Twisted cohomology 群と D 加群の積分

Ω^i を変数 $x_1, \dots, x_n$ の多項式係数の i 次微分形式の集合, f_i を多項式, β_i を複素数, D_n をこの多項式環上の微分作用素環 $\mathbf{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とする.

Theorem

D_n の左イデアル I を f_i の冪積の零化イデアル

$$\mathrm{ann}\, f^\beta = \{\ell \in D_n \,|\, \ell \bullet f^\beta = 0\}, \quad f^\beta = \prod f_i^{\beta_i}$$

とする. $\nabla = d + \sum \beta_i d \log f_i$ とおく. この時,

$$D_n/(I + \partial_1 D_n + \cdots + \partial_n D_n) \simeq H^n\left(\left(\Omega^\bullet\left[\frac{1}{f}\right], \nabla\right)\right)$$

1. $\mathrm{ann} \prod f_i^{\beta_i}$ をどう計算するか? b-関数.
2. D_n 加群 D_n/I の 0-次の積分 $D_n/(I + \partial_1 D_n + \cdots + \partial_n D_n)$ をどう計算するか? 積分アルゴリズム. $\pi_* : \mathbf{C} \to \{\mathrm{pt}\}$.

証明:

$$R^0\pi_*(D_n/I) \ni \ell \mapsto (\ell \bullet f^\beta) f^{-\beta} dx \in \Omega^n \left[\frac{1}{f}\right] dx, \quad dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

が同型を与える. Well-defined であることを示す. $\ell \in I$,
$p_{i\gamma} \in \mathbf{C}[x]$ の時,

$$\begin{aligned} & ((\ell + \sum \partial_i p_{i\gamma} \partial^\gamma) \bullet f^\beta) f^{-\beta} dx \\ = & \sum \partial_i \bullet (p_{i\gamma} \partial^\gamma \bullet f^\beta) f^{-\beta} dx \\ = & \sum (\partial_i \bullet (p_{i\gamma} f[\gamma] f^\beta) f^{-\beta} dx \\ = & \left(d \sum p_{i\gamma} f[\gamma] f^\beta (dx)^i \right) f^{-\beta} \end{aligned}$$

ここで, $(dx)^i$ は $dx_i \wedge (dx)^i = dx$ となる $n-1$-form, $f[\gamma]$ は
$\partial^\gamma \bullet f^\beta = f[\gamma] f^\beta$ となる $\mathbf{C}[x, 1/f]$ の元. 上の最後の式は,
$\nabla \sum p_{i\gamma} f[\gamma] (dx)^i$ に他ならない. 全射, 単射性は略. //

```
i3 : load "Dmodules.m2"
i4 : QQ[x,dx,WeylAlgebra=>{x=>dx}]
i5:  I=AnnFs(x*(1-x)*(2-x))
               3        2        2
o5 = ideal(x dx - 3x dx - 3x s + 2x*dx + 6x*s - 2s)
i6 : R = QQ[x,dx,WeylAlgebra=>{x=>dx}]
i7 : J=ideal (x^3*dx-3*x^2*dx-3*x^2*(-1/2)+2*x*dx+6*x*(-1/2
i8 : Dintegration(J,{1})
                             2
o8 = HashTable{0 => QQ }
               1 => 0
```

$f = x(1-x)(2-x)$, $\nabla = d - d\log f^s$, $s = -1/2$ (generic). この結果は $H^i(\mathbf{C} \setminus \{0,1,2\}, \nabla)$ の次元.

Fun with Risa/Asir

```
import("names.rr")$
import("nk_restriction.rr")$
F=x*(1-x)*(2-x)*(3-x)$
I=[F*dx+(1/2)*diff(F,x)];
nk_restriction.integration(I,[x],[dx],[1]);
  [[],[[2],[1],[0]]] //[[2],[1],[0]] a basis of C^3
G=x*(1-x)*(2-x)$  F=G*(z-x)$
I=[F*dx+(1/2)*diff(F,x),red((F*dz+(1/2)*diff(F,z))/G)];
nk_restriction.integration(I,[x,z],[dx,dz],[1,0]);
  [[-4*dz^3*z^3+ ... snip, -2*dz*x+2*dz*z+1],[[1],[0]]]
nk_restriction.integration_ideal(I,[x,z],[dx,dz],[1,0]);
  [4*dz^2*z^3+(-12*dz^2+12*dz)*z^2+(8*dz^2-24*dz+3)*z+8*dz-
```

$f = x(1-x)(2-x)(3-x)$, $\nabla = d - d\log f^s$, $s = -1/2$ (generic).
The result is a basis of $H^1(\mathbf{C} \setminus \{0,1,2,3\}, \nabla)$.

これらのパッケージ関数で用いているアルゴリズムの概略: 積分関手 $\pi_* = \int_\pi$ の計算法 (Oaku, 1997. Oaku-Takayama, 2001). $\pi : \mathbf{C} \to \{\mathrm{pt}\}$ (1 次元で鍵となるアイディアを説明).
以下 $\mathbf{C}$ を K と記す. $f = \sum_{j=0}^m f_j x^j$ を x の一変数多項式. $m = \mathrm{ord}_w(f)$, $w = (1)$. $K[x]_k$ は次数が k 以下の多項式からなる K ベクトル空間.

$$x^i f(x) = \sum_{j=0}^m f_j x^{j+i}$$

を念頭に次のように線形写像を定める. ($e_i \Leftrightarrow x^i$)

$$K[x]_{k-m} \simeq K^{k-m+1} \ni e_i \mapsto \sum_{j=0}^m f_j e_{j+i} \in K^{k+1} \simeq K[x]_k.$$

この線形写像の行列表現を $M_k(f)$ と書き Macaulay type matrix of the degree k とよぶ. (横ベクトル $\cdot$ 行列 $=$ 横ベクトル)

$$x^i f(x) = \sum_{j=0}^{m} f_j x^{j+i}$$

$K[x]_k$ は次数が k 以下の多項式からなる K ベクトル空間. 次のように線形写像を定める. ($e_i \Leftrightarrow x^i$)

$$K[x]_{k-m} \simeq K^{k-m+1} \ni e_i \mapsto \sum_{j=0}^{m} f_j e_{j+i} \in K^{k+1} \simeq K[x]_k.$$

Example B1: $f(x) = x^2 + 1$.

$$e_0 \mapsto 1 \cdot (x^2 + 1) = e_2 + e_0, e_1 \mapsto x \cdot (x^2 + 1) = e_3 + e_1$$

$$M_3(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 列の index は e_0, e_1, ...

$$D = K\langle x, \partial \rangle$$

(関係式は $\partial x = x\partial + 1$.) $w = 1$, $\mathrm{ord}_{(-w,w)}(x^i \partial^j) = j - i$.
$f = \sum c_{ij} x^i \partial^j$ は $(j - i)$ 達がすべて同じ数の時, $(-w, w)$ homogeneous と呼ぶ.
補題 B2: D の元 f, g が $(-w, w)$ homogeneous なら fg も $(-w, w)$ homogeneous.
証明. 次の Leipnitz の公式を使う.

$$\partial^p x^q = x^q \partial^p + pq x^{q-1} \partial^{p-1} + \frac{p(p-1)q(q-1)}{2!} x^{q-2} \partial^{p-2} + \cdots$$

さて, $\mathrm{ord}_{(-w,w)}(x^{q-i}\partial^{p-i}) = (p-i) - (q-i) = p - q$ であるので, $f = \partial^p$, $g = x^q$ の場合に示せる. 一般の場合はこの場合に帰着. //
$x^i \partial^j$, $j - i \leq k$ が張る K ベクトル空間を V_k と書く. (これは $(-w, w)$-次数が k 以下の元達である). $V_{-1} \subseteq xD$ を心にとめておく. Kashiwara-Malgrange filtration (with degree shift).

補題 B4: $g \in D$ を $(-w, w)$ 次数が k の微分作用素とする．
$f \in V_m \cap Dg$ に対して $m \geq k$ なら

$$f = qg$$

を満たす $q \in V_{m-k}$ が存在．D_n の左イデアルの生成元で同様の補題 が成立するには $(-w, w)$-グレブナー基底が必要．
$f \in Dg$ (g で生成される左イデアル) なので，$f = q'g$ をみたす q' が存在する．$r = \mathrm{ord}_{(-w,w)}(q') > m - k$ とし，$q' = q'_1 + q'_2$ と分解する．ここで q'_1 は $(-w, w)$ homogeneous でその次数は r, q'_2 の次数は r 未満とする．g も同じように分解する: $g = g_1 + g_2$.
$q'g = q'_1 g_1 + q'_1 g_2 + q'_2 g = f$. 最高次の項 $q'_1 g_1$ は $(-w, w)$ homogeneous で次数は m より真に大きい．よって $q'_1 g_1 = 0$ である．したがって $q'_1 = 0$. これは矛盾． //

f を D の元とする. $\sum c_{ij} x^i \partial^j$ (∂ 達を右に集める) の形の f の表示を the normally ordered expression と呼び, 記号 $: f :$ で表す.
Example. $: \partial x := x\partial_x + 1$.
自然数 k を fix する. $g \in D$, $\mathrm{ord}_{(-w,w)}(g) = j$ は次のように線形写像

$$K[\partial]_{k-j} \ni \partial^i \mapsto : \partial^i g : |_{x=0} \in K[\partial]_k$$

を定義する. この写像を行列表現したものを Macaulay type matrix for restriction of degree k とよび $M_k(g)$ と書く.
Example B5: $g = x\partial^2 + x\partial$, $k = 2$.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto & : x\partial^2 + x\partial : |_{x=0} = 0 \\ \partial &\mapsto & : \partial g : |_{x=0} = x\partial^3 + \partial^2 + x\partial^2 + \partial \,|_{x=0} = \partial^2 + \partial \end{aligned}$$

$$M_2(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$K[\partial]_{k-1}$ は行ベクトルとみなす.

$$C^\bullet : 0 \xrightarrow{\varphi_{m+1}} K^{b_m} \xrightarrow{\varphi_m} K^{b_{m-1}} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \cdots \to K^{b_1} \xrightarrow{\varphi_1} K^{b_0} \xrightarrow{\varphi_0} 0$$

ここで φ_i は K-線形写像である. $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$ が成り立つ時上の図式を complex of vector spaces (ベクトル空間の複体) とよぶ.

$$H^{-i}(C^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\,\varphi_i}{\mathrm{Im}\,\varphi_{i+1}}$$

と定義する. これは K-ベクトル空間である.

Example B6: $g = x\partial^2 + x\partial$.

$$C^\bullet : 0 \to K^2 \xrightarrow{M_2(g)} K^3 \to 0$$

$H^{-1}(C^\bullet) \simeq K$, $H^0(C^\bullet) \simeq K^2$.

Theorem

$g \in D$ に対して k_0 を Dg の *indicial polynomial (b-function)* の最大の整数根とする．$k \geq k_0$ に対して次のようにベクトル空間の *complex* を定義する．

$$C^\bullet \ : \ 0 \to K^{k+1-\mathrm{ord}_{(-w,w)}(g)} \xrightarrow{M_k(g)} K^{k+1} \to 0$$

この時 $H^{-i}(C^\bullet) = H^{-i}(G^\bullet)$ が成立．ここで

$$G^\bullet : 0 \to D/xD \otimes_D D \xrightarrow{1 \otimes g} D/xD \otimes_D D \to 0$$

$x^i \partial^j$ の形式 Fourier 変換を $(-\partial)^i x^j$ と定義．これは自然に D に延長できる．

Example B8: $f(x) = x(1-x)$ に対して $\hat{g}$ が $\mathrm{ann}\, 1/f$ の生成元とする．g は $\hat{g}$ の形式 Fourier 変換だとする．この時この g は例 B5, B6 に出てくる g．また $k_0 = 1$．定理は D 加群 $D/D\hat{g}$ の積分の計算．$D/xD \Leftrightarrow D/\partial D$.

証明. K-ベクトル空間の complex

$$0 \to D/xD \otimes_D D \xrightarrow{1\otimes g} D/xD \otimes_D D \to 0$$

は次のように書き直せる.

$$G^\bullet \,:\, 0 \to D/xD \ni f \overset{\varphi}{\mapsto} :fg:|_{x=0} \in D/xD \simeq K[\partial] \to 0$$

$H^j(C^\bullet) \to H^j(G^\bullet)$ が同型であることを示そう. H^0 について. 0 でない元 $f = \partial^i + \sum_{j<i} c_j \partial^j$ of $K[\partial]_k/\mathrm{Im}\, M_k(g)$ $(i \le k)$ を考える. もし $f \in Dg + xD$ かつ $i \ge r = \mathrm{ord}_{(-w,w)}(g)$ ならば, 補題 B4 および 補題 B11(末尾 (b-関数が必要)) により, $f - xu = qg$ となる $q \in V_{k-r}$, $u \in V_{k+1}$ が存在する. したがって $f =: qg :|_{x=0} \in \mathrm{Im}\, M_k(g)$. これは仮定に反する. したがって $f \notin Dg + xD$ でありこれは $:Dg:|_{x=0}$ に属しない. よって, $H^0(C^\bullet)$ から $H^0(G^\bullet)$ への線形写像は単射である.

$b(s)$ を Dg の indicial polynomial (b-function) とする．
$b(x\partial) \equiv x^r g \bmod V_{-1}$ と仮定する．$k' > k_0$ としよう．$\partial^{k'}$ を両辺に作用させて $b(k')\partial^{k'} + x(\cdots) \equiv \partial^{k'} x^r g \bmod V_{-1+k'}$．よって $b(k')\partial^{k'} \equiv 0 \bmod V_{-1+k'} + Dg + xD$．これは全射を意味する．

H^{-1} について．$\mathrm{Ker}\, M_k(g)$ から $\mathrm{Ker}\, \varphi$ への K-線形写像が isomorphism だということを示そう．$\sum_{i \le k-r} c_i \partial^i \neq 0$ が $M_k(g)$ の kernel に属するとする．つまり : $(\sum c_i \partial^i) g : |_{x=0} = 0$．これは $\sum c_i \partial^i$ が $\mathrm{Ker}\, \varphi$ の 0 でない元であることを意味する．よって考えている線形写像は ($\neq 0 \Rightarrow \neq 0$ なので) injective である．
$r < 0$ の場合も同様に示せる．

全射性を示すために, g の最大 $(-w,w)$ 次数の項が $\sum_{i=0}^{m} c_i x^i \partial^{r+i}$ と書けるとする. ∂^j をこの和に作用して,

$$\partial^j g = \sum_{i=0}^{m} c_i j(j-1)\cdots(j-i+1)\partial^{r+j} \mod V_{j+r-1} + xD$$

$a\partial^j + \cdots$ が φ の kernel に属するとする. 以下の式を得る.

$$:(a\partial^j + \cdots)g:|_{x=0} = a(\sum_{i=0}^{m} c_i j(j-1)\cdots(j-i+1)))\partial^{r+j} + \cdots .$$

一方 Dg の indicial polynomial は 以下に等しい.

$$x^r \sum c_i x^i \partial^{r+i} = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta(\theta-1)\cdots(\theta-r-i+1)$$

$j > k-r$ の時, θ に $j+r>k$ を代入して次の式を得る.
$(j+r)\cdots(j+1)(\sum_{i=0}^{m} c_i j(j-1)\cdots(j-i+1))) \neq 0$. よって $j>k-r$ なら $a=0$. これは全射性を意味する. //

補題 B11. $f \in V_k \cap (Dg + xD)$ に対し, $f = xu + qg \in V_k$ なる表現で, $\mathrm{ord}(xu) \le k$ となる u, q が存在する. ここで k は $b(s) = 0$ の最大整数根以上の数.
証明: 上の表現で, $j - 1 = \mathrm{ord}(xu)$ が最小となる u をとる.
$j - 1 > k$ と仮定する. $ub(x\partial) \equiv 0 \mod Dg \cap V_j + V_{j-1}$ である.

$$b(x\partial + j)u \equiv 0 \mod Dg \cap V_j + V_{j-1}$$

となる. $x\partial$ の順番を入れ替えると,

$$b(\partial x - 1 + j)u \equiv 0, \quad \mod Dg \cap V_j + V_{j-1}$$

さて, $j - 1 > k$ より仮定から xu の最高次の項は qg の最高次の項とキャンセルするので,

$$xu \equiv 0 \mod Dg \cap V_{j-1} + V_{j-2}$$

さらに $b(\partial x + j - 1)u = b(j-1)u + rxu$, $r \in V_1$ とかける. これを合わせると,

$$rxu \equiv 0 \mod Dg \cap V_j + V_{j-1}$$

$b(j-1) \neq 0$ なので, $u \equiv 0 \mod Dg \cap V_j + V_{j-1}$. これは矛盾. //

どのくらいのサイズの問題が解ける?

1. H.Nakayama, N.Takayama, Computing differential equations for integrals associated to smooth Fano polytope, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 30 (2013), 307–319.
   1. 3 次元, 11 番目 (点が 6 個) まで.
2. K.Nishiyama, M.Noro, Stratification associated with local b-functions, Journal of Symbolic Computation 45 (2010), 462–480.
   1. $x^4y^4 + x^2y^2z^2 + 2x^2y^2wz + 2xyzw + z^2w^2 + w^2$.
   2. resultant(f_k, f_k') ここで $f_k = x^{k+1} + u_1 + u_2x + \cdots + u_kx^{k-1}$. $k = 3$ まで.

参考講義と問題

1. http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2015 の下の tmp/, keisan-1/ref.html
2. http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~msj-si-2015 M.Stillman, Computing with coherent sheaves and sheaf cohomology with applications to geometry and string theory (with Macaulay 2). $X \subset \mathbf{P}^n$, X は non-sigular. $H^q(\Omega_X^p)$ の次元の計算.
3. 問題: nearby cycle, vanishing cycle, $H^i(\mathbf{C}^n \setminus V(f); \mathcal{L})$ の mixed Hodge 構造のアルゴリズムによる計算.
4. 問題: $\mathbf{P}^1$ の上の D-加群と $U(s\ell(2))$-module の対応 (Beilinson-Bernstein 対応).
$$\partial_z \mapsto e, \ -2z\partial_z \mapsto h, \ \partial_w \mapsto f,$$
$w = 1/z$. sheaf cohomology. 積分関手の計算は?
5. どこまで algorithmic に計算できるのか? 計算機 (ネットワーク) と数学の議論をする, 計算機 (ネットワーク) と共に働く.