

# non-central complex Wishart 行列の最大固有値 の CDF の数値計算

Fadil Habibi Danufane, 小原功任 (金沢大学), 高山信毅 (神戸大学), Constantin Siriteanu (大阪大学)

2017 年 11 月 09 日

## 問題の背景

多アンテナ無線通信システム (MIMO= multiple-input and multiple-output) における通信不能確率 (outage probability) の数値評価法の確立 .

$N_T$  個の送信用アンテナと  $N_R$  個の受信用アンテナをもつ MIMO 無線通信システムのチャンネル行列  $H$  は,  $N_T \times N_R$  複素数値ランダム行列<sup>1</sup> であって,  $H$  の列ベクトルは共分散  $\Sigma$  の複素数値ガウス分布にしたがう.  $E[X] = M$  とする<sup>2</sup>. 行列  $S = \Sigma^{-1} H H^*$  は, 非心 Wishart 分布にしたがうことが知られている. このとき,  $s = \min\{N_T, N_R\}$ ,  $t = \max\{N_T, N_R\}$  とおき,  $\phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_s$  を行列  $S$  の非負固有値とする .

---

<sup>1</sup> cmvnorm

<sup>2</sup> 平均は列毎に異なって良い

## 累積確率密度関数

定理 ([KA], 2003)

行列  $\Sigma^{-1}MM^*$  が正固有値  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s$  をもつならば,  $S$  の最大固有値  $\phi_s$  について, 閾値  $x$  に関する通信不能確率 (outage probability) の累積確率密度関数は

$$\Pr(\phi_s \leq x) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^s \lambda_i)}{\Gamma(t-s+1)^s \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\lambda_j - \lambda_i)} \det \Psi(x)$$

となる. ここで,  $\Psi(x)$  は行列値関数であり, その  $(i, j)$  成分は,

$$H_{t-s+1}^{t-i}(x, \lambda_j) = \int_0^x y^{t-i} \exp(-y) {}_0F_1(; t-s+1; y\lambda_j) dy$$

[KA] M. Kang, M. S. Alouini, Largest Eigenvalue of Complex Wishart Matrices and Performance Analysis of MIMO MRC Systems, IEEE Journal on Selected Areas in Communications **21** (2003), 418–426.

## 合流型超幾何級数 ${}_0F_1$

**定義** 合流型超幾何級数  ${}_0F_1$  を以下で定める .

$${}_0F_1(; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n n!}$$

ここで ,  $(c)_n = \Gamma(c+n)/\Gamma(c)$  はポツホハマーの記号 .

また , 次の微分方程式をみます .

$$\left\{ x \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} + c - 1 \right) - x \right\} \bullet u = 0$$

## 累積確率密度関数 (cont.)

**問題** 累積確率密度関数

$$\Pr(\phi_s \leq x) = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^s \lambda_i)}{\Gamma(t-s+1)^s \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\lambda_j - \lambda_i)} \det \Psi(x)$$

を数値的に評価せよ。

行列  $\Psi(x)$  の各成分を数値的に評価

先行研究 ([KA])

$\Psi(x)$  の各成分を，クンマー超幾何関数  ${}_1F_1$  や変形ベッセル関数などで表す。

⇒ 級数展開

## ${}_0F_1$ との関係

### 補題

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n^k(x, y) = x^k e^{-x} {}_0F_1(; n; xy)$$

### 命題 (e.g. [DM])

$${}_0F_1(n; z) \sim \frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n-1/2)} \exp(2\sqrt{z})(4\sqrt{z})^{-n+1/2}, \quad (z \rightarrow +\infty)$$

[DM] A. Dixit, V. H. Moll, The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 28: The confluent hypergeometric function and Whittaker functions. Scientia, Series A:Mathematical Sciences **26** (2015), 49–62.

## 漸近の評価

**定理** 領域  $x \gg y \gg 0$  において,  $x \rightarrow +\infty$  となるとき,  $H_n^k(x, y)$  は漸近的に

$$H_n^k(x, y) \sim \frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n-1/2)} (4\sqrt{y})^{-n+1/2} \cdot 2 \cdot \exp(y) \exp(-P(s_0)) \left( \frac{2\pi}{P''(s_0)} \right)^{1/2}$$

である. ただし,

$$\begin{aligned} P(s) &= -(s - \sqrt{y})^2 + (1 + 2k - n + 1/2) \log s \\ s_0 &= \frac{1}{2}(\sqrt{y} + \sqrt{y + 2(1 + 2k - n + 1/2)}) \end{aligned}$$

とする.

# 級数表示

## 定理

関数  $H_n^k(x, y)$  は、以下の級数表示をもつ。

$$H_n^k(x, y) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \sum_{p, q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (k+1)_{p+q}}{(n)_p (1)_p (1)_q (k+2)_{p+q}} x^{p+q} y^p$$

原点に十分近い点では、級数によって近似値を得る



# 微分方程式系

**定理** 関数  $u = H_n^k(x, y)$  は, 微分方程式系

$$\begin{aligned} \{\theta_y(\theta_y + n - 1) + y(\theta_x - \theta_y - k - 1)\} \bullet u &= 0, \\ (\theta_x - \theta_y - k - 1 + x)\theta_x \bullet u &= 0. \end{aligned}$$

をみたす. ただし,  $\theta_x = x \frac{\partial}{\partial x}, \theta_y = y \frac{\partial}{\partial y}$  である.  
この方程式系のホロノミックランクは 4 である.

## ホロノミック勾配法 (HGM)

ホロノミック関数  $u(x_1, \dots, x_n)$  がランク  $r$  の斉次線形偏微分方程式系をみたすとする。このときグレブナー基底を用いると、うまい微分作用素  $t_2, \dots, t_r$  によって、方程式系を

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{F} = P_i(x_1, \dots, x_n) \mathbf{F} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と書き換えることができる (パツフィアン方程式)。ここで、 $\mathbf{F} = {}^t(u, t_2 \bullet u, \dots, t_r \bullet u)$  である。

パツフィアン方程式と Runge-Kutta 法を用いた数値計算法を **ホロノミック勾配法** という。

# 不安定性

$H_n^k(x, y)$  はランク 4 の方程式系をみたすので，グレブナー基底を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = P_1(x, y) \mathbf{F}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F} = P_2(x, y) \mathbf{F}$$

の形の常微分方程式が導かれる．しかしこの方程式からは，長い区間では，精密な数値的結果を得られない．

目的の関数  $H_n^k(x, y)$  よりも増大度の大きな解が存在

## 不安定性, 例

$$\frac{d}{dt}F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F$$

解は  $F^1 = (\exp(-t), 0, 0)^T$ ,  $F^2 = (0, \exp(-t), 0)^T$ ,  
 $F^3 = (1, 1, 1)^T$ .  $t = 0$  での初期値  $(1, 0, 0)^T$  で  $F_1$  が解.  
初期値にすこしエラーを加える:  $(1, 10^{-30}, 10^{-30})^T$ . すると,

| $t$ | value $F_1$ by RK | difference $F_1 - F_1^1$ |
|-----|-------------------|--------------------------|
| 50  | 1.92827e-22       | 9.99959e-31              |
| 60  | 8.75556e-27       | 1.00000e-30              |
| 70  | 1.39737e-30       | 1.00000e-30              |
| 80  | 1.00002e-30       | 1.00000e-30              |

## rank 3 方程式の不安定性

$\frac{\partial}{\partial x} H_n^k(x, y) = x^k e^{-x} {}_0F_1(; n; xy)$  より,  $H_n^k$  は,  
 $L = ((x\partial_x - k + x)(x\partial_x - k + x + n - 1) - yx)\partial_x$  をみたす.<sup>3</sup>

**命題**  $x \rightarrow +\infty$  で次の漸近行動を持つ解達が基底.

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = \exp(-x + 2(xy)^{1/2})((xy)^{-1/2})^{-2k+n-1/2}(1 + O((xy)^{-1/2}))$$

$$h_3 = \exp(-x - 2(xy)^{1/2})((xy)^{-1/2})^{-2k+n-1/2}(1 + O((xy)^{-1/2}))$$

漸近評価によれば,  $H_n^k$  は  $x$  について  $O(1)$ . しかし,  $O(1) \ll h_2^4$ .

---

<sup>3</sup>formal\_sol(L, [dx, x], x=infinity);

<sup>4</sup>講演後の訂正: これは誤り. rank 3 の方程式は安定だが, rank 4 の方程式が不安定

## rank 4 方程式の不安定性

**命題**  $y \rightarrow +\infty$  で次の漸近行動を持つ解達が基底.

$$h_1 = (xy)^{-1/2(1/2+n)} \exp(-2(xy)^{1/2})(1 + O(1/y^{1/2})),$$

$$h_2 = y^{-k-1}(1 + O(1/y)),$$

$$h_3 = (xy)^{-1/2(1/2+n)} \exp(2(xy)^{1/2})(1 + O(1/y^{1/2})),$$

$$h_4 = y^{1-n+k} \exp(y)(1 + O(1/y)),$$

### 計算実験

| $y$  | Ratio                  |
|------|------------------------|
| 1000 | 7.36595030875893e-452  |
| 2000 | 2.64621603289928e-881  |
| 3000 | 2.67723893601667e-1311 |

$$\text{Ratio} = (H_1^{10}(1/2, y)) / (y^{1-n+k} \exp(y)).$$

$H_n^k$  には  $h_4$  成分は無さそう.

## よりよいHGM

補題  $\frac{\partial}{\partial x} H_n^k(x, y) = x^k e^{-x} {}_0F_1(; n; xy)$

補題  $f(x, y) = {}_0F_1(; n; xy)$  は2階の斉次線形微分方程式

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + n - 1 \right) - xy \right\} f(x, y) = 0$$

をみたす.

## よりよいHGM (cont.)

**定理** ベクトル値関数  $\mathbf{F}(x, y) = {}^t(H_n^k(x, y), f(x, y), x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y))$  は,  
一階微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = P(x, y) \mathbf{F}, \quad P(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & x^k e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & y & \frac{1-n}{x} \end{pmatrix}$$

をみます.

- ▶ 初期値は原点近傍の級数表示により求める.



## ゲージ変換とは

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}' = P \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}' = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}$$

$G(x)$  を行列 (ゲージ変換行列と呼ぶ).

$$\mathbf{F} = G \mathbf{H}$$

$\mathbf{F}' = G' \mathbf{H} + G \mathbf{H}'$  なので,

$$\mathbf{H}' = (-G^{-1} G' + G^{-1} P G) \mathbf{H}$$

解の漸近展開の主部をゲージ変換行列に選ぶ. 解  $\mathbf{H}$  は  $O(1)$  となり数値解析しやすい.

## ゲージ変換

$u(t, z) = \exp(-2tz)f(t^2, z^2)$  とおく .

**定理** ベクトル値関数  $\mathbf{H}(t, z) = {}^t(H_n^k(t^2, z^2), u(t, z), t \frac{\partial}{\partial t} u(t, z))$  は ,  
一階微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = R \mathbf{H}$$

をみたす . ここで

$$R(t, z) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & 2t^{2(k+1)}e^{-t^2+2tz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2tz(2n-1) & -4tz + 2(n-1) \end{pmatrix} .$$

## 数値実験 1

行列  $\Sigma^{-1}MM^*$  の固有値が  $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$  のとき，通信不能確率の累積確率密度関数のグラフは下図のようになる．  
(( $N_T, N_R$ ) = (5, 5) が最上部の破線，(9, 5) が最下部の実線)

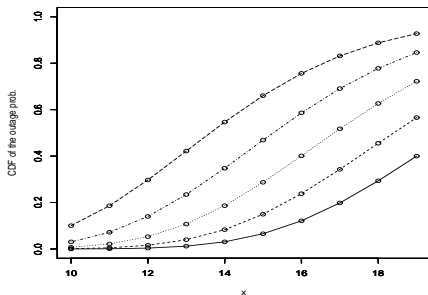


図: ( $N_T, N_R$ ) = (5, 5), (6, 5), ..., (9, 5),  $\lambda = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

## WiFi の解析では...

$20N_T N_R \sim y = z^2 = \lambda_i$ . つまり  $y$  は大きい.  
たとえば  $5 \times 100$  で  $y \sim 20N_T N_R = 10^4$ .

$$\frac{y_{\max}}{y_{\min}} \sim 1 \text{ or } 10 \text{ or } \dots$$

さらに挑戦問題:  $y \sim 10^8$ .  
しかし, たとえば

$$H_1^0(10^8, 10^8) \simeq 7.749665152657736 \times 10^{43429447}$$

double の最大値  $1.797693 \times 10^{308}$ .

⇒ (1) bigfloat 対応の RK. または (2) さらなる Gauge 変換で double で RK.

## さらに Gauge 変換 : double 対策

$$R(t, z) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2z(2n-1) & -4z \end{pmatrix} + O(1/t), \quad (\text{安定}).$$

$$g(t) = \exp(-t^2 + 2zt + 2(k+1) \log t)$$

$$t_m = \frac{z}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4(k+1)}{z^2}} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Gauge 変換行列} & \text{diag}(g(t_m), 1, 1), \quad t > t_m \\ & \text{diag}(g(t), 1, 1), \quad t \leq t_m \end{array}$$

a26d-x.c <sup>5</sup>: abs error  $10^{-40}$ , rel error  $10^{-20}$ . 初期値は数値積分 <sup>6</sup>.

<sup>5</sup>初期値は上の Gauge 変換で shift した値. 内部的に初期値 ( $\sim 10^{-200}$ ) が (1, 1, 1) となるように定数 Gauge 変換.

<sup>6</sup>`NIntegrate[t^k*Exp[-t]*HypergeometricPFQ[{}, {n}, t*y], {t, 0, x}]`;

## 5 × 100 データ

$$\lambda = y = (1000, 9850, 9950, 10050, 18900)$$

| x      | 通信失敗確率 Outage Probability (3 桁程度有効)         |
|--------|---|
| 18291, | 9.5131498898356095823246796729448732748e-05 |
| 18292, | 9.7129526345525128081447073098646520549e-05 |
| 18293, | 9.9166868841088132645047214949297442091e-05 |
| 18294, | 0.00010124430281005984620939531913849296543 |
| 18295, | 0.00010336247277432610901154418144577980193 |
| 18296, | 0.00010552219747580335704519387529275255356 |
| 18559, | 0.0098282592564031513975306126792867854095  |
| 18560, | 0.0099656058110287087344059017182109596642  |
| 18561, | 0.010104621126295227580655729963893042756   |
| 18562, | 0.010245322099469326847761622248107088847   |
| 18563, | 0.010387724710229051062645433015770748285   |
| 18564, | 0.010531845711868293978689856959196384411   |
| 18565, | 0.010677701832260576777072934579875051019   |

## 5 × 100 アンテナ

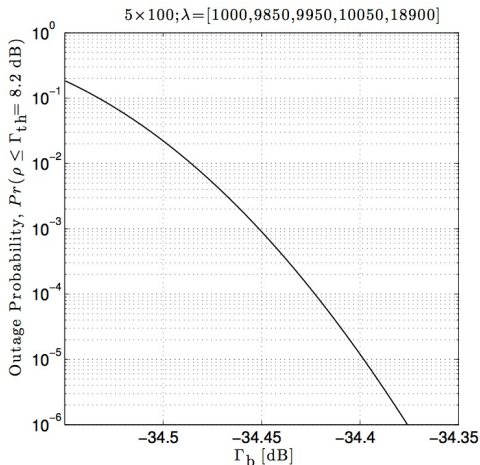


Fig. 5: Outage probability  $\Pr(\rho_{\text{MRC}} \leq \Gamma_{\text{th}} = 8.2\text{dB}) = \Pr(\phi_s \leq \Gamma_{\text{th}}/\Gamma_b)$  vs.  $\Gamma_b$ , obtained by HGM for  $N_T = 5$ ,  $N_R = 100$ , and the set of eigenvalues  $\lambda = \{1000, 9850, 9950, 10050, 18900\}$  for  $\mathbf{S}_d = \mathbf{H}_d^H \mathbf{H}_d$ .

## 誤差の検出

```
[2053] set_xmin_xmax(5,100);  
Lambda=[ 9750 9850 9950 10050 10150 ]  
[2055] auto_ppp(10200);  
0.00044597210091649080492296557923849273023  
[2056] A26_error;  
[略.  
[Sig_digits,8],[Valid_digits,[-1,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-3,-3,-2  
[Assume Sig_digits,14],[then Valid_digits,[5,4,4,4,4,4,4,3,
```

行列の成分に誤差を加えて  $\det$  の値の変動を計算. これで有効桁を見積もる.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>double では  $H_n^k$  の精度は 14 桁程度が限界



## $H_n^K$ の HGM, まとめ

1. 微分方程式を見つけよ.
2. 計算したい解が一番増大度の大きい解か? (安定性).
3. Yes なら global に計算可能. No なら local にしか計算できない (でも extrapolation には有用).
4. 安定な微分方程式を見つけよ (存在の保証はない).
5. double 範囲の計算のためにうまい Gauge 変換を見つける.
6. (構想) bigfloat または有理数での効率的かつ高信頼性 Runge-Kutta.
7. (構想) Borel-Laplace 変換したものは安定かも. これと一重数値積分を組み合わせる. などなど解析の手法を動員.
8. (構想) 増大度の大きな解を用いて方程式を上三角化, または, 解の主部を行列形式で求めて Gauge 変換. 増大度の小さい解を捕まえる?

## References

- [1] F. H. Danufane, K. Ohara, N. Takayama, C. Siriteanu<sup>9</sup>:  
Holonomic Gradient Method for the Distribution Function of  
the Largest Root of Complex Non-central Wishart Matrices,  
preprint. (arXiv:1707.02564 [math.ST])

上記の論文の参考文献表も参照.