

はじめに

Euler 標数法と Selberg 型積分
高山信毅 (神戸大学) (栗木哲 (統数研) との共同研究)

Theorem

$$M_x = \{hg^T \mid g^T Ah \geq x, h, g \in S^{m-1}\}$$

A は $m \times m$ random 行列で, covariance E_m/s , 平均 0 の Gauss 分布に従う:

$$p(A) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}(sA^T A)\right).$$

このとき

$$E[\chi(M_x(s))] = \prod_{i=1}^5 c_i \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{s}{2}\sigma^2\right) {}_1F_1(-(m-1), 1; s\sigma^2) d\sigma$$

Euler 標数法文献表: 栗木, 竹村, チューブの体積と正規確率場の最大値の分布, 数学 (2008), 134–155.

青本 (1987), 金子 (1993), Selberg 型積分

$$\int_{[0,1]^{m-1}} \prod_{1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq r} (\ell_i - \sigma_k)^\mu D(\ell_1, \dots, \ell_{m-1}) d\ell_1 \cdots d\ell_{m-1}, \quad (1)$$

$$D = \prod_{i=1}^{m-1} \ell_i^{\lambda_1} (1 - \ell_i)^{\lambda_2} \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} |\ell_i - \ell_j|^\lambda,$$

の満す微分方程式, 特殊値, 級数展開が $\mu = 1$ または $\mu = -\lambda/2$ の時に導出されている (J.Kaneko, Selberg Integrals and Hypergeometric Functions associated with Jack Polynomials, SIAM Journal on Mathematical Analysis 24 (1993), 1086–1110).

合流

ここで, $\ell_i = y_i/N$, $\lambda_2 = N$, $\sigma_i = \tau_i/N$ と変数変換すると, $d\ell_i = dy_i/N$, $(1 - \ell_i)^\lambda = (1 - y_i/N)^N$ となり, $(1 - y_i/N)^N \rightarrow \exp(-y_i)$, $N \rightarrow \infty$. 積分 (1) は下記のものへ.

$$\int_{\mathbf{R}_{\geq 0}^{m-1}} \prod_{1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq r} (y_i - \tau_k)^\mu D(y_1, \dots, y_{m-1}) dy_1 \cdots dy_{m-1},$$

$$D = \prod_{i=1}^{m-1} y_i^{\lambda_1} \exp\left(-\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right) \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} |y_i - y_j|^\lambda,$$

$r = 1$, $\mu = 1$ の時, 青本微分方程式を合流:

$$\theta_{\tau_1}(\theta_{\tau_1} + \frac{2}{\lambda}(\lambda_1 + 1) - 1) - \frac{2}{\lambda}\tau_1(\theta_{\tau_1} - (m-1))$$

特に $\lambda = 1$, $\lambda_1 = -1/2$ の時上の積分は

$$c_5 \cdot {}_1F_1(-(m-1), 1; 2\tau_1)$$

c_5 の具体形は略

Euler 標数法とは? Adler, Hosofer(1970's), Worsley(1994)

$f(U)$ を M 上の smooth な random field. $M_x = \{U \mid f(U) \geq x\}$.

M_x の Euler 標数の期待値 $\sim P(\max f(U) \geq x)$

simple な例: $\Rightarrow$ 別スライド. 記号: $P(\cdots) = (\cdots \text{となる確率})$.

例: $A = (a_{ij})$: 実 $m \times n$ 行列値 random variable (random matrix), 確率密度は

$$p(A)dA, \quad dA = \prod da_{ij}.$$

$p(A)$ は smooth で $n \geq m \geq 2$ と仮定.

$$M = \{hg^T \mid g \in S^{m-1}, h \in S^{n-1}\} \simeq S^{m-1} \times S^{n-1} / \sim$$

h と g はたてベクトルとする. $(h, g) \sim (-h, -g)$. (hg^T は $n \times m$ 行列.)

$$f(U) = \text{tr}(UA) = g^T Ah, \quad U = hg^T \in M$$

とにおいて,

$$M_x = \{hg^T \in M \mid f(U) = g^T Ah \geq x\}$$

Euler 標数の期待値の計算 1

Morse 理論を使うので, critical point を調べる. 次はよく知られている:

命題

$m \times n$ 行列 A を fix. 次の条件は同値.

- ① 関数 $f(U) = g^T A h$ が $U = h g^T$ で critical point を持つ.
- ② ベクトル $g \in S^{m-1}, h \in S^{n-1}$ は A の左右固有ベクトル. つまり $g^T A = c h^T, A h = c g$ となる実数 c が存在する.

critical point (g, h) で f は値 c を持つ.

Proof sketch: $g \in S^{m-1}$ を局所座標 $u_i, 1 \leq i \leq m-1$ でパラメータづけして, $g^T g = 1$ とかを u_i で微分して $(\partial_i g^T)g + g^T(\partial_i g) = 0$ など. $h \in S^{n-1}$ は $v_a, 1 \leq a \leq n-1$ でパラメータづけ. v_a についての微分は ∂_a と書く (あとで使う). $f(U)$ を u_i で微分など.

Euler 標数の期待値の計算 2

$SO(m)$ の元の族で一番目の列ベクトル $g \in S^{m-1}$ でパラメータづけされてるものを $(g, G(g))$ として固定 (G は $m \times (m-1)$ 行列).
 $(h, H(h)) \in SO(n)$, $h \in S^{n-1}$ も同様.

$$\sigma = g^T A h, \quad B = G^T(g) A H(h) \in M(m-1, n-1) \quad (2)$$

とおけば, $m \times n$ 行列 A は以下のように書ける.

$$A = \sigma g h^T + G B H^T, \quad (3)$$

Idea:

$$A \Leftrightarrow (\sigma, h, g, B)$$

なる変数変換を使う.

Euler 標数の期待値の計算 3

Theorem

$x > 0$ および $f(U)$ は a.e. A で *Morse function* と仮定. $E[\chi(M_x)]$ (期待値) は次の積分に等しい.

$$\frac{1}{2} \int_x^\infty d\sigma \int_{\mathbf{R}^{(m-1)(n-1)}} dB \int_{S^{m-1}} G^T dg \int_{S^{n-1}} H^T dh \det(\sigma^2 I_{m-1} - BB^T) p(A). \quad (4)$$

ここで $G^T dg = \wedge_{i=1}^{m-1} G_i^T dg$, $H^T dh = \wedge_{i=1}^{n-1} H_i^T dh$ (G_i は G の i 番目の列ベクトル, H_i も同様.) $dg = (dg_1, \dots, dg_m)^T$, $dh = (dh_1, \dots, dh_n)^T$.

Euler 標数の期待値の計算 4

Proof sketch. Morse の定理を使う.

$$\begin{aligned}\chi(M_x) &= \sum_{\text{critical point}} \mathbf{1}(f(U) \geq x) \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} -\partial_i \partial_j f & -\partial_i \partial_a f \\ -\partial_a \partial_i f & -\partial_a \partial_b f \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\text{eigenvectors}} \mathbf{1}(\sigma \geq x) \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} \sigma I_m & -GBH^T \\ -HB^T G^T & \sigma I_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\text{eigenvectors}} \mathbf{1}(\sigma \geq x) \operatorname{sgn} \sigma^{n-m} \sigma^2 \det(\sigma^2 I_{m-1} - BB^T)\end{aligned}$$

一方 Jacobian は

$$dA = \frac{1}{2} |\det(\sigma^2 I_{m-1} - BB^T)| d\sigma G^T dg H^T dh dB \quad (5)$$

問題

目標

random matrix A の確率分布密度 $p(A)$ を与えて, $E[\chi(M_x)]$ を (HGM 等で) 数値計算する. Euler 標数法によれば, x が大きいときこの値は,

$$P(\max_{g,h} g^T A h \geq x) = P(\text{最大固有値}(A) \geq x)$$

を近似.

ここでの"固有値" は, 左右固有ベクトルに対する実固有値の意味.

$$p(A) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(A - M)^T \Sigma^{-1} (A - M) \right) \quad (6)$$

ここで, $m \times n$ 行列 M は平均. $n \times n$ の positive definite matrix Σ は covariance.

部分成果: $M = 0$, Σ が scalar 行列なら, 青本, 金子に帰着して数値計算.

Selberg 型積分に帰着する場合 1

Theorem

$$M_x = \{hg^T \mid g^T Ah \geq x, h, g \in S^{m-1}\}$$

A は $m \times m$ random 行列で, covariance E_m/s , 平均 0 の Gauss 分布に従う:

$$p(A) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr}(sA^T A)\right).$$

$$E[\chi(M_x(s))] = \prod_{i=1}^5 c_i \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{s}{2}\sigma^2\right) {}_1F_1(-(m-1), 1; s\sigma^2) d\sigma$$

Idea: 積分表示 (4) をこの場合に B の SVD の座標で計算.

Selberg 型積分に帰着する場合 2

Proof sketch.

$$\tilde{G} = (g \mid G) \in O(m), \quad g \text{ is a column vector,}$$

$\tilde{H} = (h, H)$. とおくと, $m \times n$ 行列 A は,

$$A = \tilde{G} \left(\begin{array}{c|c} \sigma & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \tilde{H}^T,$$

上の式の真ん中の行列を $\tilde{B}$ と書く. $\text{etr}(X)$ で $\exp(\text{Tr}(X))$ を表す.
 $\text{tr}(PQ) = \text{tr}(QP)$, $\tilde{H}^T \tilde{H} = E$ 等に注意.

$$\begin{aligned} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}sA^T A\right) &= \text{etr}\left(-\frac{s}{2}\tilde{B}\tilde{B}^T\right) \\ &= \exp\left(-\frac{s}{2}\sigma^2\right) \exp\left(-\frac{s}{2}LL^T\right) \end{aligned}$$

上記変形では行列 B を $B = PLQ^T$, $P, Q \in O(m-1)$,
 $L = \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_{m-1})$ と singular value decomposition の形で表し, B の
成分の座標を P, L, Q の座標で表す.

Selberg 型積分に帰着する場合 3 (c_i にミスあるかも)

$$c_1(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{nm/2} \det(sE_m)^{n/2}}, \quad (7)$$

$$c_2(m) = \int_{S^{m-1}} G^T dg \int_{S^{m-1}} H^T dh \quad (8)$$

$$\tilde{c}_3(m; \sigma) = \frac{1}{(m-1)!} \exp\left(-\frac{s}{2} \sigma^2\right) \left(\int_{O(m-1)} \omega \right)^2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q(s; \sigma) &= \tilde{c}_3(m, \sigma) \int_{L \in \mathbf{R}^{m-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq m-1} |\ell_i^2 - \ell_j^2| \prod_{i=1}^{m-1} (\sigma^2 - \ell_i^2) \\ &\quad \exp\left(-\frac{s}{2} \sum \ell_i^2\right) \prod_{i=1}^{m-1} d\ell_i \end{aligned} \quad (10)$$

あとは $\ell_i^2 = \ell'_i$ とすれば青本, 金子の Selberg type 積分が見える.

数値計算: $m = 3$ の場合

$\Gamma(a, x)$ は upper incomplete gamma function.
(下記定数倍のミスがまだあるかも)

$$\begin{aligned} & E[\chi(M_x)] \\ = & \pi^{3/2} s^8 \left(2^{-1/2} \Gamma(1/2, sx^2/2) s^{-1/2} \right. \\ & \left. - 8 \cdot 2^{1/2} \Gamma(3/2, sx^2/2) s^{-5/2-2} + 8 \cdot 2^{3/2} \Gamma(5/2, x) s^{-9/2-2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

