Twisted cohomology 群の交点数を求めるアルゴリズム

高山信毅 (神戸大), 松原宰栄 (神戸大, 学振 PD). arxiv:19.03 まもなく

Twisted period relation とは

K.Cho(趙) and K.Matsumoto(松本), Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, Nagoya Mathematical Journal, **139**, (1995), 67–86.

$$I_h^T = P(-\gamma)^T I_{ch}^{-1} P(\gamma) \tag{1}$$

$P(\gamma)$, $P(-\gamma)$ は基本解行列.
I_h homology 交点行列, I_{ch} cohomology 交点行列.

例 * Bessel 関数 $J_\gamma(z)$ の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\gamma^2}{z^2}\right) f = 0$$

$$I_{ch} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 2/z \\ -2/z & 0 \end{pmatrix}, \quad (I_h)_{11} = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\gamma) - 1$$

*真島, 松本, 高山, Quadratic relations for confluent hypergeometric functions, Tohoku Math. J. (2000), 489–513

Twisted period relation とは (続き)

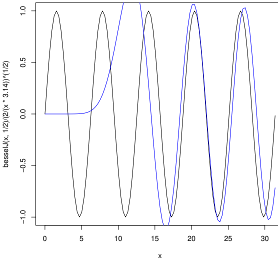
$$I_h^T = P(-\gamma)^T I_{ch}^{-1} P(\gamma),$$

$P(\gamma)$, $P(-\gamma)$ は基本解行列.

例

$$\begin{aligned}
P(\gamma)_{11} &= \langle \text{a twisted cocycle, a twisted cycle} \rangle \\
&= \langle dx/x, \exp(z/2(x-1/x))x^\gamma \otimes C' \rangle \\
\text{積分へ} &= \int_{C'} \exp(z/2(x-1/x))x^\gamma dx/x \\
&= 2\pi\sqrt{-1} J_\gamma(z)
\end{aligned}$$

$J_\gamma(z)\sqrt{\frac{\pi z}{2}}$ の グ ラ フ, $\gamma = 1/2$ と $\gamma = 10$.



(1, 1) 成分の比較で,

$$J_\gamma(z)J_{-\gamma+1}(z) + J_{\gamma-1}(z)J_{-\gamma}(z) = \frac{2\sin(\pi\gamma)}{\pi z}$$

特に $\gamma = 1/2$ で, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Intersection number とは

$u(x) = \prod u_i(x)^{\gamma_i}$, $u_i(x)$ は x の多項式. $x \in X \subset \mathbf{C}^n$. X を $2n$ 次元の smooth real manifold とみなす. $x_i, \bar{x}_i$. $\mathcal{E}_0^k(X)$: compact support smooth k-forms.

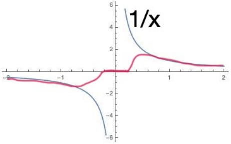
$$\nabla_\pm = d \pm \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial_{x_j} u}{u} dx_j$$

$$\varphi_\pm \in \frac{\mathrm{Ker}\,(\mathcal{E}_0^n(X) \xrightarrow{\nabla_\pm} \mathcal{E}_0^{n+1}(X))}{\mathrm{Im}\,(\mathcal{E}_0^{n-1}(X) \xrightarrow{\nabla_\pm} \mathcal{E}_0^n(X))} =: H_c^n(X, \nabla_\pm) \qquad (2)$$

$$\langle \varphi_+, \varphi_- \rangle := \int_X \varphi_+ \wedge \varphi_- = \text{どう計算?}$$

これは Rational な微分形式たちによる cohomology と同型 †.

松本, Intersection numbers for logarithmic k-forms, Osaka J. Math. **35** (1998), 873–893. u_i 達が linear, 一般な位置の時, $\frac{dx}{x}$ などの compact support でない form を compact support なものに変形 $\Rightarrow I_{ch}$ が計算可能に.



†Grothendieck-Deligne comparison theorem

I_{ch} を求める微分方程式による方法

発見的考察: 次の twisted period relation を z について微分.

$$I_h^T = P(-\gamma; z)^T I_{ch}^{-1}(z) P(\gamma; z), \;\; dP(\gamma) = \Omega P$$

$$\begin{aligned} 0 &= dP(-\gamma)^T I_{ch}^{-1} P(\gamma) + P(-\gamma) dI_{ch}^{-1} P(\gamma) + P(-\gamma) I_{ch}^{-1} dP(\gamma) \\ &= P(-\gamma)^T \Omega_-^T I_{ch}^{-1} P(\gamma) + P(-\gamma) dI_{ch}^{-1} P(\gamma) + P(-\gamma) I_{ch}^{-1} \Omega_+ P(\gamma) \end{aligned}$$

$$0 = \Omega_-^T I_{ch}^{-1} + dI_{ch}^{-1} + I_{ch}^{-1} \Omega_+ \tag{3}$$

Theorem

γ が *generic*, u_i の係数が *generic*, $\mathrm{supp}\, u_i$ のある条件, のもと I_{ch} は z の有理式を成分とする行列で方程式 *(3)* の解. この方程式の有理解の次元は 1.

Idea: 方程式 (3) は $\mathbf{D}M \otimes_{\mathcal{O}} M$ の方程式.
$Hom_{\mathcal{O}}(M, M) = \mathbf{D}M \otimes_{\mathcal{O}}^{L} M$. Schur の補題.

GKZ (Gel'fand-Kapranov-Zelevinski の超幾何) 系

S.-J. Matsubara-Heo(松原), Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions, arxiv 19.03 まもなく

γ generic, I_A が homogeneous で, A が unimodular triangulation を持つ時の I_h の明示公式. ⇒ 一意に I_{ch} を決めるアルゴリズム ‡.

```
$ openxm fep asir
This is Risa/Asir, Version 20180612 (Kobe Distribution).
[1827] load("a-hg-cohom.rr");
[2976] check2c(); // Gauss HG の場合
 1 ooo 2 .ooo
Base=[(1)*<<0,0,0,0>>,(x4)*<<0,0,0,1>>]
Rule=[[b_0,-b_0],[b_1,-b_1],[b_2,-b_2]]
Eq for 0-th variable
Solving linear equations, no of vars=16
[ cc_0_1 (-cc_0_1)/(b_2-b_0)
 (cc_0_1)/(b_2-b_0) (-cc_0_1*b_1-cc_0_1*b_0)/((b_2^2-b_0*b_2)*b_1) ]
```

‡ 上記松原条件を満たす場合一次元の不定性も決まる. 有理解を決定するアルゴリズムいろいろあり: たとえば T.Oaku, N.Takayama, H.Tsai, Polynomial and rational solutions of holonomic systems. J. Pure and Applied Alg (2001), 199–220.

例

N.Narumiya(成宮) and H.Shiga(志賀), The mirror map for a family of K3 surfaces induced from the simplest 3-dimensional reflexive polytope, In Proceedings on Moon-shine and related topics (Montréal, QC, 1999), volume 30 of CRM Proc. Lecture Notes, 139–161, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

$k=1$, $z_j=z_j^{(1)}$, 下記 c_{ij} は有理式 (略), 基底は $(1,\partial_5,\partial_4,\partial_5^2)f_\Gamma(z)$ に対応.
$z_1=z_2=z_3=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = c = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1+\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix} 1 & \frac{z_5}{\varepsilon} & \frac{z_5+1/4z_4^2-1}{\varepsilon z_4} & 0 \\ \frac{-z_5}{\varepsilon} & \frac{-8z_5^2}{4\varepsilon^2-\varepsilon} & c_{23} & 0 \\ \frac{-z_5-1/4z_4^2+1}{\varepsilon z_4} & c_{32} & \frac{-2z_4^2+8}{4\varepsilon^2-\varepsilon} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1=x_1^3+x_1^2x_2+x_1^2x_2^{-1}+z_4x_1^2+z_5x_1$, $u_2=x_1$, $u_3=x_2$.