Macdonald 多項式とその周辺

野海正俊 述
渋川元樹, 宮永愛子 記

2015.9.1 – 9.2

はじめに

神戸大学の野海です. 「超幾何学校の講師をしてくれ」と頼まれましたので, ま, やることにしたんですけど, タイトルは「Macdonald 多項式とその周辺」ということにさせてもらいました. Macdonald 多項式って聞いたことがある方, 実は良く知っている方とか, 逆に初めて, 全く聞いたことがないという方も居られると思いますが, 「超幾何学校」ということなので, 超幾何函数に関係していなければいけないですよね.

超幾何函数というのは色々なものがあって, 一番普通に, 単に「超幾何」といったら Gauss の超幾何函数だと思いますが, それの拡張というのは様々で, 色々なものがあります. 普通「超幾何函数」というときには微分方程式をベースにして, もちろん色んな側面がありますけれども, 例えば多変数であれば Lauricella の A, B, C, D とか, あるいは Gelfand とか青本流の超平面配置に対応する超幾何函数とか, あるいはもっと一般にするならば A 超幾何函数とか, そういうような流れが一つあります.

多変数の超幾何にも色々あって, 表現論に関係するところでは Heckman–Opdam の超幾何函数というものがあります. これは対称空間の球函数の一般化で, 微分作用素の可換な族があって, それの同時固有函数になっているようなものなんですけれども, そういうものがある. それから行列変数の超幾何函数というものがあって, 例えば統計においては, そういう超幾何が大事になったりします. そういうものが色々あって, それらはお互いに intersection をもっていて, だから一口に「超幾何函数」といっても色んなものがあるわけです.

ここで言っている Macdonald 多項式というのは, 多項式って言ってますけれども, 要は微分方程式ではなく q 差分方程式をベースにする超幾何函数の一つです. さっきの例で言うと, Heckman–Opdam の超幾何微分方程式に相当する q 差分方程式があって, それの同時固有函数になっていて, 特に多項式解になる場合が Macdonald 多項式と呼ばれているものです. それで, タイトルには「その周辺」ってつけてし

まったんだけれども,「周辺」をどこまで話すかって言うと, またそれも色々あるんです.

ともかく Macdonald 多項式というものを一言で言うと, 多変数の q 直交多項式の一族で, 広義には

ルート系 (+ 付加的データ) に付随する Weyl 群不変な q 直交 Laurent 多項式の総称

です. 狭義の意味では,

ルート系の意味で A 型 GL 版の場合

を指して, $P_\lambda(x;q,t)$ とか $P_\lambda(x|q,t)$ と書きます. ここで, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ は n 変数で, x_i は $\mathbb{C}^*$ の変数と思うのが普通ですけど, n 次元の代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の座標になっています. それから $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$っていうのは λ_i は整数で, 状況によって色々ですけど,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$$

という風に大きい順にならんでいて, 全部 0 以上の整数とします. こういうのは「分割」って言いますけれども, 普通「分割」というときは, 自然数を $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ と無限に並べて広義の意味で減少して, 十分先は 0 としたものを指します. こういうのは Young 図形を使って表します. 一行目に箱を λ_1 個並べて, 二行目に λ_2 個並べて, っていう風に描いて, その行数, つまり 0 でない成分の個数を, 分割 λ の成分数といいます. 今の場合 $P_\lambda(x;q,t)$ は, 成分数が n 以下の分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ でパラメータ付けられた, 適当な体 $\mathbb{K}$ の上の多項式で, 対称群の作用で不変なもの. で, 分割 λ を動かすと対称多項式環 $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底をなす, そういうものが Macdonald 多項式です. どういうものかは, 今からだんだん説明していきます. q と t はパラメータなので, 実際には係数体として有理函数体 $\mathbb{Q}(q,t)$ をとるのが標準的かな. ただ状況によって q と t は実数だったり, 複素数だったり, 色んなものに読み替えてやります.

それで今回の講義で話したいことは, 一番として,

Macdonald 多項式 (A 型 GL 版) とはどんなものか.

ということを説明します. 定義と, まぁ「超幾何函数」の一種ですから色んな公式が沢山あるんですけれども, 種々の特徴的な性質としてどういうことが知られているかを紹介するというのが, 一つの目標. Macdonald 多項式の基本事項として知っておいてほしいこととして, どんな性質があるかを紹介します.

二番目は, $\cdots\cdots$ この Macdonald 多項式が登場したのは大体, さっきの Heckman-Opdam の超幾何函数も 1987,8 年の頃なんですけれども, 恰度同じ頃です. Macdonald 自身は p-adic の球函数の理論を出発点にしたんだと思いますが, Heckman-Opdam の場合で言えば, 特にその固有函数が Laurent 多項式になっている場合, Heckman-Opdama の場合は基本函数は指数函数なので指数函数の Laurent 多項式

になってる場合を念頭に置いている訳ですけれども, それの乗法的な variationっていうか, q-analogue を作ろうというので, 大体 1987,8 年頃に Macdonald がこういうものを導入しました. その後色々な進展があって, 90 年代の前半には Macdonald 多項式って, 彼は⋯. ああ, そうか. おしゃべりを始めると色々関係する話があれもこれも出てくるんですけれど (笑). q 直交多項式の重みになるような函数を指定して, それをトーラス上の函数として Laurent 展開したとき (Fourier 展開って言ってもいいですけれども) の定数項の値を決めようという問題があって, 定数項を予想したり, 対応する直交多項式 (適当な q 差分作用素の固有函数になる) について, 内積値に関する予想をいっぱい立てました. いくつかの場合については本人もやっていたと思います.

で, ⋯. 何を言いたかったのかな? えっと, まぁとにかくそういうようなことがあって, 1987,8 年頃 に Macdonald は, ルート系拡張も含めて, 多変数 q 直交多項式の一族, 今でいうところの Macdonald 多項式を導入しました. 彼が提出した予想というのが沢山あって, そういうのが色々な人の貢献で徐々に解かれていったんですけれども.

それで, 90 年代の前半になってから, Cherednikっていう人が, Macdonald の q 直交多項式に対して, アフィン Hecke 環 (あるいはもっというときには二重 (double) アフィン Hecke 環) によるアプローチを始めました. 要するにアフィン Hecke 環の構造論を基礎にして, ルート系に付随するこういう種類の q 直交多項式の理論を組み立て直すことができるという訳です. それをここでは, Macdonald–Cherednik 理論 (まぁ Cherednik がそういうことをやりはじめたんだけれども) と称することにします. あ, 元々 Cherednik 自身は Macdonald 多項式とかそれに対応する q 差分方程式よりは, いわゆる共型場理論の基礎方程式である KZ 方程式[1]っていうのがありますけれども, それの q 版を Cherednik 流に構成したのがあって, そちらがメインなんですけど, それを Macdonald 多項式の理論と関連づけることができる訳です. そういったストーリーを Macdonald 自身が定式化し直したものがあって, それを今ここではアフィン Hecke 環からのアプローチと称しています.

という訳で, 前半では Macdonald 多項式はどんなものかを紹介して, 後半は, これも A 型 GL 版に限って, その場合にアフィン Hecke 環によるアプローチがどういう理論構成になるかということを紹介できればと思っています. 以上を話のメインにしたいと思います.

その他にも色々あってどこが「周辺」かよくわからないけれども,「周辺」も色々あります. ルート系と言っても被約 (reduced) なものに限って考えるか, 被約でないもの (BC 型) に拡張して考えるかということもあって, その場合は Macdonald 多項式に相当する多項式は Koornwinder 多項式と言います. 普通, Gauss の超幾何函数が多項式に退化する場合って Jacobi 多項式ですよね. で, Jacobi 多項式っていうのは次数 n と α, βっていう重み函数に出てくるパラメータがある直交函数系の一族ですけれど. あんまり微分の場合との対応は事細かには言いませんけれど, A

[1]Knizhnik-Zamolodchikov 方程式.

型 GL 版の Macdonald 多項式で言うと, 二変数の A_1 型の場合が, Jacobi 多項式の特別な場合に対応します $\cdots$. あの, Jacobi 多項式ってご存知ということでいいですか? 普通, 重みも色々なとり方がありますけれども, $[0,1]$ 区間でやるんだったら $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ を重み函数にするし, $[-1,1]$ でもいいですけれども, $\alpha=\beta$ の場合は Gegenbauer 多項式, もしくは超球 (ultra spherical) 多項式って言いますね. A_1 型の Macdonald 多項式は, Gegenbauer 多項式の q-analogue に対応します. Gauss に対応する一般の Jacobi 多項式まで含めようと思ったら, こういう話を BC 型に拡張する必要があります. q 差分の世界では 一変数なら Askey–Wilson 多項式, 多変数なら Koornwinder 多項式ということになって, こういうのも「周辺」ですが, 今回はそういうところまではお話しできません.

で, 色々なやり方があるとは思いますが, 今回は q 差分作用素の可換族のことを中心にお話ししよう思っています. 話は A 型 GL 版に限ることにして,

1. Macdonald 多項式とはどんなものか.
   定義と種々の特徴的な性質を述べる.

2. アフィン Hecke 環からのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論).
   アフィン Hecke 環の構造論から Macdonald 多項式の性質をとらえ直す.

を通じて, Macdonald 多項式を特徴付ける q 差分作用素の可換族が中心的なテーマです. 差分作用素の可換族という意味では, 楕円函数を係数とする Ruijsenaars 差分作用素のの可換族というものもあります. BC 型の場合や楕円の場合まで含めれば「その周辺」が大分充実すると思いますが, そういうところまでは二コマの講義では無理なので, ともかく上の 1., 2. をお話するということを目標にします. これでも詳しくやるとキリがないんですけど, 時間の許す限りで話をしたいと思っています.

ここまでで何か質問がある人は? 大体皆さんの超幾何函数のイメージのどの辺りっていう感じでハマりました?

聴講者 A：すいません Jacobi 多項式っていうのの定義をちゃんと黒板に書いていただけますか?

重み函数 $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ について, 実係数の多項式の正定値内積を

$$(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx$$

で定め, これを下の次数から順に直交化して得られるのが Jacobi 多項式です. これぐらいでいい?

聴講者 A：次数の下の方を具体的に書いてもらえると $\cdots$.

定数倍の決め方は色々ありますが, $[-1,1]$ 区間の函数として

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) := \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix}; \frac{1-t}{2}\right)$$

で定義するのが普通でしょうか. $[0,1]$ 区間でみるときは更に $t=1-2x$ としたものがそうです. つまり Gauss の超幾何函数で二階にいる人が一人負の整数になる, つまり多項式になる場合が Jacobi 多項式です. 実際に直交関係式を書くと, $\alpha,\beta > -1$ とすると

$$\begin{aligned}(P_m^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}) &:= \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt\\ &= \frac{1}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{mn} \geq 0\end{aligned}$$

となります.

また Jacobi 多項式は Gauss の超幾何函数の特別な場合なので, 二階の微分方程式

$$(1-t^2)\frac{d^2\,y(t)}{dt^2} + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)t\}\frac{d\,y(t)}{dt} + n(n+\alpha+\beta+1)y(t) = 0$$

を満たすことがわかり, この微分作用素 (を $t=1-2x$ と変数変換したもの) は上で定めた内積に関して自己共役になっていて. 多項式の次数を上げない. つまり次数に関する三角性を持っているので, Jacobi 多項式はこの作用素で対角化したものと思ってもいいです. 特に $\alpha=\beta$ としたのが Gegenbauer 多項式です. A 型の Macdonald 多項式というのは, この Gegenbauer 多項式を適当な変数の読み替えをして q-差分化したもの (A_1 型) です.

ともかくこの手の一変数のことに関してもいくらでも詳しくやってもいいけど, もう一コマ必要です (笑).

落合：適当に内積をいれて, 適当に直交化しようとすると, その直交多項式の係数は大抵書けないと思うんですけれども, Jacobi 多項式の場合には超幾何で書ける理由というのは何ですか?

それはですね, 今の場合はベータ積分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx$$

の素性が良いということと, この内積に関するモーメント

$$(x^k, x^l) = \int_0^1 x^{\alpha+k+l}(1-x)^\beta\,dx$$

がそのベータ積分になっていて具体的に書けるからでしょうね. 直交多項式っていうのは, 色々なやり方はあるけれども, そういうモーメントの行列が決まればそこから機械的に直交多項式を作る方法があって, 係数とかそういうのがみんな計算できてしまうので, そこからこういう超幾何的な表示が出てくる. と言って良いのではないでしょうか?

落合：その事情は多変数でも同じなんですか?

それはそうではありません. そういうクラスもあるでしょうが, モーメントの計算は普通は大変です. そんなに簡単ではないと思います. あと n 変数の多項式の中に (辞書式順序でも何でもいいけど) 全順序を入れて下から重みについて直交化するというそういう考え方もあるんですけど, 今言っているやつはそういうものではなくて, 最初から対称多項式の範囲に限定して物事を考えている. そういうものの中に決まる内積に関して直交函数系のようなものをつくる, っていう風になってます. だからモーメントって言っても, この場合は対称函数の基底に関するモーメントの計算をしなければならない. こういうのは難しくて, closed には書けないのが普通じゃないでしょうか. と, 思いますけど.

聴講者：そうすると, 上述した f と g は対称多項式なんですか?

違います. これは一変数の普通の微分の場合なのでこっちはまた別の話です. 今の場合, 上述の (f, g) で対称内積を定めると, 次数を制限するごとに非退化なので, 下から順番に直交化できるっていうそういうことです. こういう考え方は多変数でも大事なので, そういうのをあらかじめコメントしておくのは講義にとっても有益なのですけど. ああ, 良かった. まぁ,「知ってますね」で済まされるよりはその方が良いですね.

良いでしょうか. ああ, これで 30 分経ったのか. 済みません, 段々ペースを上げます.

1 Macdonald 多項式 (A 型 GL 版)

Macdonald 多項式っていうのは q で,「普通の微分方程式の直交多項式もあるのになんでわざわざ q 差分なんかなんでやるの?」って思う人もいるかもしれないけど, それは q 差分の世界の直交多項式っていうのはそれなりに微分の場合とはかなり違った事情で, 色々, まぁ表現論的な構造とか, 組合せ論的構造とか, あるいは最近だと代数幾何のある種の母函数にもいっぱい出てくるようになっているので, 色んなところで数学に出てくるようになりました. だから $\cdots$. ここで一番若い人は何年生まれですか? 80 年代の終わりか, 90 年前半くらい? だけどその間に

Macdonald 多項式も物凄い成長した (笑), ヒトです. だから皆さんが生まれるより前からあった.

で正直言うと, Macdonald 多項式って分かってないこともまだあるんですけど, それは (知ってる人のために言うと) (q,t)-Kostka 多項式の組み合わせ論的構造とかそういう問題になると, まだ分かってないこと結構沢山あるんですけど, その辺のことを除くと「もう知られてないことはない」ぐらいに色んなことが良くわかっている $\cdots$ って言ったら言い過ぎかな $\cdots$. そんなことを言うと異論を挟む人がいるかもしれないけど, かなり沢山色んなことが知られています.

1.1 記法と準備

とにかくまず, A 型 GL 版の Macdonald 多項式の話をします. この辺はレクチャーだから基本的なところを少しやった方が良いですよね.

で, A 型の場合は Weyl 群不変っていうのは対称群不変なので対称多項式を考えることになって, 後では対称な Laurent 多項式を相手にした方が良いですけど, 当面「対称多項式環を考えればよかろう」ということで対称多項式環の話をします.

<u>対称多項式環</u>　ちょっと記号とか色々使いますので, $\mathbb{K}$ を係数体とします. で状況に応じて, さっきは q と t っていう二つのパラメータをもつ有理数係数の有理函数体だったり, あるいは場合によっては複素数体に取ったり, まぁ色んなことしますけど. だからパラメータがみんな入っている係数体のことを $\mathbb{K}$ と書く, そういうふうに思ってください.

それで n 変数なので $x_1,\ldots,x_n$ っていう n 個の変数があって, $\mathbb{K}[x]=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ っていうのが多項式環ですね. これが n 変数の多項式環で, その中に $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ っていうのが入っていて, これを n 変数の対称多項式環とします. ここで, $\mathfrak{S}_n$ っていうのは n 次対称群. 要するに n 次の対称群が n 変数の多項式環に作用していて, $\mathbb{K}[x]$ は $\mathbb{K}$ 代数ですから $\mathbb{K}$ 代数の自己同型群として作用する. だから $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ とするとき, $\mathbb{K}$ 代数の自己同型群だから, x_i という変数にどう作用するかが指定されれば決まるわけですけど, これは $f=f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}[x]$ に対し添え字の置換として作用する:

$$\sigma(f):=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

こういう状況になっています.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{S}_n & \curvearrowright & \mathbb{K}[x] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}[x]. \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\sigma & \curvearrowright & f & \mapsto & \sigma(f)
\end{array}$$

これに関して不変なところが不変式環

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}:=\{f\in\mathbb{K}[x]\mid\sigma(f)=f\}\subseteq\mathbb{K}[x]$$

で, これを n 変数対称多項式環と呼ぶわけです.

これも余計なことだけど, 僕は自分の趣味として, 包含関係を書くとき, 等号が許される場合にはなるべく横線を入れるようにしています. この場合は $n=1$ のときは等号になるのでこう書いてます. たまに不等号の等号を忘れるかもしれないけど, それは「絶対に等号にはならない」という意味ではないかもしれないので注意してください.[2]

多重指数の記法 以下, 多重指数の記号というのを盛んに使いますので, そういうのを少し話をしておきます. 多重指数っていうのは, $\mathbb{N}$ を非負整数の全体として, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{N}^n$ としたもので, n 変数 $x:=(x_1,\dots,x_n)$ に対しては多重指数 μ に対応する単項式を単に

$$x^\mu := x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$$

と書きます. それからその次数を

$$\deg x^\mu = |\mu| := \mu_1+\cdots+\mu_n$$

と定めます.

で, 今変数の方には「対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する」って言ったんだけれど, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は多重指数の空間 $\mathbb{N}^n$(or $\mathbb{Z}^n$) にも作用します. それはどうするかというと,

$$\sigma\cdot\mu := (\mu_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\mu_{\sigma^{-1}(n)})$$

という風に成分の添え字の番号が inverse で入れ替えるっていう風にすると, これが左作用になります. ようするに成分を入れ替えるのか, 場所を入れ替えるのかの違いで, 「場所を入れ替える」方が普通なんですけど, 「成分の入れ替える」方には inverse がつくことに注意してください. ともかくこういう風に定めると,

$$\sigma(x^\mu) = x_{\sigma(1)}^{\mu_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\mu_n} = x_1^{\mu_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots x_n^{\mu_{\sigma^{-1}(n)}} = x^{\sigma\cdot\mu}$$

となって $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{K}[x]$ への作用と, 多重指数の作用が compatible になって互いに移りあうことができます.

単項式型 (monomial) 対称式 今ここで改めて $L:=\mathbb{N}^n$ として更に, さっきは「分割」って言いましたけど,

$$L^+ := \{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in L \mid \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0\}$$

[2] 普通は不等号って等号がついてる方 $\leq$ がメインで, 等号がつかないのは特別な場合. こっちの方が一般的な記号なのに, 集合の包含関係だけ等号がないやつ $\subset$ を標準にしたのは Bourbaki が悪いと思います. 悪いかどうかは知りませんが, 記号に一貫性がないと思います. 半順序なんだから普通の不等号に合わせるべきですよね.

と書くことにします. すると任意の L^+ の元 λ は, 成分数が n 以下の分割で, この λ に対して単項式型対称式を

$$m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n \cdot \lambda} x^\mu$$

で定めます. ここで $\mathfrak{S}_n$ は多重指数の集合 L に作用していたわけですけれども, この左側からの作用で軌道分解するとちょうど任意の多重指数っていうのは, 大きい順に並べ替えをすることができて, 大きい順に並んだやつはただ一つですから, L^+ というのが軌道分解の完全代表系になります. で対称函数っていうのは, そういう軌道毎に同じ係数が並んでいるっていうのが対称函数なので, こいつら $\{m_\lambda(x)\}_{\lambda \in L^+}$ が対称函数の基底を作ってるっていうことです. 記号で書くと,

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}\, m_\lambda(x) \subseteq \mathbb{K}[x] = \bigoplus_{\lambda \in L} \mathbb{K}\, x^\lambda.$$

「どういうことが問題になるか」ということは結構デリケートなこともあるので, ちょっと例を挙げましょう.

- $\lambda = (l, 0, \ldots, 0) =: (l) = \underbrace{\square\square\square\square\square}_{l}$

$$m_{(l)}(x) = x_1^l + \cdots + x_n^l =: p_l(x) \quad (\text{冪和対称式}),$$

- $\lambda = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{l\text{ 個}}, 0, \ldots, 0) =: (1^l) = \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\\ \square\end{array}\right\} l$

$$m_{(1^r, 0, \ldots, 0)}(x) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} =: e_r(x) \quad (\text{基本対称式}),$$

- $\lambda = (2, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{array}{l}\square\square\\ \square\end{array}$

$$m_{(2,1,0,\ldots,0)}(x) = \sum_{\substack{1 \le i, j \le n \\ i \ne j}} x_i^2 x_j.$$

優順序 (dominance ordering)[3] 順序についての注意を少し. Macdonald なんかをやるときは色々精密なことがあるので, 辞書式順序 $\underset{\text{lex}}{\ge}$ ではなく, 次の優順序 (dominance ordering)[4] がよく使われます.

$$\mu \ge \lambda \iff \begin{cases} \mu_1 \ge \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \ge \lambda_1 + \lambda_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \ge \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ \mu_1 + \cdots + \mu_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad (|\mu| = |\lambda|) \end{cases}$$

[4]いい訳か分かりませんが, ここでは dominance ordering を「優順序」と呼ぶことにします.

優順序は, 辞書式順序とは違い, 全順序ではありません. たとえば, $(3,3)$ と $(4,1,1)$ は

$$3 \leq 4, \quad 3+3 > 4+1$$

となってしまい優順序による大小関係の比較はできない. しかし半順序であって, 辞書式順序との整合性があります (問 1.2 (1) 参照). 以下特に断らない限り, $\mu, \lambda \in L$ に関する順序 $\geq$ は優順序とします.

ここで $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in L^+$ と $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ を比べてみましょう. まず, λ_1 は λ の成分の中で一番大きい数で, μ_1 は λ の成分の中のどれかなので, $\lambda_1 \geq \mu_1$. 次に二番目の成分を考えると, $\lambda_1 + \lambda_2$ は $\mu_1 + \mu_2$ 以上になりますね. つまり μ_1 から μ_n は, λ_1 から λ_n の並べ替えで, $\lambda_1 + \lambda_2$ は λ_1 から λ_n までの大きい方から二つを取ってきて足したものなので, 勝手に二つもってきて足したもの $\mu_1 + \mu_2$ はそれ以下ですよ. だからこれを繰り返していくと, 次がわかります.

命題 1.1. $\lambda \in L^+$ の $\mathfrak{S}_n$ 軌道 $\mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ の任意の元 μ に対し, $\lambda \geq \mu$.

つまり軌道というのは優順序で下がっていくわけです.

<u>ルート系</u> 後で表現論的記号を使わなきゃいけないので, ここでまとめておきます. $\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \cdots, 0)$, $P := \mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ としましょう. これらを用いると, 多重指数 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ も

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i$$

と書くことができます. それで色んな記号があるんですけれども, まず

$$\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0, \overset{j}{\check{-1}}, 0, \ldots, 0) \quad (i < j)$$

とおき, こういうのを普通正ルートと呼びます. また

$$\alpha_i := \alpha_{ii+1} = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, \overset{i+1}{\check{-1}}, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

を単純ルートといいます. もう少しちゃんと言うと, A 型 GL 版の正ルートと単純ルートはこういうものになります. あと見ればすぐ分かりますが,

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}.$$

のように正ルートは単純ルートの和に書くことができます. ここで少し問題を出しておきましょう.

問 1.2. $\mu, \nu \in P$ のとき

(1) $\mu \geq \nu$ なら $\mu \underset{\mathrm{lex}}{\geq} \nu$.

(2) $\mu \geq \nu \Longleftrightarrow \mu - \nu \in Q^+ \Longleftrightarrow \mu - \nu = \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij}\alpha_{ij} \quad (k_{ij} \in \mathbb{N})$.

但し, 単純ルートを用いて, ルート格子 Q を

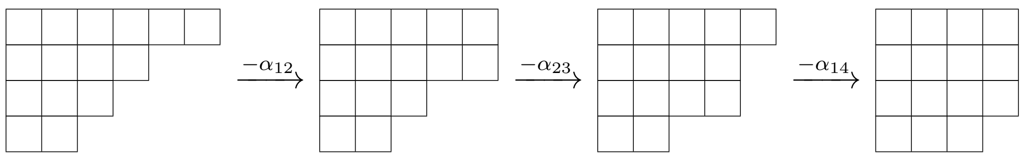
$$Q := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\,\alpha_i$$

で定め,

$$Q^+ := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{N}\,\alpha_i$$

とします.[5]

(2) の最右辺の同値関係は, λ を Young 図形で表示したときに α_{ij} が i 行目の一番端の箱を一つ取って, j 行目の一番端に一つ付け加える操作だと考えるとわかりやすいです. 言い換えると, 優順序というのは分割の上の方にある箱から下の方に一つ移すという操作を何回かやって別の多重指数に移るっていうのと同じです. たとえば $(6,4,3,2)$ と $(4,4,4,3)$ については, $(6,4,3,2) \geq (4,4,4,3)$ が成り立っていますが, これは



と箱を上から順に移していくことで移ります. 優順序はオリジナルの定義でも良いですが, 状況によってはこのような見方も有用なので, 演習問題として紹介しました.

1.2 Schur 多項式

まだ今日の話す予定の三分の一しか話してない $\cdots$. ちょっとやめるかなぁ. だけどやっぱり Schur 函数とか知らないと困るので, Schur 多項式, この辺しょうがないですよね. 全然経験ないと話が始まらないので, Schur 多項式のことを少し話をします.

Macdonald 多項式っていうのは, 単項式型の対称式とか, Schur 函数とかを特別な場合として含むような対称多項式なので, 色んな性質を考えるときに Schur 函数が持っている性質を思い描きながら色々考えるので, Schur 函数知ってないとちょっとマズイんです. Schur 函数を知らずして, Macdonald 多項式をやろうなんて人がいたら, 「そんな人数学辞めてください」って思うよね (笑).

---

5 P の方はウェイト格子と呼びます.

それで Schur 多項式は今書いた, 成分数が n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L^+$ に対して $s_\lambda(x)$っていうのがあって, これは定義は色々あるんですけれども, 行列式を使って

$$s_\lambda(x) := \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{i,j=1}^n}{\Delta(x)} \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}.$$

で定義します. ここで $\Delta(x)$ は差積, つまり Vandermonde の行列式

$$\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) = \det\left(x_i^{n-j}\right)_{i,j=1}^n$$

で, 分子 $\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{i,j=1}^n$ の方も行列式で交代式です. なので, これは差積 $\Delta(x)$ で割り切れて, $s_\lambda(x)$ は $\mathbb{K}[x]$ の中の対称多項式になっている.

で, Schur 函数というものは色々コメントを言い出すと, Schur 函数だけで一日講義しても, 一週間講義しても, ひょっとしたら一年講義しても話すことはあるぐらいのテーマですけど, ちょっとだけ言っておきます[6].

一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現の既約指標　一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現は, 分割 P^+ でパラメータ付けられるような一族があって, それの既約指標と呼ばれるものが Schur 多項式になっています.

半標準盤のウェイトの母函数　半標準盤 Tっていうのは Young 図形 λ に 1 から n までの数を書き込んでいくんですが, 下の方にみるときは必ず増加 (狭義単調増加), 横の方にみるときは等号も許して増加 (単調非減少) するように書き込んでいったものです. たとえば, $\lambda = (2, 1)$ を例に考えると,

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

は半標準盤ですが,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

等は半標準盤ではありません. $\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ は分割 $\lambda \in L^+$ を Young 図形とみなしたときの, 半標準盤の集合で

$$\mu_i = \mu_i(T) := T \text{ に現れる } i \text{ の個数}$$

として, 半標準盤 T のウェイトを $\mathrm{wt}(T) = \mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ とします. これも $\lambda = (2, 1)$ を例にすると,

$$\mathrm{SSTab}_2((2,1)) = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$$

[6] こういうコメントって, 知ってる人には言わずもがなで, 知らない人には何を言われてるんだかわからないから, 言うまでもないのかもしれないけれど, 一回ぐらい聞いたことがあればそれで何かのヒントになるかもしれないので言います.

で,

$$\mu_1(T_1)=2,\quad \mu_2(T_1)=1,\quad \mu_1(T_2)=1,\quad \mu_2(T_2)=2,$$

に注意すると

$$\mathrm{wt}(T_1)=(2,1),\quad \mathrm{wt}(T_2)=(1,2),$$

となるわけです. このとき, このウェイトに関する単項式を足し挙げていったものを考えるとそれが Schur 函数になります.

$$s_\lambda(x)=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)} x^{\mathrm{wt}(T)}$$

これが Schur 函数の一つの組み合わせ論的表示です. 実際, 定義より

$$s_{(2,1)}(x)=\frac{\det\begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}}{x_1-x_2}=x_1^2x_2+x_1x_2^2.$$

他方,

$$\sum_{T\in\mathrm{SSTab}_2((2,1))} x^{\mathrm{wt}(T)}=x^{\mathrm{wt}(T_1)}+x^{\mathrm{wt}(T_2)}=x^{(2,1)}+x^{(1,2)}=x_1^2x_2+x_1x_2^2$$

で確かに Schur 函数に一致することがわかります.

ここで注意して欲しいのは, 優順序に関して

$$\lambda\geq \mathrm{wt}(T)\quad (T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda))$$

ということです. というのも, 半標準盤は下の行へ書き込んでいく数は必ず増えるので, 1 が現れるのは 1 行目までだから, T に書き込まれる 1 の数 $\mu_1(T)$ は $\lambda\in L^+$ の 1 行目の箱の数 λ_1 以下になります. 同様にして 2 が現れるのも 2 行目まで, なので T に書き込まれる 1 の数と 2 の数の和 $\mu_1(T)+\mu_2(T)$ は, $\lambda\in L^+$ の 1 行目と 2 行目の箱の数 $\lambda_1+\lambda_2$ 以下です. これを繰り返せばよいわけです.

GL_n の表現を GL_{n-1} の表現に制限したときのウェイトとか, そういうのを並べてみるのを Gelfand–Tsetlin パターンっていうんですけど, その Gelfand–Tsetlin パターンでもって既約表現の基底を決めてそれで指標を計算するとこの式が出てくる. これがこの式の表現論的な意味です. [7]

Kostka 数との関連　Schur 多項式 $s_\lambda(x)\in\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}=\bigoplus_{\lambda\in L^+}\mathbb{K}\,m_\lambda(x)$ を単項式型対称式 $m_\lambda(x)$ で展開し直しましょう.

$$s_\lambda(x)=\sum_{\substack{\mu\in L^+\\ \lambda\geq\mu}} K_{\lambda,\mu}\,m_\mu(x)=\sum_{\substack{\mu\in L\\ \lambda\geq\mu}} K_{\lambda,\mu}x^\mu.$$

[7] 初めて聞いた人は忘れてください. 知ってる人はみんな知ってるから, 「そういうのがあるらしい」ということだけわかればいいので.

この展開係数 $K_{\lambda,\mu}$ は, 自然数なんですけど, 形が λ の半標準盤 T でウェイト $\mathrm{wt}(T)$ がちょうど μ のものを数えた個数です.

$$\mathrm{SSTab}_n(\lambda)_{\mathrm{wt}=\mu} := \{T \in \mathrm{SSTab}_n(\lambda) \mid \mathrm{wt}(T) = \mu\}$$
$$K_{\lambda,\mu} := \sharp \mathrm{SSTab}_n(\lambda)_{\mathrm{wt}=\mu}.$$

これもちょっと書いてみると, $\lambda = (2,1)$ について, さっき計算したように,

$$\mathrm{SSTab}_2((2,1))_{\mathrm{wt}=(2,1)} = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}, \quad \mathrm{SSTab}_2((2,1))_{\mathrm{wt}=(1,2)} = \left\{ T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\},$$

でそれ以外の $\mu \in L$ については全て空になります. なので, $K_{(2,1),(2,1)} = K_{(2,1),(1,2)} = 1$ でそれ以外は全て 0 となり,

$$\sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ (2,1) \geq \mu}} K_{(2,1),\mu}\, m_\mu(x) = K_{(2,1),(2,1)}\, m_{(2,1)}(x) = m_{(2,1)}(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = s_{(2,1)}(x),$$

あるいは

$$\sum_{\substack{\mu \in L \\ (2,1) \geq \mu}} K_{(2,1),\mu}\, x^\mu = K_{(2,1),(2,1)}\, x^{(2,1)} + K_{(2,1),(1,2)}\, x^{(1,2)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = s_{(2,1)}(x)$$

となるわけです. これは Kostka 数っていうんですけど, 組み合わせ論では大事な数です.

1.3 Macdonald 多項式

それで A 型 GL 版の Macdonald 多項式って何か, これから定義します. q, t っていうパラメータを二つもってきて, これ導入の仕方も色々あるんですけど, 「次の q 差分作用素 (Macdonald 作用素) を考える」っていうところから出発します. [8]

$$D_x := \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}.$$

ここで, T_{q,x_i} は i 番目の変数についての q-差分

$$T_{q,x_i}(f)(x) := f(x_1, \ldots, q x_i, \ldots, x_n)$$

です.

[8] たとえば Jacobi 多項式を定義するのに, 超幾何微分方程式を書いて「これの解で多項式になるよ」っていうような定義の気持ちで, q 差分作用素を定義して「それの固有函数になるよ」という形で Macdonald 多項式を定義します.

ここで D_x の各 T_{q,x_i} の係数に x の有理式が出てきていますが, これは差積 $\Delta(x)$ の t-差分 T_{t,x_i} が x_i が関係するところ以外は $\Delta(x)$ と同じなので

$$\frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} = \prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

となります. なので D_x は

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{t,x_i}(\Delta)(x)}{\Delta(x)} T_{q,x_i},$$

つまり全部通分すると分母が差積になることに注意しておきます.

で, 補題を述べましょう.

補題 1.3. (1) $D_x(\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}) \subseteq \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$.
(2) D_x は $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の優順序に関して三角性をもつ. すなわち,

$$D_x(m_\lambda(x)) = \sum_{\substack{\mu\in L^+\\ \lambda\ge\mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda} = m_\lambda(x) d_\lambda + \sum_{\substack{\mu\in L^+\\ \lambda>\mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda}.$$

但し, $d_\lambda := d_{\lambda\lambda}$ で,

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^{n} t^{n-i} q^{\lambda_i}.$$

さっき, 重み函数に関して自己共役な作用素が多項式に作用するときに「次数を上げない」っていう三角性があってそれによって対角化できる, っていうことを説明しました. ちょうどそれに対応することを優順序で考えているわけです. 証明は演習にまわそうかな. でも, これは基本的なことです. つまり D_x の固有函数 (Macdonald 多項式) が本当にあって, 固有値がどうなってるっていうのをみるためには大事なところ, しかもあんまり当たり前ではないので説明します.

まず (1) ですが, $f(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ について, $D_x(f(x))$ は有理函数ですけど, D_x は定義から添え字の入れ替えに関して不変なので不変性は明らか. 同時にさっき注意したことから $D_x(f(x))$ の分母は差積しかないですね. なので

$$D_x(f(x)) = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{i=1}^{n} T_{t,x_i}(\Delta)(x) T_{q,x_i}(f)(x) \in \mathbb{K}(x)^{\mathfrak{S}_n} \cap \frac{1}{\Delta(x)}\mathbb{K}[x]$$

となります. だから, ある多項式 $h(x)$ が存在して,

$$D_x(f(x)) \frac{h(x)}{\Delta(x)}$$

となりますが, 今, 全体が対称式なので, $h(x)$ は交代式です. だからこれは差積で割り切れて, ある多項式 $g(x)$ があって $h(x) = \Delta(x) g(x)$ という形に書けます. よって $D_x(f(x)) = g(x)$ で, これは対称多項式になります.

(2) については, Macdonald の本でも凄い苦労して証明してるんですが,[9] こうやればいいんです. D_x の i 番目の項を,

$$\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}=\frac{(tx_i-x_1)\cdots(tx_i-x_{i-1})(tx_i-x_{i+1})\cdots(tx_i-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}T_{q,x_i}$$

$$=t^{n-i}\prod_{1\le j<i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{i<j\le n}\frac{1-t^{-1}x_j/x_i}{1-x_j/x_i}T_{q,x_i}$$

と変形しましょう. これを x^μ にあてて, 等比級数の和の公式を使って形式的 Laurent ベキ級数環の中で展開すると,

$$\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}(x^\mu)=t^{n-i}q^{\mu_i}x^\mu\prod_{1\le j<i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{i<j\le n}\frac{1-t^{-1}x_j/x_i}{1-x_j/x_i}$$

$$=t^{n-i}q^{\mu_i}x^\mu$$

$$\cdot\prod_{1\le j<i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-t\frac{x_i}{x_j}\right)\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k\prod_{i<j\le n}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-t^{-1}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^l$$

となり, 結局

$$x^\mu\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}$$

という形の単項式の和になります.

ここでさっきやった問 1.2 (2) より,

$$\mu\ge\nu\Longleftrightarrow\mu-\nu=\sum_{1\le i<j\le n}k_{ij}\alpha_{ij}\quad(k_{ij}\in\mathbb{N})$$

なので, $x^\mu=x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$ と $x^\nu=x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}$ について, $\mu\ge\nu$ のとき

$$x^\nu=x^\mu\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}$$

となり, また逆に x^μ と x^ν にこの関係があるとき, $\mu\ge\nu$ となります. これに注意すると, さっきの和は (無限和ですが) 優順序 $\le$ について x^μ より lower な和になります. つまり,

$$\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}T_{q,x_i}(x^\mu)=t^{n-i}q^{\mu_i}x^\mu+(\text{lower})$$

で, これを i に関して足しあげると,

$$D_x(x^\mu)=\left(\sum_{i=1}^{n}t^{n-i}q^{\mu_i}\right)x^\mu+(\text{lower}).$$

[9] 後でやる Macdonald 作用素の母函数を単項型対称式への作用を計算して示す.

更に μ を $\mathfrak{S}_n \cdot \lambda$ に関して走らせて足しあげると, 左辺は $D_x(m_\lambda(x))$ になるわけですが, 命題 1.1 より右辺の和はいずれも λ より lower な和になることがわかり, またさっき証明した補題 1.3 の (1) よりこれは $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}\, m_\lambda(x)$ の元なので, 無限和ではなく λ より lower な項の有限和になり, 結局

$$D_x(m_\lambda(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} t^{n-i} q^{\lambda_i} \right) m_\lambda(x) + \sum_{\substack{\mu \in L^+ \\ \lambda > \mu}} m_\mu(x) d_{\mu\lambda}.$$

という形になることがわかるわけです.

以上の準備を基に Macdonald 多項式の定義ができます.

定理 1.4. $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q,t)$ とする. 任意の $\lambda \in L^+$ に対し,

$$P_\lambda(x) = \sum_{\lambda \geq \mu} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\lambda > \mu} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) = x^\lambda + (\text{lower terms}), \quad (1.1)$$

$$D_x P_\lambda(x) = P_\lambda(x) d_\lambda, \quad d_\lambda = \sum_{i=1}^{n} t^{n-i} q^{\lambda_i}. \quad (1.2)$$

を満たす対称多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ が一意に存在する. これを分割 λ に付随する (A 型 GL 版の)Macdonald 多項式とよぶ.

証明についてはさっきの補題 1.3 で大体終わってるんですが, 一応言っておきます. まず存在については, $\lambda \in L^+$ を固定して, 優順序で λ 以下の単項式型対称式 $m_\mu(x)$ 達で生成される有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間[10]

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}_{\leq \lambda} := \bigoplus_{\substack{\mu \in L^+ \\ \mu \leq \lambda}} \mathbb{K}\, m_\mu(x)$$

を考えよう. D_x を $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}_{\leq \lambda}$ 上の線型写像とみなし, 基底 $\{m_\mu(x)\}_\mu$ を適当に並べて行列表示すると, 補題 1.3 の (2) より,

$$D_x(\ldots, m_\mu(x), \ldots, m_\lambda(x)) = (\ldots, m_\mu(x), \ldots, m_\lambda(x)) \begin{pmatrix} \ddots & & & * \\ & d_\mu & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_\lambda \end{pmatrix}$$

という半順序で上三角な行列が得られます. ここで $\lambda \neq \mu$ とすると, 有理函数として $d_\lambda \neq d_\mu$ で, D_x の固有値が全て異なるので, 特に d_λ に関する固有ベクトルが存在することがわかります.

[10] $m_\mu(x)$ は $m_\lambda(x)$ と次数は同じで, Young 図形の意味で下に下げていけるヤツっていう意味だったので, 有限個しかないから有限次元.

もっと顕わに作りたければ, こうすればできます. ずるいやり方ですが, 今 D_x の固有値は全てわかっているので,

$$P_\lambda(x) := \prod_{\substack{\mu\in L^+\\ \mu<\lambda}} \frac{D_x - d_\mu}{d_\lambda - d_\mu} m_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

とすればいいです.

どうしてかというと, まず補題 1.3 の (2) より,

$$P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\substack{\mu\in L^+\\ \mu<\lambda}} p_{\mu\lambda} m_\mu(x) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

となることはよいです. 更に D_x の特性多項式は

$$\det\left(z\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}_{\leq\lambda}} - D_x\right) = \prod_{\substack{\mu\in L^+\\ \mu\leq\lambda}} (z - d_\mu)$$

なので, Cayley–Hamilton の定理から

$$(D_x - d_\lambda)P_\lambda(x) = 0$$

となるわけです.

一意性については $\tilde{P}_\lambda(x)$ が (1.1), (1.2) を満たしているとすると, (1.1) から,

$$d_\lambda \tilde{P}_\lambda(x) = \sum_{\nu\leq\lambda} d_\lambda p_{\nu\lambda} m_\nu(x).$$

また (1.2) と補題 1.3 の (2) より,

$$\begin{aligned}
d_\lambda \tilde{P}_\lambda(x) &= D_x \tilde{P}_\lambda(x)\\
&= \sum_{\nu\leq\lambda} p_{\nu\lambda} D_x m_\nu(x)\\
&= \sum_{\nu\leq\lambda} p_{\nu\lambda} \sum_{\mu\leq\nu} d_{\mu\nu} m_\mu(x)\\
&= \sum_{\mu\leq\lambda} d_\mu p_{\mu\lambda} m_\mu(x) + \sum_{\mu<\nu\leq\lambda} d_{\mu\nu} p_{\nu\lambda} m_\mu(x).
\end{aligned}$$

$\{m_\nu(x)\}_\mu$ が $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{K}$ 基底なので,

$$(d_\mu - d_\nu)p_{\mu\lambda} = \sum_{\mu<\nu\leq\lambda} d_{\mu\nu} p_{\nu\lambda}, \quad p_{\lambda\lambda} = 1.$$

となって結局 $\tilde{P}_\lambda(x)$ の展開係数 $p_{\mu\lambda}$ はこの漸化式から一意に決まってしまうので, 一意性もわかるわけです.

色んなやり方はありますが, これで一応 Macdonald 多項式の導入はできたことになります. どんな性質があるかとかは今日の話の後半でやるつもりだったんだけど $\cdots$.

高山：何か一問ぐらい演習問題で性質を $\cdots$.

あ, それなら問題あげますね.

問 1.5 (2 変数の Macdonald 多項式)**.**

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k$$

で,

$$D_x \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)(tq^{\lambda_1} + q^{\lambda_2})$$

の解となるものを求めよ.

これが一変数の場合の (q-)Gegenbauer に相当するものです.

問 1.6. 一行型 $P_{(r)}(x)$ と, 一列型 $P_{(1^r,0,\ldots,0)}(x)$ の n 変数 Macdonald 多項式を具体的にもとめよ.

2　文献紹介と予定変更と一日目の復習

昨日の講義では文献の紹介をしなかったので, ちょっと今あげておきます. 元々 Macdonald 多項式っていうのが導入された定番の本はこれです.

[**M1**] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford University Press, 1995.

こういう分厚い本で我々は bible と呼んでいますけど, これの 6 章に q, t って二つのパラメータが入っている A 型 GL 版の直交多項式の, Macdonald 流のアプローチのことが書いてあります.

それから二番目が

[**M2**] I. G. Macdonald: *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, University Lecture Series, **12** American Mathematical Soc., 1998.

53 ページくらいの薄っぺらい本です. どっかの大学でやった講義録をベースにしてまとめた本で [**M1**] のダイジェスト版と [**M3**] のダイジェスト版を合本にしたよ

うな本です.

[**M3**] I. G. Macdonald: *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Math. **157** Cambridge University Press, 2003.

Cherednik 流のアフィン Hecke 環をベースにした直交多項式の理論を Macdonald が自分でまとめた本がこれです.

で, 昨日は A 型 GL 版について

1. Macdonald 多項式とはどんなものか.
2. アフィン Hecke 環からのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論).

を講義ではお話したい, と言いました. で, 昨日の話を色々しているうちに, 2. の話は来年するんですか (笑)? アフィン Hecke 環的アプローチも僕はしたかったんだけど, でも超幾何学校としては大分「代数寄り」になりすぎるかなっていうところもあるので $\cdots$.

高山：いや, それは何も関係ないですが $\cdots$.

まぁ, 1. で用意したことが二コマでは消化できない可能性も高いので, とにかく普通に, ペースを上げずに, 「分かってもらうことはちゃんと分かってもらう」という趣旨で超幾何と関係するところを割合重点的に話をすることにして, 「余裕があれば少しそっちに触れるかも」ぐらいにします.

高山：ま, 今回足りなくなったら来年で $\cdots$.

ふふ (笑). それからアフィン Hecke 環の方は, 本格的に勉強したい人は [**M3**] を読めばいいし, [**M2**] の後ろの方にもちょっと解説が書いてあります.
それから僕自身も解説的な記事を書いてるのがあって,

[**野海 1**] 野海正俊: Hecke 環と対称多項式 — Macdonald 多項式入門 —, 数理科学 2013 年 2 月号 量子化の発想, 2013.

6 ページぐらいの薄いヤツですけど, 全体的なストーリーはこれをみれば (細かい証明を別にすれば), アフィン Hecke 環がどういう風に関係するかは書いてあるので「それをみてください」っていうことですね.
それから講義録があって,

[**野海 2**] 野海正俊: アフィン Hecke 環と多変数直交多項式 — Macdonald – Cherednik 理論 —, 1997 年前期東北大学集中講義, 長谷川浩司 記.

百数十ページありますかね, 結構長いですよね. で色んなことが書いてあって, A 型の話, BC 型の Koornwinder の話, Hecke 環的アプローチの話とか, それからこの手の q 直交多項式にまつわる話, 色々入っているのでもし興味のある方はご覧ください. 今は数理研の柳田伸太郎さんのホームページに入ってます[11]. 2. で話したいことはある意味でもっと詳しく書いてありますので, 「それで勉強してもらえればいいかな, 興味を持った人は」, というぐらいの軽い気持ちになりました.

それで昨日の続きで宜しいですか. 一応昨日説明したことがどういうことだったかというと,

$$P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t) \in \mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$

と書かれる n 変数の対称多項式で,

$$\lambda \in L^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

という成分数が n 以下の分割でパラメータづけられた直交多項式の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in L^+}$ が存在し, 優順序についての三角性と, 次の q 差分方程式を満たすということでした.

$$D_x P_\lambda(x) = P_\lambda(x) d_\lambda$$

但し, D_x は,

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} \right) T_{q, x_i}$$

という q 差分作用素です. また d_λ は固有値で,

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^{n} t^{n-i} q^{\lambda_i} = t^{n-1} q^{\lambda_1} + t^{n-2} q^{\lambda_2} + \cdots + q^{\lambda_n}$$

というものです. つまり, $(t^{n-1}q^{\lambda_1}, t^{n-2}q^{\lambda_2}, \cdots, q^{\lambda_n})$ という n 個のパラメータが決まって, d_λ はこれの総和なので, 1 次の基本対称式になっています. このパラメータのことを簡単に, $t^\delta q^\lambda$ とよく書いたりします. この δ は Macdonald がよく使っている記号で,

$$\delta = (n-1, n-2, \ldots, 0)$$

というもの. これのことを staircase と言っていますが, 要は階段状の分割に対応するパラメータです.

3 Macdonald 多項式 (続き)

3.1 q 超幾何級数

昨日練習問題で $n = 2$ の場合の計算をしてもらおうという話をしましたが, 直接に普通の超幾何のようにでてくるのはどんなところかというのを先に言っておき

[11] http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ yanagida/others-j.html

ましょう. q 超幾何級数, つまり, q の世界での超幾何級数にあたるものを考えます. やはり超幾何学校ですから, こういうことを話しておいた方がいいですね.

${}_2\phi_1$ とよく言われる q 超幾何級数があり, Gauss の超幾何級数のある意味での q-analogue になっているものですが, これは次のようなものです.

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k (b;q)_k}{(q;q)_k (c;q)_k} z^k \qquad (|q| < 1, |z| < 1)$$

但し,

$$(a;q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a) \ \ (k = 0, 1, \dots)$$

というのは階乗冪の q-analogue です. また, 無限項のものもよく使います.

$$(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i a)$$

これは $|q| < 1$ で無限積が絶対収束して, a の正則函数として意味があります. こういうのが定番の記号です.

$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ を Pochhammer symbol といい, $(a;q)_k$ を q-Pochhammer symbol と呼ぶことが多いのですが, Askey によると Pochhammer は記号 $(\alpha)_k$ を Pochhammer symbol の意味で使ったことはないそうです. 彼は二項係数をあんな風に書いていて, 我々が言う Pochhammer symbol の意味では使ったことがないらしい. 世の中にはそういう, 名前がついているけれどもそれはちょっと違うんじゃないかということが結構ありますね. Askey は shifted factorial つまりずらし階乗函数と呼ぶのがいいと盛んに言っています.

q-shifted factorial $(a;q)_k$ が, どうして shifted factorial $(\alpha)_k$ の q-analogue かということですが, 全く聞いたことがないという人はいないでしょうから, 詳しく説明はせずに簡単な説明だけにしておきます. $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ というのを考えて, 例えば $q \in \mathbb{R}$ で, q が 0 から 1 に向かって増大していくと思うと, $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ は α に近づいていきます. だから, $a = q^\alpha$ とすると

$$\frac{(a;q)_k}{(1-q)^k} = \frac{(q^\alpha;q)_k}{(1-q)^k} \to (\alpha)_k$$

となる. ${}_2\phi_1$ の場合は, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と書いて, 各項の分母分子を $1-q$ の適当な冪で割って極限をとったと思うと, q-shifted factorial の部分から普通の shifted が出てきて, 形式的には ${}_2\phi_1$ から Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ が出てくる. そういう意味で q-analogue です.

それから, これもついでに話しておきます. 多変数の超幾何級数の q-analogue というのは q の世界の人はあまり使わないので定番の記号がありませんが, ここでは ϕ_D と書いておきましょう. 多重指数で書くことにします.

$$\phi_D\left(\begin{matrix} a, b_1, \dots, b_n \\ c \end{matrix}; q; z_1, \dots, z_n\right) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} \frac{(a;q)_{|\mu|} (b_1;q)_{\mu_1} \cdots (b_n;q)_{\mu_n}}{(c;q)_{|\mu|} (q;q)_{\mu_1} \cdots (q;q)_{\mu_n}} z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n}$$

(Lauricella の)F_D の q-analogue を作るとすると, 一番安直に考えるとこのような感じになります.

今回, Macdonald 多項式とか, q 差分方程式の解として考えているような超幾何函数というのは, 普通の意味で皆さんが想像するようなこういう超幾何函数はごく一部分で, 一般のものは顕わに超幾何級数的に書くことはできないのが普通です. それでも特別な場合にはこういうものがでてくるという状況になっています.

注意 3.1. n 変数の場合の例をあげましょう.
(1) 1 列の場合

$$\varpi_r = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, \cdots, 0) = (1^r) = \left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}\right\} r$$

とします. また,

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \quad \alpha_n = \varepsilon_n$$

というのが単純ルートです. 本当は α_{n-1} までが単純ルートですが, GL 版の時は次元を 1 つ上げて考えているので, α_n を付け加えて考える方が便利なこともあります. すると,

$$\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

が成り立ちます. このように, 単純ルートとウェイト格子の中で双対になっているものを基本ウェイトと言います. 基本ウェイトは表現論では非常に大事なもので, というのは, 基本ウェイトの非負整数係数の一次結合をドミナントな正ウェイトと言って, そういうものに対しては既約表現が 1 つずつ決まります. そういうものを生成するので, 基本ウェイトに対応する表現が分かると, それのテンソル積を分解していけば, 一般の既約表現が構成できる, といった文脈があります.

今の場合, 図形で考えるとすぐに分かりますが, 上から下に分割であることを保ったまま箱を動かすことはできないので, 分割で (1^r) より優順序で下にあるものは存在しません. つまり (1^r) というのは分割の中で, 優順序において minimal な元です. なのでこの場合の Macdonald 多項式は,

$$P_{(1^r)}(x; q, t) = m_{(1^r)}(x) = e_r(x)$$

であることがわかります. ただ, 基本ウェイトが優順序で minimal になるというのは A 型特有の事情で, 他のルート系では基本ウェイトだからといってそれほど簡単にはなりません.

(2) 1 行の場合

$$\lambda = (l, 0, \cdots, 0) = (l) = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline \end{array}}_{l}$$

のときは l 次の多項式です. Schur 函数の場合は l 次の完全同次対称式と言って, l 次の単項式を係数 1 で全て足し上げたものですが, これに対応するものが Macdonald 多項式の場合はどうなるかというと, 次のようになります.

$$P_{(l)}(x;q,t) = \text{const.} \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=l} \frac{(t;q)_{\mu_1}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q;q)_{\mu_1}\cdots(q;q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$$

$\mu_1+\cdots+\mu_n = l$ をみたす多重指数のうち優順序で一番大きいのは $(l,0,\ldots,0)$ なので,

$$\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=l} \frac{(t;q)_{\mu_1}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q;q)_{\mu_1}\cdots(q;q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$$

の主要項は $\frac{(t;q)_l}{(q;q)_l} x_1^l$ です. Macdonald 多項式は主要項の係数が 1 になるように規格化したものなので, 結局次のようになります.

$$P_{(l)}(x;q,t) = \frac{(q;q)_l}{(t;q)_l} \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=l} \frac{(t;q)_{\mu_1}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q;q)_{\mu_1}\cdots(q;q)_{\mu_n}} x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$$

これは n 次元の格子の中での和ですが, l で一定となるところで和をとっているので, 実際は $n-1$ 次元の和です. 1 つだけ他のもので表すことにしてこの式を書き直します. x_1^l を前に出し, $\mu_1 = l - \mu_2 - \cdots - \mu_n$ を用いて q-shifted factorial をうまく読み替え, 残りを μ_2 から μ_n で書くのが一番自然なのでそのようにすると, 次のように書き直せます.

$$P_{(l)}(x;q,t) = x_1^l \sum_{\mu_2,\cdots,\mu_n\geq 0} \frac{(q^{-l};q)_{\mu_2+\cdots+\mu_n}(t;q)_{\mu_2}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q^{1-l}t^{-1};q)_{\mu_2+\cdots+\mu_n}(q;q)_{\mu_2}\cdots(q;q)_{\mu_n}} \left(\frac{qx_2}{tx_1}\right)^{\mu_2}\cdots\left(\frac{qx_n}{tx_1}\right)^{\mu_n}$$

これは先ほどの ϕ_D を用いて,

$$P_{(l)}(x;q,t) = x_1^l \phi_D \left(\begin{matrix} q^{-l}, t, \ldots, t \\ q^{1-l}t^{-1} \end{matrix} ; q; \frac{qx_2}{tx_1}, \ldots, \frac{qx_n}{tx_1} \right)$$

と書けます. これが 1 行の場合の Macdonald 多項式です. これは F_D の有限項の場合に対応します. 1 行のときくらいは, 確かに先ほどの作用素 D_x の固有函数になっているなということが証明できたらうれしいですが, そのためには何をすればいいかということを練習問題にしておこうと思います (問 5.1). すぐに固有函数が具体的に書けたり, それが固有函数であることが具体的に証明できたりということはあまりないので, こういう場合は実際に証明してみるというのは教育的だと思います. $n=2$ の場合を昨日練習問題で出しましたが, その場合は ${}_2\phi_1$ です. 一般の場合はもっと複雑になります.

聴講者：D_x という作用素を無限積のようなもので根本から理解することはできないのですか?

後で見るように, Macdonald 多項式は直交多項式系をなすのですが, 重み函数は無限積で書けていて, D_x の主要項は重み函数と関係しています. もう一つ無限積が重要な役割を果たすのは母函数 (核函数) との関係です. m 変数と n 変数の Macdonald 多項式の積を適当な係数で足し上げるとその和が, 無限積で表されるという構図になっていますが, これは古典型に特有な現象かも知れません. BC 型の場合にも, そういうものが有りますが, 例外型のルート系でそういう核函数を無限積の形で決められるかというのは難しい問題で, よく分かりません.

聴講者：一般には固有函数と言った場合には定数倍の差があると思いますが, そこは何故上手くいっているのですか?

今の場合は二項展開で係数が全部わかるからと言えばいいのでしょうか. 何らかの方法で固有函数を構成したとすると, 何れにしても主要項を決めなければいけません. その話もあとで少し出てきます.

4 Macdonald 多項式の基本性質

ここでは, Macdonald 多項式の基本性質をいくつか挙げておきます.

今までと同様 $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ 上で考えますが, 単項式型対称式はこの対称多項式環のベクトル空間としての基底になっていて, Macdonald 多項式はその基底についての優順序における三角性をもっています. つまり, 単項式型対称式と Macdonald 多項式は互いに三角行列で基底変更でき, Macdonald 多項式もまた対称多項式環の基底となっています.

$$\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K} P_\lambda(x)$$

これは, D_x という作用素が $\mathbb{K}[x]^{S_n}$ に作用するときの固有空間分解ができていて, 各固有値ごとに固有空間が 1 次元になっている, という状況です.

4.1 (パラメータの) 特殊化

パラメータ q, t を特殊化したときの Macdonald 多項式は以下のようになります.

- $t = 1$ のとき ($t = q^\kappa, \kappa = 0$ のとき)
  $D_x = \sum_{i=1}^{n} T_{q,x_i}$ より, $P_\lambda(x; q, 1) = m_\lambda(x)$ 単項式型対称式
- $t = q$ のとき ($t = q^\kappa, \kappa = 1$ のとき)
  $P_\lambda(x; q, q) = s_\lambda(x)$ Schur 多項式

$\kappa = \frac{1}{2}$ や $\kappa = 2$ のときは, 量子群の球函数などに出てくる場合になります.

- $q = 0$ のとき Hall–Littlewood 多項式
- $t = 0$ のとき q-Whittaker 多項式

  無限変数だと q と t は duality があるので Hall–Littlewood 多項式と q-Whittaker 多項式は似たようなものですが, 有限変数だと q と t は役割が違います.
  何故 $q = 0$ のときを q-Whittaker 多項式と呼んでいるかというと, dual をとると Whittaker だからですかね. 物理の人は最近はよくこのように呼んでいます.

- $t = q^{\kappa},\ q \to 1$ のとき $\lim_{q\to 1} P_{\lambda}(x; q, q^{\kappa}) = P_{\lambda}(x; \kappa)$ Jack 多項式

  先ほどと同様に, $\kappa = 0$ のときは単項式型対称式, $\kappa = 1$ のときは Schur 多項式です. また, $\kappa = \frac{1}{2}$ のときを zonal 多項式, もしくは帯球函数と呼びます. 統計をやっている方々が使う zonal 函数です. なので, 先ほど $t = q^{\frac{1}{2}}$ としたものは, zonal 多項式の q-analogue になっていると思ってください. $\kappa = 2$ のときに名前がついているかどうかは分かりませんが, $\kappa = \frac{1}{2}$ のときは SO に関係するもので, $\kappa = 2$ のときは Sp に関係するものです. Macdonald の q 差分方程式がちょうど A 型の Heckman–Opdam の超幾何微分方程式に対応していて, それの対称多項式解がでてくる場合を Jack 多項式と呼んでいます. つまり, Heckman–Opdam の A 型に対応する広義の Jacobi 多項式が Jack 多項式です. また, 行列変数の ${}_2F_1$ なんかを統計の人たちがよく使っていますが, あれは BC 型にいかないと出てこないので, A 型の範疇では見えてこないものです.

聴講者：Jack 多項式というのはもともと最初は統計で出てきたのですか?

そうでしょうね. Jack や James とか. 表現論的に言えば, GL_n の既約表現の行列要素で, 両側 SO 不変になっているものの radial part をとれば, それが zonal 多項式です. おそらく SO 不変性ということで統計的な意味があるのでしょう.

4.2 q 差分作用素の可換族

Macdonald 多項式を定義するときは D_x という作用素 1 つだけを用いましたが, 実際にはこの D_x という作用素と可換な, 高い階数の q 差分作用素の族が存在しま

す. $r=0,1,\ldots,n$ に対して,

$$D_x^{(r)}=t^{\binom{r}{2}}\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=r}\left(\prod_{i\in I,j\notin I}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\right)\prod_{i\in I}T_{q,x_i}$$

とします. するとこれは r 階の作用素ですが,

$$T_{q,x}^I=\prod_{i\in I}T_{q,x_i}$$

という記法で

$$A_I\left(x;t\right)=\frac{T_{t,x}^I\Delta\left(x\right)}{\Delta\left(x\right)}=t^{\binom{r}{2}}\prod_{i\in I,j\notin I}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$$

と書くと, 上の $D_x^{(r)}$ 次のように書き換えられます.

$$D_x^{(r)}=\sum_{I\subseteq\{1,\cdots,n\},|I|=r}A_I\left(x;t\right)T_{q,x}^I$$

階数は高くなっていますが, 構造としては前の D_x と同様なので, 対称函数を対称函数に, 対称多項式を対称多項式にうつすことや, 三角性をもっているというようなことはこの表示をみればすぐに分かります. 具体的には,

$$D_x^{(0)}=1,D_x^{(1)}=D_x,D_x^{(2)},\ldots,D_x^{(n)}=t^{\binom{n}{2}}T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}\quad(\text{ Euler 作用素})$$

となっています. 普通の微分のときは 0 階から数えると 1 階のところに Euler 作用素がきて, 次の 2 階の微分作用素が重要な訳ですが, 1 階のところに大事な作用素があって, 一番次数の高いところに Euler 作用素がきているのは少し違和感がありますね. また場合によってはパラメータをいれて母函数をつくっておいた方が便利なことも多いので次も書いておきましょう.

$$D_x(u):=\sum_{r=0}^n(-u)^rD_x^{(r)}$$

このとき, 次が成り立ちます.

定理 4.1 (Ruijsenaars, Macdonald)**.** (1) 作用素の可換性 :

$$D_x^{(r)}D_x^{(s)}=D_x^{(s)}D_x^{(r)}\qquad(r,s=0,1,\ldots,n),$$
$$D_x(u)D_x(v)=D_x(v)D_x(u).$$

(2) Macdnald 多項式は $D_x^{(r)}$ $(r=0,1,\ldots,n)$ の同時固有函数である :

$$D_x^{(r)}P_\lambda(x)=P_\lambda(x)e_r(t^\delta q^\lambda),\quad t^\delta q^\lambda=(t^{n-1}q^{\lambda_1},\ldots,tq^{\lambda_{n-1}},q^{\lambda_n}),$$
$$D_x\left(u\right)P_\lambda\left(x\right)=P_\lambda\left(x\right)\prod_{i=1}^n\left(1-ut^{n-i}q^{\lambda_i}\right).$$

つまり, 先ほどまではMacdonald多項式について作用素1つで話をしてきましたが, 実際にはn個の独立な互いに可換なq差分作用素があって, Macdonald多項式はそれらの同時固有函数になっている, ということをこの定理は述べています.

これまでの議論で$D_x = D_x^{(1)}$という1階の作用素の固有空間分解が分かっていて, 固有空間はすべて1次元となっています. $D_x^{(r)}$がそれと可換ということが示せれば, $D_x^{(r)}$の作用はD_xのの固有空間の中にとどまるしかない. だからMacdonald多項式は$D_x^{(r)}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$全ての同時固有函数になっているはずである, ということが分かるでしょう. 本当はそこがデリケートなので, どこからこういう描像に辿り着くかはいろいろな論法があります.

今は可換であることが証明できたとすればという筋で説明しましたが, 実際にRuijsenaarsは1987年にこの可換な作用素の族を導入しています. 今扱っているのは三角版で, 彼が導入したのは楕円版からやっているので, 楕円版, 三角版, 有理版全て含まれています. 彼は実際にこのrとsの作用素を掛けて差分作用素としての積を計算し, 両辺が等しいことを, 作用素の係数の函数に対する恒等式に帰着して直接証明しています. 大変おもしろい論文なので興味がある人は是非一度読んでみるか, もしくは, 簡単ではないが挑戦してみてもよいと思います.

聴講者：共同研究ですか?

違います. Ruijsenaarsはこういう作用素の可換族を構成した訳ですが, Macdonaldは独立にそれの三角版を考え, 彼の理論の中で結果として可換であるということを導いたということで, 多分かかわりは無いでしょう. Ruijsenaarsはいわゆる量子可積分系といって, relativisticな量子可積分系の楕円函数係数版, そういったものをRuijsenaars modelと言いますが, Calogero-Moserの差分版にあたるものを研究していました.

聴講者：楕円版も可換性が言えるのですか?

Ruijsenaarsは楕円版で可換性を証明していて, 三角版はCorollaryです. 証明もあまり簡単ではないんですが, Macdonald多項式とは独立に楕円版の可換性が直接証明されていたというのは驚きですよね.

一方Macdonaldは, $D_x^{(r)}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$が三角性をもつことと, 次に話す直交性の重み函数について自己共役であることを証明して, それで結局対角化されて, D_xの固有函数が同時固有函数になる, ということを証明しました. そこからの帰結として$D_x^{(r)}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$が可換になることが分かります. なので少し筋は違いますが, 結果的にはこの定理が成り立つということになります.

4.3 直交函数系としての Macdonald 多項式

簡単のため $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とし, $q,t\in\mathbb{R}, 0<q<1, 0<t<1$ と仮定しましょう. $\mathbb{R}[x]$ 上の内積を次で定めます. $f,g\in\mathbb{R}[x]$ について,

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\mathbb{T}^n}f(x^{-1})g(x)w(x)\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n}$$

但し,

$$\mathbb{T}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^{*n}\mid |x_1|=\cdots=|x_n|=1\}\text{ : }n\text{ 次元トーラス}$$

とします. q-analogue というと積分は Jackson 積分じゃなければいけないと思う人もいるかもしれませんが, Macdonald 多項式というのは, 普通は Jackson 積分に関する直交函数系と思うのではなく, 本当の n 次元トーラスの上での積分です.

聴講者：複素共役はとらないのですか?

対称内積のままで扱えるようにこの定義にしましたが, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ で, Hermite 内積にして正値性を持たせたければ, $f(x^{-1})$ の部分を $\overline{f(x)}$ に置換えて下さい. どちらにしても Macdonald 多項式の係数は q,t の $\mathbb{Q}$ 係数有理函数なので, $q,t\in\mathbb{R}$ であれば, 係数は全て実数で, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ で考えれば十分ですね.

また重み函数は,

$$w(x)=\underbrace{\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}}_{w_+(x)}\underbrace{\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(x_j/x_i;q)_\infty}{(tx_j/x_i;q)_\infty}}_{w_-(x)}$$

とします. $x_i/x_j=x^{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ というのは多重指数の記号で $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ に対応していて, これが正ルートでした. つまり, 正ルートに対応する単項式が x_i/x_j です $(i<j)$. 従って $w_+(x)$ が正ルートに対応する部分で, $w_-(x)$ が負ルートに対応する部分です. $\frac{1}{(x;q)_\infty}$ は $|x|<1$ で正則だから, x がトーラス上で $\mathrm{Re}(t)<1$ ならば $w(x)$ は正則なので, 積分は正則にできます.

この $w(x)$ を重み函数とする内積について, $D_x^{(r)}$ $(r=0,\ldots,n)$ は自己共役です. ここで自己共役とは単に, $\langle Af,f\rangle=\langle f,A^*g\rangle$ とかくと $A^*=A$ となる, という意味で用いています. 自己共役であることは次のようにして確認できます. $\varpi_r=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r$ を基本ウェイトとし, $w_+(x)$ のところだけをみます.

$$\frac{T_{q,x}^{\varpi_r}(w_+(x))}{w_+(x)}=\text{const.}\prod_{1\le i\le r,r+1\le j\le n}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$$

を考えます. これは普通の微分だと対数微分にあたるものだと思ってください. 自己共役と言っていますが, 普通の微分で考えるときは, 微分作用素を部分積分で相

手側に移すわけですね. ここでは q-shift で移します. ある変数を q だけシフトすると, トーラスの半径が少し大きくなったり小さくなったりしますが, その間に極が出てこなければ, Cauchy の積分定理で元に戻せるので, 積分値は変わりません. 大事なのはその意味の q-shift に関する不変性と, $D_x^{(r)}$ の $\mathfrak{S}_n$ 不変性です. 細かい説明はここでは省きますが,

$$f(x^{-1})g(x)w(x) = f(x^{-1})w_+(x^{-1})g(x)w_+(x)$$

と分解して $T_{q,x}^{\varpi_r}$ の共役作用素を計算することで, $D_x^{(r)}$ の自己共役性が示せます. $r=1$ のとき, つまり D_x がこの内積に関して自己共役であることを各自確認してみて下さい (問 5.2). これより,

$$\langle D_x P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = \langle P_\lambda(x), D_x P_\mu(x)\rangle$$

$$d_\lambda \langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = d_\mu \langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle$$

となります. 従って,

$$d_\lambda \neq d_\mu \Rightarrow \langle P_\lambda(x), P_\mu(x)\rangle = 0$$

です. つまり, 添え字についている分割が違う Macdonald 多項式同士は直交するので, この内積に関して Macdonald 多項式は直交函数系になっています. 昨日質問をされましたが, これに対応する Jackson 積分版を考えることができて, きっと Jackson 積分に関しても直交函数系になっているはずです. なってはいるはずですが, こちらのトーラス上での積分でやるのが普通ですので $\cdots$, これは考えてみます.

この内積はトーラス上積分するので留数をとることになっていて, 積分の中身を Laurent 展開したときの 1 の係数, つまり定数項に等しいです. この内積について $\langle 1,1\rangle$ の値を定数項予想と言い, 実際はもう解決しているので予想ではないですが, 次のようになることが分かっています.

$$\langle 1,1\rangle = \prod_{i=1}^{n} \frac{(t;q)_\infty (qt^{i-1};q)_\infty}{(q;q)_\infty (t^i;q)_\infty}$$

いろいろとやり方はありますが, 証明は簡単ではありません. また内積値 $\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle$ の明示公式も存在します. 内積値の証明をしたのは Kadell だったはずです. 何故こういった計算ができるかということは考え始めると, いろいろと面白いですね. ルート系バージョンがいろいろあるので, 色々な人が色々なやり方で定数項予想や内積値予想を解いて, Cherednik の理論が出てくるころには, E_8 型くらいがまだ残っていたかもしれませんが, それ以外は殆ど出来ていたのだろうと思います. Cherednik によるアフィン Hecke 環のアプローチが出来たことによって, ルート系の言葉で系統的に証明できるようになったというのは確かなんですが, 内積値予想の解決としては, 内容として本当に新しかったのは E_8 型のときくらいかなと言う風に思っています.

聴講者：単に見通しが良くなったというだけで, 何も無かったのですか?

それは違います. 内積値予想に関してはそうかもしれませんが, それ以外の部分ではご利益は山ほどあったと思います. ただ Cherednik の理論が全てという訳ではないということも言っておきたかったので.

4.4 特殊値と双対性 (双スペクトル性)

先ほど, $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 0)$ というのが出てきました. 固有値を考えるときの, $\lambda = 0$ の場合の $t^\delta q^\lambda$ の値, $t^\delta = (t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots, 1)$ はある意味での基準点になっています. δ は A 型の場合の Macdonald 式の記法で, 表現論の人にとっては「いつもの ρ」(正ルートの和の半分) と実質的に同じものです.

- (特殊値) $P_\lambda(t^\delta) = t^{n(\lambda)} \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(t^{j-i+1}; q)_{\lambda_i - \lambda_j}}{(t^{j-i}; q)_{\lambda_i - \lambda_j}} \quad \left(但し, n(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} (i-1)\lambda_i \right)$

  超幾何函数で言うと, これは 1 での値の Gauss の和公式に相当します. Macdonald の本にはもう少し組み合わせ論的なヤング図形の言葉で書いてありますが, いろいろやっているとこちらの記法の方が便利なのでこちらを紹介しておきます.

- (双対性) $\dfrac{P_\lambda(t^\delta q^\mu)}{P_\lambda(t^\delta)} = \dfrac{P_\mu(t^\delta q^\lambda)}{P_\mu(t^\delta)} \quad (\lambda, \mu \in L^+)$

  $\widetilde{P_\lambda}(x) := \dfrac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)}$ として基準点での値が 1 になるように規格化し直すと, $\widetilde{P_\lambda}(t^\delta q^\mu) = \widetilde{P_\mu}(t^\delta q^\lambda)$ ともかけます. λ というのは固有値のパラメータで, x というのは空間のパラメータですが, その空間のパラメータを $t^\delta q^\mu$ に置き換えると, 位置のパラメータとスペクトル (運動量) のパラメータを交換できるというのが双スペクトル性です. 今は全て分割をパラメータとしているので, これは離散的な点に関する双スペクトル性です. この話のときにはいつも

  $$\partial_x(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}, \ \ \partial_\lambda(e^{\lambda x}) = x e^{\lambda x}$$

  を思い描くのですが, これが双スペクトル性ですね. dual な変数に対して対称性があるというわけです.

この双スペクトル性は q の世界にいってはじめて成り立つことだと思います. Jacobi 多項式の場合には, x についての Gauss の微分方程式と n 次の n についての漸化式だったものが, パラメータを読み替えると本質的に同じものになる, というのが Macdonald 的な世界です. 微分方程式の時には, 片側は微分的な構造になっ

ていて, もう片側は差分的な構造になっているという風に分かれていますが, q 差分の時には, スペクトル側の変数と空間側の変数が同じに見えるというのが非常に特徴的なことです.

4.5　Pieri 公式、分岐則、タブロー表示

Macdonald 多項式同士の積はまた対称函数であるので, Macdonald 多項式の和に展開できます.

$$P_\mu(x)P_\nu(x) = \sum_\lambda c_{\mu,\nu}^\lambda P_\lambda(x)$$

と書いたときに, この係数 $c_{\mu,\nu}^\lambda$ がどうなるかというのは興味深い問題です. 表現論で言うと, 例えば一般線型群で考えることにして, μ に対応する既約表現と, ν に対応する既約表現のテンソル積をもってくると, それを既約表現に分解したときに, 重複をこめてどのように既約分解するかという問題を考えて, それを character に移せば, Schur 函数の場合のこの式になります. 係数 $c_{\mu,\nu}^\lambda$ を Littlewood-Richardson 係数などと呼びます.

聴講者：それが Cherednik 流の表現論と関係する理由ですか?

違います. そこは直接は関係ありません.

この係数は簡単には書けないのが普通ですが, 明示公式が存在する場合もあります. 片側が 1 列のとき,

$$e_r(x)P_\mu(x) = \sum_{\substack{\mu\subseteq\lambda\in L^+ \\ \lambda-\mu:\text{vertical } r\text{-strip}}} \varphi'_{\lambda/\mu}P_\lambda(x)$$

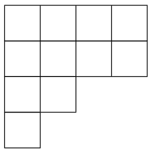
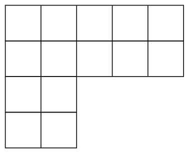
片側が 1 行のとき,

$$P_{(l)}\left(x\right)P_\mu\left(x\right) = \sum_{\substack{\mu\subseteq\lambda\in L^+ \\ \lambda-\mu:\text{horizontal } l\text{-strip}}} \varphi_{\lambda/\mu}P_\lambda\left(x\right)$$

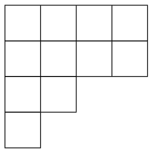
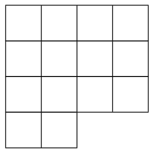
と書くと, 各係数 $\varphi'_{\lambda/\mu}$ と $\varphi_{\lambda/\mu}$ の明示公式が存在します. この片側が 1 列の場合の式を Pieri 公式と言います. 但し, $\lambda-\mu$: vertical r-strip とは, λ が μ に, 各行につき 0 個または 1 個の箱を, 計 r 個付け加えたヤング図形になっていることで, horizontal l-strip とは, λ が μ に, 各列につき 0 個または 1 個の箱を, 計 l 個付け加えたヤング図形になっていることを意味します. 日本語に訳すなら「垂直 r 片」と「水平 l 片」というところでしょうか.

例：

$\lambda-\mu$: vertical 3-strip

$\mu =$  $\to \lambda =$ 

$\lambda-\mu$: horizontal 3-strip

$\mu =$  $\to \lambda =$ 

また, $m+n$ 変数の Macdonald 多項式があったときに, 変数を x 変数 (m 変数) と y 変数 (n 変数) にわけ, x 変数側の Macdonald 多項式と y 変数側の Macdonald 多項式の積の和に書け, というのを分岐則と言います.

$$P_\lambda(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=\sum_{\mu,\nu} a^\lambda_{\mu,\nu}P_\mu(x_1,\dots,x_m)P_\nu(y_1,\dots,y_n)$$

Schur 函数の場合で言うと, これは GL_{m+n} の既約表現を部分群 $\mathrm{GL}_m\times\mathrm{GL}_n$ の表現として既約分解すると, どのような既約表現がどのような重複度で現われるか, という問題に対応します.

ここで特に重要なのは, n 変数の Macdonald 多項式を最後の変数で展開したときに係数がどうなるかということですが, この係数の明示公式が分かっています.

$$P_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\substack{\mu\subseteq\lambda\in L^+\\ \lambda-\mu:\text{horizontal-strip}}} P_\mu(x_1,\dots,x_{n-1})\psi_{\lambda/\mu}x_m^{|\lambda|-|\mu|}$$

$$\psi_{\lambda/\mu}=\prod_{i<j}\frac{(q^{\mu_i-\lambda_j+1}t^{j-i+1};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\lambda_j}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}\prod_{i\le j}\frac{(q^{\mu_i-\mu_j}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}{(q^{\mu_i-\mu_j+1}t^{j-i};q)_{\lambda_i-\mu_i}}$$

この 1 ステップの分岐則というがあると, これを繰り返し適用することにより n 変数の Macdonald 多項式の明示公式が得られます. それがよくタブロー表示と呼ばれるもので, 次のようにかけます.

$$P_\lambda(x)=\sum_{\phi=\mu^{(0)}\subseteq\mu^{(1)}\subseteq\cdots\subseteq\mu^{(n)}=\lambda}\prod_{k=1}^{n}\psi_{\mu^{(k)}/\mu^{(k-1)}}x_k^{|\mu^{(k)}|-|\mu^{(k-1)}|}$$

但し, 各 $\subseteq$ は horizontal strip とします. この horizontal strip の増大列は, 形が λ の半標準版 $T\in\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ に対応させることが出来ます. これは T で 1 が入っているところを $\mu^{(1)}$, 2 以下が入っているところを $\mu^{(2)}$, ... というように思うと, ϕ か

ら λ に至る分割の増大列 $\phi = \mu^{(0)} \subseteq \mu^{(1)} \subseteq \mu^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \mu^{(n)} = \lambda$ で, 各ステップが horizontal strip になっているものが作れて, これが 1 対 1 対応になります. このやり方で, 上の式は, $\mathrm{SSTab}_n(\lambda)$ に属する半標準版毎に係数と x の単項式が定めて, それら足し上げたものと思うことが出来て, 恰度 Schur 函数のタブロー表示の Macdonald 多項式版になっています. これは Macdonald の本 (bible) に載っています.

4.6 母函数 (Cauchy 型核函数)

最後にひとつ母函数を紹介しておきます. これはさっき練習問題 (問 5.1) として計算してもらったものに関係があります. 問題では n 変数の Macdonald 多項式で 1 行の場合の計算をするのに, x を n 変数 y を 1 変数にしました. これを一般にすると, m 変数の $x = (x_1, \ldots, x_m)$ の Macdonald 多項式と n 変数の $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の Macdonald 多項式について次の形の式が成立します.

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty} = \sum_{l(\lambda)\le\min\{m,n\}} b_\lambda P_\lambda(x_1,\ldots,x_m)P_\lambda(y_1,\ldots,y_n)$$

先ほどは片方が 1 変数という特別な場合を考えましたが, その一般的な場合です. この係数 b_λ も計算は大変ですが, 明示公式が存在します.

こういう母函数的な構造に注目すると, Macdonald 多項式で変数を分割することと, 同じ変数をもつ Macdonald 多項式の掛け算をするということが, 母関数でぱたぱたと移りあって, 実は分岐係数と Littlewood-Richardson 係数が互いに dual になっているというようなことが分かったりもします. これは Schur 函数でいうときの Cauchy の補題

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{l(\lambda)\le\min\{m,n\}} s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)s_\lambda(y_1,\ldots,y_n)$$

にあたるものです.

5 練習問題

問 5.1. (1) q 二項定理

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$

を示せ. (但し $|q| < 1$, $|x| < 1$.)

(2)　n 変数の $x=(x_1,\ldots,x_n)$ と 1 変数の y について

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}=\sum_{l=0}^{\infty}g_l(x;q,t)y^l$$

としたときの $g_l(x;q,t)$ を求めよ.

(3)　次を示せ.

$$D_x\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}=\left(t^{n-1}T_{q,y}+\frac{1-t^{n-1}}{1-t}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{(tx_iy;q)_\infty}{(x_iy;q)_\infty}$$

問 5.2. 作用素 D_x が自己共役作用素であることを確認せよ.

(コメント)

問 5.1.

(1)　左辺は x の正則函数なのでこの式は原点で Taylor 展開である. 係数を求めるには x についての q 差分方程式を考えればよい.

(2)　$g_l(x;q,t)=\displaystyle\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=l}\frac{(t;q)_{\mu_1}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q;q)_{\mu_1}\cdots(q;q)_{\mu_n}}x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$.

(3) こういうものをよく核関係式という. 実際に作用素を作用させて出てくる有理函数の恒等式を示す.

以上より $P_{(l)}(x)$ の明示公式が導ける.

(1) で $a=q^\alpha$ として, $q\to 1$ の極限を考えると, これは Newton の二項展開

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(1)_k}x^k$$

に対応する. (2) において $t=q^\kappa$ とすると, 左辺は $q\to 1$ では二項式の冪積 $\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\kappa}$ に対応する. 二項式の冪積を展開して y について整理すると

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\kappa}=\sum_{l=0}^{\infty}g_l(x)y^l,\quad g_l(x)=\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=l}\frac{(\kappa)_{\mu_1}\cdots(\kappa)_{\mu_n}}{(1)_{\mu_1}\cdots(1)_{\mu_n}}x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}.$$

展開係数は

$$g_l(x)=\mathrm{Res}_{y=0}\Big(y^{-l-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\kappa}dy\Big)\quad(l=0,1,2,\ldots)\tag{5.1}$$

と表されるが, y に関する積分は Jordan-Pochhammer 積分である. $x=(x_1,\ldots,x_n)$ の函数としては, 実質的に F_D の積分表示を考えることと同じなので, 展開係数 $g_l(x)$ が F_D で表されるのは自然なことである.

(終)