x} \sin(e^{1/x})$ を $x > 0, x \rightarrow 0$ として考えよ.)

注意 1.4. $\mathcal{A}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{S \text{ で漸近展開される正則関数}\}$ について,

$$T : \mathcal{A}(S) \ni f(x) \mapsto \hat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$$

は全射 (Borel-Ritt の定理). ただし, 一般には T は単射ではない.

ですから, どんな形式べき級数を持ってきても, それを漸近展開とするような正則関数が必ず存在します. 単射でない例として, 例えば S を右半平面とすると, $e^{-1/x}$ は 0 に漸近展開される関数です. 従って, $f \sim \hat{f}$ のとき, $f + e^{-1/x}$ も同じ \hat{f} に漸近展開されます. (この一意には定まらないことと Stokes 現象が関係してきます.)

1.2 2変数の場合

では 2 変数の場合の漸近展開に進みます. 多変数の場合は角領域の直積を多重角領域と呼びます. つまり, S_1 と S_2 を角領域として, $S = S_1 \times S_2$ を多重角領域と呼び, $(x_1, x_2) \in S$ として考えます. 1 変数の場合と同じく次の記号を定義します: S_1, S_1', S_2, S_2' を角領域とし, $S = S_1 \times S_2, S' = S_1' \times S_2'$ とおく. このとき

$$S' \subset\subset S \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S_1' \subset\subset S_1, S_2' \subset\subset S_2.$$

1 変数の漸近展開を 2 変数の場合に素直に一般化させると次のような定義が考えられます (ただし, この定義はこの講義では使いません. 説明のために導入します).

Def 1.5. 多重角領域 S と $f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(S)$ に対して,

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{m, n \in \mathbb{N}_0} a_{mn} x_1^m x_2^n \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]] \quad \text{in } S$$

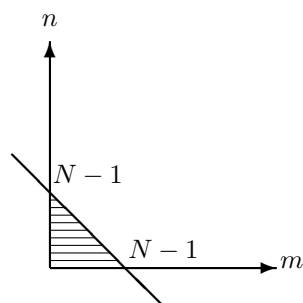
であることを次で定義.

$$\forall S' \subset \subset S; \quad \forall N \in \mathbb{N}_0;$$

$$\sup_{(x_1, x_2) \in S'} \frac{1}{\|x\|^N} \left| f(x_1, x_2) - \sum_{m+n \leq N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n \right| < \infty.$$

ここで $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ とした.

この定義は, 真島先生のレクチャーノートによると, Hukuhara や Ramis-Sibuya の研究で使われたそうです. この定義は 1 変数の場合に近い定義ですね. N 乗未満のものを足し算しておいて, それを差し引いたものが N 乗程度であるという条件になっています.



図の左下の三角形の部分 (斜線部) を差し引いて考えています. これはこれで悪くはないのですが, 1 変数のときの漸近展開が持っていた性質のうち微分に関するものを満たしません.

注意

関数 f が Def 1.5 の意味で漸近展開されていたとしても, f の導関数がそうなるとは限らない.

反例については [HS] の 3 節を見てください. 1 変数の場合には Prop1.2(ii) にあるように $f \sim \hat{f}$ ならば $f' \sim \hat{f}'$ が成立していました. 微分方程式への応用を考えるうえでは, 微分と漸近展開の可換性が一般に成立しないとなると, 使い勝手が悪くなります.

ところが, この論文 [HS] では次の性質も証明されています.

注意

関数 f および f の全ての導関数が Def 1.5 の意味で漸近展開されることと, これから述べる真島が定義した強漸近展開可能であることは同値.

このことから真島先生の定義した多変数の漸近展開が良い性質を持っていることがわかります.

さて、定義を紹介する前に考え方（アイデア）を紹介しておきます。

Def 1.5 では

$$\sum_{m+n \leq N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n$$

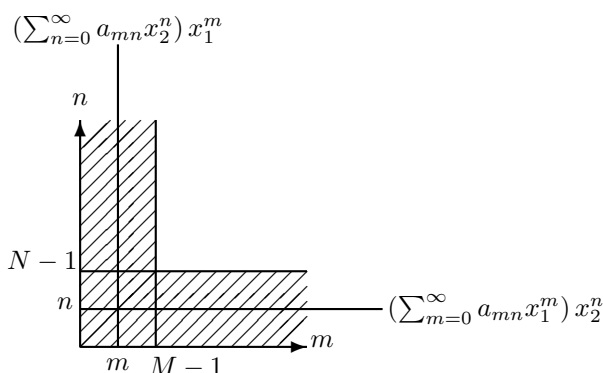
を近似関数と思っていたわけですが、真島の定義では次のように考えます：

アイデア

$M, N \in \mathbb{N}_0$ に対して、近似関数を

$$\text{App}_{(M,N)}(x_1, x_2, f) \stackrel{\text{roughly}}{=} \sum_{m < M \text{ or } n < N} a_{mn} x_1^m x_2^n$$

として考える（実際には右辺は収束するとは限らないので、あくまでも「気持ち」としてです（注3））。



さっきの Def 1.5 での斜線部に相当する、差し引く領域は図のようになります。三角形のような小さい領域ではなくて、 m についても n についても両側に無限に走ります。 $0 \leq m \leq M-1$ なる m を 1 つ止めると、 n についての和なので $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n) x_1^m$ となり、 $0 \leq n \leq N-1$ なる n を 1 つ止めると、 m についての和なので $(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m) x_2^n$ となります。

ただし、先に述べたように、今の場合は $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n) x_1^m$ や $(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m) x_2^n$ の収束は仮定していませんので、このままではダメなわけです。そこで、次のように定義します。

Def 1.6. $S = S_1 \times S_2$ を多重各領域とする。関数 $f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(S)$ が S において強漸近展開される (**strongly asymptotically developable**)(x_1 と x_2 が $H = \{x_1 x_2 = 0\}$ (sector の刃) に近づく) ことを次で定義する：各

(注3) 講義では「だいたいこういう気持ちである」という意味をこめた等号であることを表すときに “ $\stackrel{\text{roughly}}{=}$ ” という記号を用いていましたが、出力の都合で講義録では $\stackrel{\text{roughly}}{=}$ を用いさせていただきました。

$m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $g_m(x_2) \in \mathcal{O}(S_2)$, $h_n(x_1) \in \mathcal{O}(S_1)$, $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ が与えられており, 任意の $S' \subset\subset S$ と任意の $M, N \in \mathbb{N}_0$; に対して,

$$\sup_{(x_1, x_2) \in S'} \frac{1}{|x_1|^M |x_2|^N} \left| f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}(x_1, x_2; f) \right| < \infty.$$

ただし

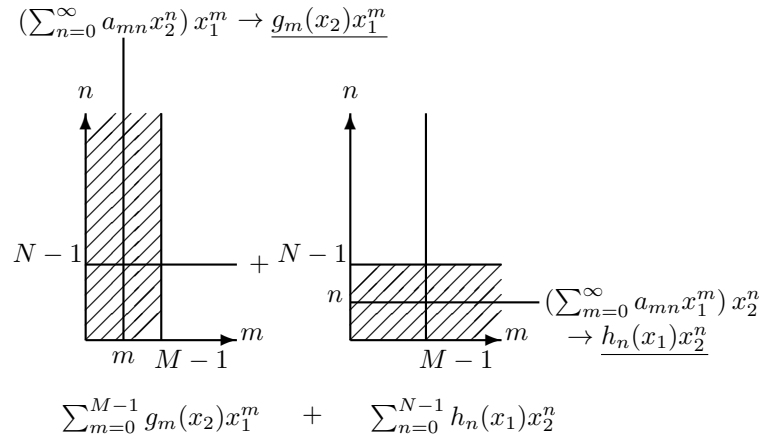
$$\text{App}_{(M,N)}(x_1, x_2; f) := \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2) x_1^m + \sum_{n=0}^{N-1} h_n(x_1) x_2^n - \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n. \quad (1.3)$$

以下では強漸近展開される $f(x_1, x_2)$ に対して

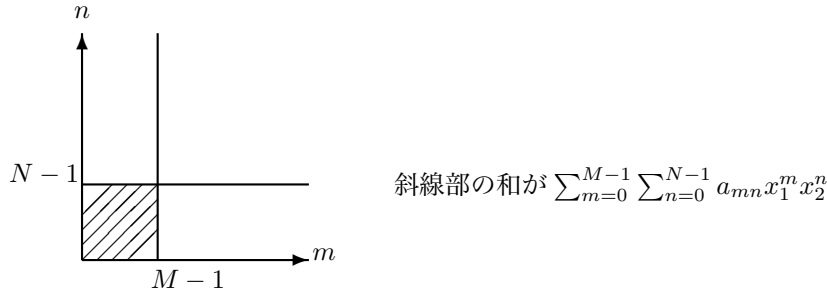
$$\text{TA}(f) = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}_0}$$

とおきます. Def 1.5 の「強漸近展開可能」という言葉は [M1] での strongly asymptotically developable の直訳です (なお, [M2] では単に漸近展開可能と呼んでいます).

アイデアで述べたように近似関数として $\sum_{m < M \text{ or } n < N} a_{mn} x_1^m x_2^n$ を取りたいのですが, m を止めたときの $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n) x_1^m$ や n を止めたときの $(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m) x_2^n$ が収束するとは限りませんでした. そこで, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n) x_1^m$ を $g_m(x_2) x_1^m$ とし, また, $(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m) x_2^n$ を $h_n(x_1) x_2^n$ としました.



図は最初の2項です. この2項を足すと, 左下で長方形の部分が重なるので足しすぎてしまいます. この重なり部分の和はもとのまま $\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} x_1^m x_2^n$ としています.



この交わりを除いたものを近似関数として考えようというわけです。

以上が定義です。見た目には少しややこしいかもしれませんが、(一般の多変数でなく) 2変数に限定したのでまだ比較的に見やすいかなと思います。2変数だと3種類の関数が出てきましたが、3変数だと7種類の関数が出てくるわけです。各座標軸方向で3種類、座標軸ごとの重なりが3種類 (x_1 軸方向と x_2 軸方向の交わり, x_2 軸方向と x_3 軸方向の交わり, x_3 軸方向と x_1 軸方向の交わり), 最後の定数の部分が1種類で合計7種類ですね。4変数だと15種類, 一般に n 変数だと $2^n - 1$ 種類必要になってきます。こんな素朴な書き方だと一般の場合には記号が間に合いませんから, もっと要領の良い書き方もあるのですが, ここでは具体的に書いた形で記号を与えています。

この近似関数は, N を 0 や 1 にすると

$$\begin{aligned} \text{App}_{(M,0)}(x; f) &= \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2) x_1^m \\ \text{App}_{(M,1)}(x; f) &= \sum_{m=0}^{M-1} g_m(x_2) x_1^m + h_0(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{m0} x_1^m \end{aligned}$$

となります。 M や N が増えたときに近似関数がどうなるかを書き下してみると理解に役立つと思います。

注意

データ a_{mn}, h_n, g_m は f によって一意に決まる。

問 3. これを確かめよ。

証明は1変数のときと同様の方法でもできます。後で時間があれば a_{mn}, h_n, g_m はこう書けますという式が出てきますので, それを見てもすぐわかるのですが, 練習だと思って確かめてみてください。

それでは, いくつか2変数の漸近展開の性質を紹介していきます。以下では, 記述の簡単のため

$$\text{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\} \text{ in } S$$

と書けば、 f は漸近展開され、Def1.6 の状況になっているものとします。

Prop 1.7. $\text{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\}$ in $S_1 \times S_2$ とすると

$$\begin{aligned} g_m(x_2) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n \text{ in } S_2 \\ h_n(x_1) &\sim \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m \text{ in } S_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

が成立する。

Def1.6 の説明で、 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_2^n) x_1^m$ を $g_m(x_2) x_1^m$ で、 $(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x_1^m) x_2^n$ を $h_n(x_1) x_2^n$ でそれぞれ表わすと言いましたが、漸近展開の関係が実は成り立っていたのです。

Proof.

$$\text{App}_{(M,N+1)} - \text{App}_{(M,N)} = \left(h_N(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{mN} x_1^m \right) x_2^N$$

また、

$$(\text{左辺}) = (f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}) - (f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N+1)})$$

よって

$$|(\text{左辺})| = \left| h_N(x_1) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{mN} x_1^m \right| |x_2|^N$$

かつ

$$\begin{aligned} |(\text{左辺})| &\leq |f - \text{App}_{(M,N)}| + |f - \text{App}_{(M,N+1)}| \\ &\leq C_{M,N} |x_1|^M |x_2|^N + C'_{M,N+1} |x_1|^M |x_2|^{N+1} \end{aligned}$$

$(|f - \text{App}_{(M,N)}| \leq C_{M,N} |x_1|^M |x_2|^N$ では sector を少し狭めないといけない) より、第 2 式が従う。第 1 式も同様。□

Cor 1.8.

$$\lim_{S'_2 \ni x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_m}{\partial x_2^n} = a_{mn} = \lim_{S'_1 \ni x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h_n}{\partial x_1^m} \quad (1.5)$$

関係式 (1.4) と 関係式 (1.5) は同値になっており (1 変数のときの Prop1.3 と同じ)、これは consistency condition と呼ばれています。

関数 f が強漸近展開可能であれば、Def1.6 のような g_m, h_n, a_{mn} が存在します。逆に g_m, h_n, a_{mn} が与えられたときに、それが漸近展開のデータとなるような f が存在するかしないかという Borel-Ritt 型の定理を考えます。その場合、どんな g_m, h_n, a_{mn} でもいいわけではなくて、2 変数の場合には (1.4) か (1.5) を満たす必要があります。そして、この条件が満たされていれば、強

漸近展開可能な $f(x)$ で $\text{TA}(f) = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}\}$ となるものが存在します (証明は略). このことからこの条件 (1.4) や (1.5) が重要であることがわかります. 微分方程式から係数比較で漸近展開のデータ g_m, h_n, a_{mn} を作る場合でも, これらの性質を満たしていないといけません.

Thm 1.9. 任意の自然数 $k, l \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\text{TA}(f) = \{g_m, h_n, a_{mn}\} \Rightarrow \text{TA}\left(\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_1^k \partial x_2^l}\right) = \{G_m, H_n, A_{mn}\}.$$

ただし

$$G_m(x_2) = (m+1)(m+2)\dots(m+k)\frac{\partial^l g_{m+k}}{\partial x_2^l},$$

$$H_n(x_1) = (n+1)(n+2)\dots(n+l)\frac{\partial^k h_{n+l}}{\partial x_1^k},$$

$$A_{mn} = (m+1)(m+2)\dots(m+k)(n+1)(n+2)\dots(n+l)a_{m+k, n+l}.$$

導関数も同じ意味で漸近展開できる, ということを主張する定理です. 証明は省略します (k, l が 0 や 1 のときは Cauchy の積分公式で導関数を積分で表すということなどをすれば示されます. 他の k, l については帰納的に考えます). Th.1.9 から g や h は f の導関数を用いて書き表わすことができます.

Cor 1.10.

$$\begin{aligned} \lim_{S'_1 \ni x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g_m}{\partial x_2^n} \\ \lim_{S'_2 \ni x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h_n}{\partial x_1^m} \\ \lim_{\substack{S'_1 \ni x_1 \rightarrow 0 \\ S'_2 \ni x_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} &= a_{mn} \end{aligned}$$

問 4. Cor1.10 を $m = n = 0$ の場合に示せ.

問 5.

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}(x; f) \\ &= \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s_M, t_N) \\ & \quad \left(= \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s)^{M-1}}{(M-1)!} ds \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s, t) \right) \end{aligned}$$

を示せ.

この間の関係式は導関数や誤差関数 $|f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}(x; f)|$ を評価するときに便利です (私は [H] でこの関係式を知りました).

以上をもちまして, 第 1 回目 (9 月 2 日) はこれで終わりにします.

(ここから9月3日の分です)

昨日の続きをします. Section 1 は昨日 (9月2日) で終わるつもりでしたが, 二点追加します.

まず一つめです. 昨日は強漸近展開を導入しました.

$$S = S_1 \times S_2 \subset \mathbb{C}^2, \quad H = \{x_1 x_2 = 0\}$$

$f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(S)$ が強漸近展開される

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{TA}(f) = \{g_m(x_2)(S_2 \text{で正則}), h_n(x_1)(S_1 \text{で正則}), a_{mn}(\in \mathbb{C})\}_{m,n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\forall S' \subset\subset S; \quad \forall M, N \in \mathbb{N}_0;$$

$$|f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}(x_1, x_2; f)| \leq C|x_1|^M|x_2|^N \text{ on } S.$$

最後の行の絶対値の中身が積分で書いているというのが問5でした. 最後に1つだけ言おうと思っていて (時間の都合で) 言えなかった補題があります. その前に1つ昨日言い忘れた注意をしておきます.

注意

評価式が (領域を $S' \subset\subset S$ と削らず) S 全体で成立するときは, (漸近展開が) **strict** である (**strictly asymptotically developable**) という.

S で強漸近展開されていれば, その中に入っている S' についてはいつでも strict です.

領域を少し削っているのは, 導関数の評価をするときに領域の端での処理のためです. ところが微分方程式を解くときに積分方程式に直す場合があります. 積分方程式であれば端を削ることを考えずにコンパクトな閉集合の中で考えたいこともあります. その場合に strict ということが出てくるのです. 今回使うかどうかはわかりませんが用語を紹介しておきました.

二つめです. 問5を使うと, 次のことが示されます.

Lem 1.11. 多重角領域 S と $f \in \mathcal{O}(S)$ に対して

f が強漸近展開される

$$\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}_0; \quad \forall S' \subset\subset S; \quad \sup_{(x_1, x_2) \in S'} \left| \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n} \right| < \infty$$

1変数の場合もこのような定理があるのですが, 2変数でも同じようなことが成立するという主張です.

問 6. \Leftarrow を証明せよ.

(\Rightarrow は Cor 1.10 より示すことができる.)

以上で Section 1 は終わりです.

2 Pfaff 系への応用

最初に、一般の n 変数で定理を書きます。独立変数を

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad 1 \leq n'' \leq n$$

とし、領域を

$$S = \prod_{i=1}^{n''} S(\alpha_i, \beta_i; r_i) \times \prod_{i=n''+1}^n D(r_i), \quad H = \{x_1 x_2 \dots x_{n''} = 0\}$$

と定めます。ここに $S(\alpha_i, \beta_i; r_i)$ は角領域であり、 $D(r_i)$ は中心が原点で、半径 r_i の開円板を表わします。そして次のような方程式を考えます：

$$x^{p_i} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = A_i(x) u \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2.1)$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in''}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n \\ x^{p_i} = x_1^{p_{i1}} x_2^{p_{i2}} \dots x_{n''}^{p_{in''}} \quad (\text{multi index}) \\ e_i = \begin{cases} x_i & (1 \leq i \leq n'') \\ 1 & (i > n'') \end{cases} \\ A_i(x) : S \text{ で正則で } (x_{n''+1}, \dots, x_n) \text{ について一様に強漸近展開可能} \\ (\text{「一様に」は押さえる定数が } (x_{n''+1}, \dots, x_n) \text{ によらないという意味}) \\ u(x) : m \text{ 次元ベクトル値関数} \end{array} \right.$$

両立条件も仮定します：

$$e_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x^{-p_j} A_j) + x^{-p_i - p_j} A_j A_i = e_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x^{-p_i} A_i) + x^{-p_i - p_j} A_i A_j$$

$$(1 \leq i, j \leq n)$$

きのう (9月2日) の原岡先生の講義でも両立条件が出てきましたね。ほかにも条件をつけるのですが、大きな設定は以上のとおりです。このような方程式の解がどうなっているかを考えます。ここで n'' までは $e_i = x_i$ ですから $e_i (\partial / \partial x_i)$ は Euler operator になっており、それに x^{p_i} をかけたものになっています。ですから pole としては一次ではない形になっています。

さて、これから述べる定理が成立するための条件として三つのタイプのものがあります。ここではそのうちの一つを紹介することにします。つまり、

任意の $i = 1, 2, \dots, n''$ に対して「 $p_i = 0$ (0ベクトル)」, または「 $p_{ii} > 0$ かつ $A_{i,0} = \lim_{x \rightarrow 0} A_i(x)$ の固有値はすべて異なる」

以上の仮定のもとで次が成り立ちます：

Thm 2.1. 領域 S における原点を端点とする任意の半直線 l に対して

$$\exists S' \subset\subset S \text{ s.t. } S' \cap l \neq \emptyset$$

解の基本解系行列は

$$P(x)x^T e^{x^{-p}H(x)}$$

で与えられる。ただし

$P(x)$ は $m \times m$ 行列で, S' で正則で漸近展開される

$T = (T_1, T_2, \dots, T_{n''}, 0, \dots, 0)$, 各 T_j は $m \times m$ 行列で上三角行列

$$x^T = x_1^{T_1} x_2^{T_2} \dots x_{n''}^{T_{n''}}$$

$H(x)$ は対角行列で, S' で正則で強漸近展開され, $\{H(x), T_1, T_2, \dots, T_{n''}\}$ はどの 2 つも可換

方程式 (2.1) のような Pfaffian の形をしている偏微分方程式系を, 少し強めの特異性を持っているような状況で考えているわけです。そのときに (局所) 解がどういう基本解系行列で与えられるかという問題になります。 x^{p_i} が不在場合にはよく知られてるのですが, x^{p_i} がかかってきたときにどういう形で与えられるかということの問題にしています。不確定特異点であるようなことが期待されているわけです。

定理の主張に出てくる行列の $P(x)$ ですが, (2.1) の p_i の各成分の最大値をもってくと良いのです。つまり $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in''}, 0, \dots, 0)$ について

$$P = \left(\max_i p_{i1}, \max_i p_{i2}, \dots, \max_i p_{in''}, 0, \dots, 0 \right)$$

とします。

この定理の証明はしませんが, だいたいどのようなことをするかというと, 真島さんの Splitting lemma というものを用いて証明します。 $Q_i^{-1} \nabla_i Q_i$ を考えることで, 対角化したり上半三角化したりして簡単な形に変形することで得られます。解のほうのゲージ変換を考えるというわけですね。

$$\left(\nabla_i = x^{p_i} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} - A_i \right)$$

確定特異点じゃなくて不確定特異点のときの常微分方程式のときにも似たようなことをしていましたが, ゲージ変換を何度も繰り返して行列を簡単な形に持っていくという方法で方程式を簡略化させておいて, 簡略化した方程式を解くと, 簡単な方程式であれば解けるので, あとはそれを逆変換すれば良いですね。それと同じような方針でできますが, 今回は Pfaffian になっているので, いろいろな行列の関係 (たとえば A_1 と A_2), つまり両立条件を見ながらやっていく必要があります。

以下, もう少し様子を見るために $m = 1$ として考えます。ですので, u はベクトルでなくスカラーの場合を考えてみます。スカラーですから, 単独

方程式が複数あるという状況になっています。また、簡単のため変数の数も $n = 2$ としておきます。

$m = 1, n = 2$ ($n'' = 2$, つまり $e_1 = x_1, e_2 = x_2$ も仮定)

このとき、改めて方程式を書くと次のようになります：

$$\begin{aligned} x^{p_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u &= A_1(x)u \\ x^{p_2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u &= A_2(x)u \end{aligned}$$

ただし、 $x = (x_1, x_2)$, $p_1 = (p_{11}, p_{12})$, $p_2 = (p_{21}, p_{22})$,

$$x^{p_1} = x_1^{p_{11}} x_2^{p_{12}}, \quad x^{p_2} = x_1^{p_{21}} x_2^{p_{22}}.$$

両立条件は、 (A_1, A_2) が行列でなく普通の関数なので $A_1 A_2 = A_2 A_1$ であることに注意すると)

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x^{-p_2} A_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (x^{-p_1} A_1)$$

となります。

Prop 2.2. 次の解が存在する：

$$u(x) = w(x) x^a e^{x^{-q} g(x)}$$

ただし、 $a = (a_1, a_2)$, $q = (q_1, q_2)$ で、 $w(x), g(x)$ は S で正則で強漸近展開される。

この命題が成立することをこれからざっと見ていきます。

まず、解の形が

$$u(x) = x^a e^{x^{-q} g(x)}$$

であると仮定して方程式に代入し、方程式を書き直します。

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x^{-q} g(x)) &= x^{-p_i} A_i(x) - a_i \\ \Leftrightarrow (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - q_i) g(x) &= x^{q-p_i} A_i(x) - a_i x^q \quad (\diamond) \end{aligned}$$

さて、 q, a や g を決めていきますが、元の方程式は斉次の方程式だったのに対して、今得られた方程式 (\diamond) を g の方程式として考えると非斉次方程式であることに注意してください。この方程式 (\diamond) が

$$g(x) = \sum_{j,k \geq 0} g_{j,k} x_1^j x_2^k$$

と級数展開される解を持つようにするためには右辺の非斉次項に条件が必要となりますが、その条件により q と a を定めます。まず、 q は右辺が正則に

なるようにとります。つまり

$$\begin{aligned} q &= (\max\{p_{11}, p_{21}\}, \max\{p_{12}, p_{22}\}) \\ &= ((p_1, p_2 \text{ の第 1 成分のうち大きい方}), (p_1, p_2 \text{ の第 2 成分のうち大きい方})) \end{aligned}$$

とします。その上で、 (\diamond) の右辺を展開した時に x^q の項がなくなるように a_i を

$$x^{q-p_i} A_i(x) \text{ の } (x_1, x_2) \text{ に関する漸近展開の } x^q \text{ の係数}$$

と定めます。具体的には

$$B_i(x) := x^{q-p_i} A_i(x) = \sum_{j,k \geq 0} b_{j,k}^{(i)} x_1^j x_2^k$$

に対して

$$a_i = b_{q_1, q_2}^{(i)}$$

とします。このようにすると、 $g(x)$ の展開を (\diamond) に代入することで $g_{j,k}$ が順次定まります。

実際に実行してみましょう。方程式内の $x_i(\partial/\partial x_i)$ は Euler operator であることに注意すると、まず x_1 方向の方程式から ((\diamond) で $i=1$ として、展開して $x_1^j x_2^k$ の係数を比較すると)

$$(j - q_1)g_{jk} = b_{jk}^{(1)} - a_1 \delta_{j, q_1} \delta_{k, q_2} \quad (\diamond\diamond)$$

を得ます。同様に x_2 方向の方程式より ((\diamond) で $i=2$ として、展開して $x_1^j x_2^k$ の係数を比較すると)

$$(k - q_2)g_{jk} = b_{jk}^{(2)} - a_2 \delta_{j, q_1} \delta_{k, q_2} \quad (\diamond\diamond\diamond)$$

を得ます。このようにして得られた漸化式 $(\diamond\diamond)$, $(\diamond\diamond\diamond)$ を解くことで $\{g_{j,k}\}$ を定めますが、注意すべきこととしては

- (1) それぞれ $(j - q_1)$ や $(k - q_2)$ で割れば g_{jk} が得られるので、解が 2 通り出てくるが一致しているか (注 4)
- (2) $j = q_1$ や $k = q_2$ のときは (割る数が) 0 になってしまう

といった問題があります。前者はともかくとして (注 5)、後者について見てみると、まず $j = q_1$ のときは、 $(\diamond\diamond)$ から

$$0 = b_{q_1, k}^{(1)} - a_1 \delta_{k, q_2} \quad \Rightarrow \quad b_{q_1, k}^{(1)} = \begin{cases} 0 & (k \neq q_2) \\ a_1 & (k = q_2) \end{cases}$$

(注 4) 両立条件からどちらも一致することがわかります。(問 7)

(注 5) 両立条件からどちらも一致することがわかります。(問 7)

となります。また、 $j = q_2$ のときは、($\diamond\diamond\diamond$) から

$$0 = b_{j,q_2}^{(2)} - a_2 \delta_{j,q_1} \quad \Rightarrow \quad b_{j,q_2}^{(1)} = \begin{cases} 0 & (j \neq q_1) \\ a_2 & (j = q_1) \end{cases}$$

となります。これらの二式が成立していなければなりません。

問 7. これらの関係式が成立していることを示し、 $\{g_{jk}\}$ が定まることを示せ。

ヒント：両立条件を使います。両立条件を B_i で書くと

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} B_2 - q_1 B_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} B_1 - q_2 B_1$$

となることに注意してください。関係式

$$b_{q_1,k}^{(1)} = \begin{cases} 0 & (k \neq q_2) \\ a_1 & (k = q_2) \end{cases}$$

について、 $k \neq q_2$ の方はこの両立条件から従います。一方で $k = q_2$ のほうは、これが成立するように a_1 を決めたのでした。

以上のようにして、形式べき級数解が定まります。

注意

真島先生の本ではここでの方程式より少し一般化された

$$\begin{aligned} x^{p_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + A_1(x) u &= b_1(x, u) \\ x^{p_2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u + A_2(x) u &= b_2(x, u) \end{aligned} \tag{2.2}$$

の形で考えています (右辺も u に依存しています)。

問 8. (2.2) の両立条件が、

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x^{-p_2} a_2) + x^{-p_1-p_2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial u} \right) \cdot a_1 \\ = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (x^{-p_1} a_1) + x^{-p_1-p_2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial u} \right) \cdot a_2 \\ (a_i = -A_i u + b_i(x, u)) \end{aligned}$$

なることを示せ。ここでベクトル値関数

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial a_1}{\partial u}\right)$$

は $m \times m$ 行列となるが, これがどのように定義されているかも考えること. さらに $b_i \equiv 0$ のとき, 以前のものに帰着されることも確かめよ.

きのう (9月2日) の原岡先生の説明にも両立条件の話がありました, それと同様の考え方で求めてみよう, という問いです.

このようにして, 形式解が得られます. これが解の漸近展開のデータであると期待されますが^(注6), 次はそれを確かめようということになります. そのためには, 線形常微分方程式の不確定特異点の場合と同様に, 方程式を積分方程式に直し, 関数空間をしかるべく設定した上で縮小写像 (contraction) の原理を用いるという方法で行います.

微分方程式を積分方程式に直して考察するところは, このままでは少し難しい話になるので, もう少し簡単な場合を考えて, 強漸近展開されていることの証明の流れだけでも見てもらおうと思います.

(縮小写像の原理を用いる) 例

$$u = a(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} a_0(x) + A(x)u + \sum_{m=2}^{\infty} a_m(x)u^m. \quad (*)$$

ただし, $x = (x_1, x_2)$ で, u はスカラーとします. また $A(x), a_0(x), a_m(x)$ は $S = S_1 \times S_2$ で正則かつ強漸近展開可能とし,

$$\lim_{x \rightarrow 0} a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 0$$

とします.

この方程式は微分が入っていない方程式です.

この方程式についても 形式解は作れ, 漸近展開のデータとして期待される $\mathcal{F} = \{g_m(x_2), h_n(x_1), a_{mn}\}$ が得られます. この \mathcal{F} から, 近似関数 $\text{App}_{(M,N)}(x, \mathcal{F})$ が定義できます.

まず, 作用素 L を

$$Lv \stackrel{\text{def}}{=} a(x, v(x))$$

として定めます. 解が存在することは関数空間をしかるべく設定し, その空間内で L が縮小写像となることを用いて示すことができます. この部分も標準的なので省略し, ここではそのようにして解を作ったとして, その解が \mathcal{F}

(注6) 漸近展開のデータのうち $g_m(x_2)$ や $h_n(x_1)$ についても解の形を仮定して, それを代入して両辺比較という方法で求めることができます. ここでは省略します.

を漸近展開のデータとして持つことを示す部分を見てみましょう。まず作用素 $L_{(M,N)}$ を

$$L_{(M,N)}v = L(v + \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F})) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F})$$

として定め、この作用素を関数空間

$$V_{(M,N)}[\alpha', \beta'; r] = \left\{ f(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(\overline{S'}) \left| \sup_{x \in \overline{S'}} |x_1^{-M} x_2^{-N} f(x_1, x_2)| < \infty \right. \right\}$$

の上で考えます。ただし、

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \in \overline{S'}} |x_1^{-M} x_2^{-N} f(x_1, x_2)|, \\ \overline{S'} &= S(\alpha'_1, \beta'_1; r'_1) \times S(\alpha'_2, \beta'_2; r'_2) \end{aligned}$$

としています。この $\|f\|$ は $V_{(M,N)}[\alpha', \beta'; r]$ のノルムになっています。ノルムは (M, N) で重みをつけています。

さて、これらを用いると議論の流れは次のようになります（以下 $x = (x_1, x_2)$ ）。

- (1) 十分大きいすべての M, N について $L_{(M,N)}$ が $V_{(M,N)}[\alpha', \beta'; r]$ contraction(縮小写像)であることを示す (α', β', r も注意して選ぶ)。
- (2) すると $L_{(M,N)}v_{(M,N)} = v_{(M,N)}$ となる $v_{(M,N)} \in V_{(M,N)}[\alpha', \beta'; r]$ が存在することがわかる。 $L_{(M,N)}$ の定義により、これは

$$L(v_{(M,N)}(x) + \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F})) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F}) = v_{(M,N)}(x)$$

に同値。

- (3) $u_{(M,N)}(x) := v_{(M,N)}(x) + \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F})$ とすると、 $Lu_{(M,N)} = u_{(M,N)}$ が成立。従って $u_{(M,N)}$ は方程式 (*) の解。故に（一意性から） $u(x) = u_{(M,N)}(x)$ 。
- (4) さらに

$$u(x) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F}) = u_{(M,N)}(x) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F}) = v_{(M,N)}(x)$$

であるから、

$$u(x) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F}) \in V_{(M,N)}[\alpha', \beta'; r]$$

となり、関数空間（特にノルムの）定義から

$$\sup_{x \in \overline{S'}} |x_1^{-M} x_2^{-N} (u(x) - \text{App}_{(M,N)}(x; \mathcal{F}))| < +\infty$$

が成立する。

このようにして、強漸近展開となることが示されます。最後の部分は時間の関係もあって、かなり駆け足になりましたが、議論の雰囲気が伝われば幸いです。これで終わりにします。

3 演習

3.1 9月2日分・問5

問5 (再掲)

$$\begin{aligned}
 & f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)}(x; f) \\
 = & \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s_M, t_N) \\
 & \left(= \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s)^{M-1}}{(M-1)!} ds \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s, t) \right)
 \end{aligned}$$

を示せ.

解答

$$\int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s_M, t_N)$$

を $R_{M,N}$ とおきます. そして最後の積分に注目すると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_{N-1}} \frac{\partial^{M+N} f}{\partial x_1^M \partial x_2^N}(s_M, t_N) dt_N &= \frac{\partial^{M+N-1} f}{\partial x_1^M \partial x_2^{N-1}}(s_M, t_{N-1}) - \frac{\partial^{M+N-1} f}{\partial x_1^M \partial x_2^{N-1}}(s_M, 0) \\
 &= \frac{\partial^{M+N-1} f}{\partial x_1^M \partial x_2^{N-1}}(s_M, t_{N-1}) - (N-1)! \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M)
 \end{aligned}$$

を得ます. 1つめの等号のあとの形を見ると, 第1項は番号 N が1つ落ちた形になっていて, 第2項は t に全く依存しない形になっています. 第2項で0を代入していますが, これは極限だと思ってください. 2つめの等号では Cor.1.10 を用いています. このことから次を得ます:

$$\begin{aligned}
 R_{M,N} &= R_{M,N-1} - \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \\
 & \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-2}} dt_{N-1} (N-1)! \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M).
 \end{aligned}$$

右辺の第2項について, 被積分関数は t に依存しませんので,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{x_2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{N-2}} dt_{N-1} (N-1)! \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M) \\
 &= x_2^{N-1} \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M)
 \end{aligned}$$

となります. よって,

$$R_{M,N} = R_{M,N-1} - x_2^{N-1} \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M)$$

が成立します。第2項の積分の項は、1変数関数の積分を何回かしたもので、Taylor展開の剰余項となっていることに注意すると、

$$\begin{aligned}
 R_{M,N} - R_{M,N-1} &= -x_2^{N-1} \left(\int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{M-1}} ds_M \frac{\partial^M h_{N-1}}{\partial x_1^M}(s_M) \right) \\
 &= -x_2^{N-1} \left(h_{N-1}(x_0) - \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h_{N-1}}{\partial x_1^m}(0) x_1^m \right) \\
 &= -x_2^{N-1} \left(h_{N-1}(x_0) - \sum_{m=0}^{M-1} a_{M,N-1} x_1^m \right) \\
 &= -\text{App}_{(M,N)} + \text{App}_{(M,N-1)}
 \end{aligned}$$

を得ます。3つめの等号では Cor.1.10 を用いています。

以上より、

$$R_{M,N} + \text{App}_{(M,N)} = R_{M,N-1} + \text{App}_{(M,N-1)}$$

という式を得ます。いまは N について1つ落としましたが、同じようなことをやると M についても1つ落とすことができ、

$$R_{M,N} + \text{App}_{(M,N)} = R_{M-1,N} + \text{App}_{(M-1,N)}$$

も成立しています。 M についても N についても1つずつ落とせますから、次が数学的帰納法によって従います：

$$R_{M,N} + \text{App}_{(M,N)} = R_{0,0} + \text{App}_{(0,0)}.$$

ここで $\text{App}_{(0,0)} = 0$ で、なにも積分しないという意味ですので $R_{0,0} = f(x_1, x_2)$ となります。ですから、

$$f(x_1, x_2) - \text{App}_{(M,N)} = R_{M,N}$$

という示すべき式を得ることができます。

3.2 9月3日分・問7

問7 (再掲)

$\{g_{jk}\}$ が定まることを示せ。

解答

両立条件をみたくことを確かめようという問題でした。途中までは講義のときにすでに書いていました。両立条件を式で書くと

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} B_2 - q_1 B_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} B_1 - q_2 B_1$$

となっていました. ここで

$$B_i(x) = x^{q-p_i} A_i(x) = \sum_{j,k \geq 0} b_{j,k}^{(i)} x_1^j x_2^k$$

より, 係数を比べると,

$$(j - q_1) b_{jk}^{(2)} = (k - q_2) b_{jk}^{(1)}$$

を得ます. $j = q_1$ のときには左辺は 0 です. よって $k \neq q_2$ のとき

$$b_{q_1,k}^{(1)} = 0$$

です. 同じように, $k = q_2$ のときに右辺が 0 ですので, $j \neq q_1$ のとき

$$b_{j,q_2}^{(1)} = 0$$

です. そして $j \neq q_1$ かつ $k \neq q_2$ のときには,

$$\frac{1}{j - q_1} b_{jk}^{(1)} = \frac{1}{k - q_2} b_{jk}^{(2)}$$

を得ます. じつはこれが g_{jk} になります. x_1 方向の式で求めると左辺, x_2 方向の式で求めると右辺となります. どちらも同じ値になっていることがこの両立条件によって従います. $b_{q_1,k}^{(1)} = 0 (k \neq q_2)$ や $b_{j,q_2}^{(1)} = 0 (j \neq q_1)$ という non-trivial な式もこうして両立条件から従うわけです. 1 つだけ両立条件から決まらないものがあって, それが a_1, a_2 だったというわけです.

参考文献

- [H] Y.Haraoka: Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables, Funkcialaj. Ekvacioj, **32**(1989), 365-388.
- [HS] J. A. Hernández and J. Sanz: Gérard-Sibuya's versus Majima's concept of asymptotic expansion in several variables, J. Austral. Math. Soc., **71** (2001), 21-35.
- [M1] H.Majima: *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*, Lecture Notes in Mathematics, **1075**, 1984, Springer.
- [M2] 真島秀行: 漸近解析における消滅定理とその微分方程式への応用, 数学 **33**, 1985.
- [W] W. Wasow: *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, 1965.