

2021
5/27 木

常微分方程式のためのプログラミング
(ordinary differential equation, ODE)

1.

$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

↑ 未知関数

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
初期条件

python 上の
scipy.

・ 代数的プログラミング

有理解, 特異点での級数解,
微分 Galois 群, ...

・ 数値

$$y(t)$$

$$y' = f(t, y)$$

$$y(0) = \overset{a}{\cancel{y_0}}$$

h 十分小さい数

$$y'(t) \doteq \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

差分法の
idea

$$\frac{\overbrace{y(t+h)}^{y_1} - \overbrace{y(t)}^{y_0}}{h} \doteq f(t, y(t))$$

$$\rightarrow y_1 \doteq y_0 + h f(t, y_0)$$

時刻 $t+h$ での $y(t+h)$ の近似値

↑ 時刻 t の $y(t)$ の値

← 漸化式

オレンジは80^{分の}

2. Runge-Kutta 法. (Taylor 展開の応用)

以下では x

$$y' = f(x, y)$$

$y_0 = y(x_0)$ 真の解の
 $x = x_0$ の値

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) \quad \text{Euler 法.}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_0, y_0) \\ k_2 = f(x_0 + \underline{C_2 h}, y_0 + h \underline{a_{21} k_1}) \end{cases}$$

このようにして、

あとで使う cont.

$$y_1 = y_0 + h \underline{b_1} k_1 + h \underline{b_2} k_2$$

方針 y_1 と $y(x_0 + h)$ の誤差をなるべく小さくするために、 a_{ij} , b_i , C_i を選ぶ。
 $y_0 = y(x_0)$ と仮定。
 $\uparrow$ 真の解

f を (x_0, y_0) のまわりで Taylor 展開

$$k_2 = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) C_2 h + f_y(x_0, y_0) a_{21} h + O(h^2)$$

一方、真の解を Taylor 展開すると、
 k_1

$$k_1 = f_0$$

$$y(x_0+h) - y(x_0) = y'(x_0)h + \frac{1}{2} \underline{y''(x_0)} h^2 + O(h^3)$$

∴ $y' = f(x, y(x))$ は微分する、

$$y'' = f_{xx}(x, y(x)) + y'(x) f_y(x, y(x))$$

$$= f_{xx}(x, y) + f(x, y) f_y(x, y)$$

$$= \underbrace{f(x_0, y_0)}_{f_0} h + \frac{1}{2} \underbrace{f_{xx}(x_0, y_0)}_{f_{xx}} h^2 + \frac{1}{2} \underbrace{f(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)}_{f_y} h^2 + O(h^3)$$

$$y_1 = y_0 + h \underbrace{l_1}_{\neq 1} k_1 + h \underbrace{l_2}_{\neq 1} k_2$$

∴ 2つを、それぞれに等しいとする。 modulo $O(h^3)$ で、

$$l_1 f_0 + l_2 (f_0 + C_2 h f_{xx} + a_{21} h f_y f_0)$$

$$= f_0 + \frac{1}{2} f_{xx} h + \frac{1}{2} f_0 f_y h$$

f_0, f_{xx}, f_y の係数を比較

$$l_1 + l_2 = 1, \quad l_2 C_2 = \frac{1}{2}, \quad l_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

解は4343と、 $h_1=0, h_2=1, C_2=\frac{1}{2},$
 $a_{21}=\frac{1}{2}$

以上が2次の Runge-Kutta.

4次 Runge-Kutta.

$$k_{i+1} = f(x_0 + C_{i+1}h, y_0 + \sum_{j=1}^i A_{i+1,j} k_j h)$$

つまり、 k_1, k_2, k_3, k_4 と書く。

$$y_1 = y_0 + h (h_1 k_1 + h_2 k_2 + h_3 k_3 + h_4 k_4)$$

y_1 と $y(x_0+h)$ が modulo $O(h^5)$ で等しい。

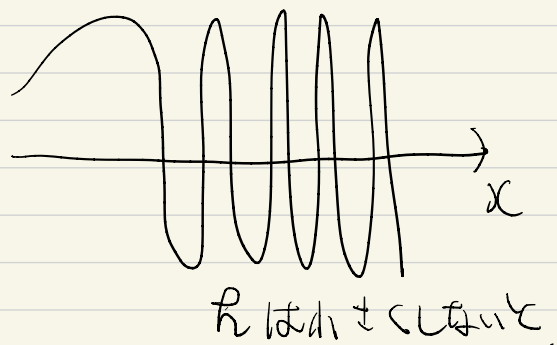
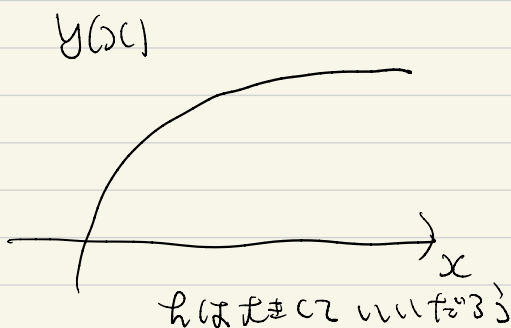
よって、 $A_{i,j}, h_i, C_i$ と書く。

0	
C_2	a_{21}
C_3	$a_{31} \ a_{32}$
C_4	$a_{41} \ a_{42} \ a_{43}$
	$h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4$

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \ \frac{1}{6}$

h の大きさは、 $\frac{1}{\text{計算精度}}$ にならずに変化させる。

3. Adaptive RK.



4 次の RK. $y_0 = y(x_0)$ から Step 幅 $2h$ で

y_1 を求める。

$$y(x_0 + 2h) - y_1 = \exists \phi (2h)^5 \mod O(h^6) \quad \text{①}$$

$\uparrow$ 真の解 $\uparrow$ 近似 $\uparrow$ Taylor 展開の計算をふりかかると、
 $y(x)$ と x_0 のみで求まる cont.

y_0 から、Step 幅 h を 2 回 $\hookrightarrow$ y_2 を求める。

$$y(x_0 + 2h) - y_2 = \phi h^5 + \exists \tilde{\phi} h^5 \mod O(h^6)$$

$\uparrow$ 以下 $\uparrow$ $y(x)$ と $x_0 + h$ で求まる

仮定

$\phi = \tilde{\phi}$ とする

$$y(x_0 + 2h) - y_2 = 2\phi h^5 \pmod{O(h^6)} \quad \text{--- (2)}$$

① - ②

$$y_2 - y_1 = 30\phi h^5 \pmod{O(h^6)}$$

$$\Delta = y_2 - y_1 \text{ に対する } \Delta = 30\phi h^5$$

± step ① h_0 での $\Delta \in \Delta_0$

" h_1 " Δ_1 に対する

$$\frac{1}{30\phi h^5 + O(h^6)} = \frac{1}{30\phi h^5} (1 + O(h)) \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} &= \frac{30\phi h_0^5 + O(h_0^6)}{30\phi h_1^5} (1 + O(h_1)) \\ &= \frac{h_0^5}{h_1^5} + O(h_0^5 h_1) + O(h_0^6) + O(h_0^6 h_1) \\ &\doteq \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^5 \end{aligned}$$

③

$$\therefore h_0 = h_1 \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\right)^{1/5}$$

±

Δ は計算
で求める

(真の解を知りたいのに)

$$\Delta_0 \times \frac{32}{30} = y(x_0 + 2h_0) - y \quad \text{なので、}$$

↑ 真の解との誤差

Δ_0 としてこの誤差の目標値を与える。

③を用いて、 h_1 から、あたらしい h_0 が求まる。

scipy.integrate.solve_ivp では、

atol rtol 2nd order

↑
絶対誤差

↑
相対誤差

$$\sim \Delta_0 = \varepsilon \quad \sim \Delta_0 = \varepsilon |y_0|$$

4. 安定性関数 $R(z)$

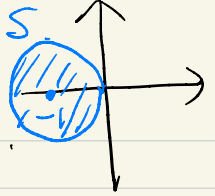
$$y' = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

に 3 つたい方法を適用

例 1. Euler 法, h が小さい

$$y_1 = y_0 + h \lambda y_0$$

$$= (1 + h \lambda) y_0$$

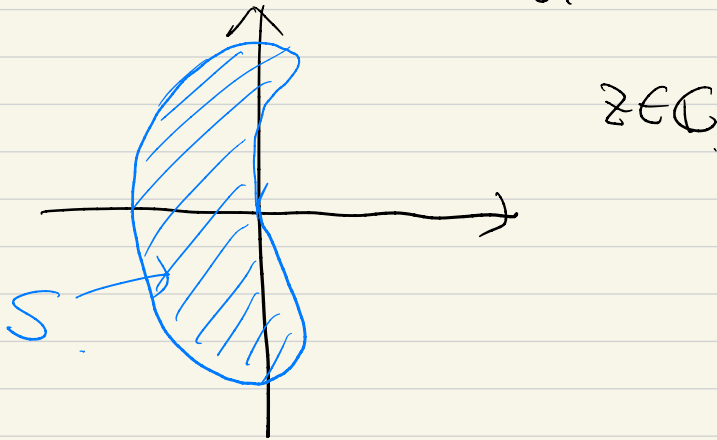
$\boxed{R(z)} := 1 + z$
 $z := h\lambda$


$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1\}$ を安定性領域.

m step 後には, $(1+z)^m$ がい $m \rightarrow \infty$ で ∞ とはならない条件.

例 2. 4 次の RK の $R(z)$ は.

$$R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4$$



Implicit Euler.

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_1)$$

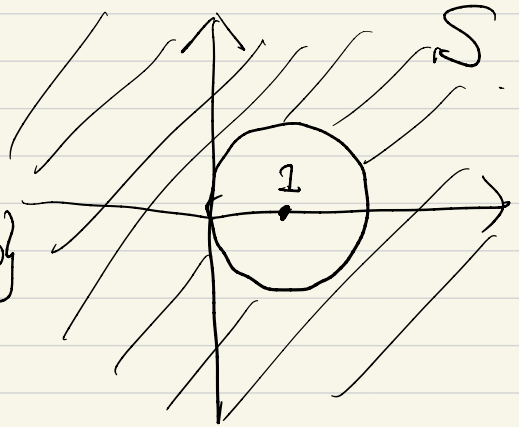
$y' = \lambda y$ に適用.

$y_0, z \in \mathbb{C}$.

$$y_1 = y_0 + h \lambda y_1$$

$$(1 - h\lambda) y_1 = y_0 \quad \therefore y_1 = \frac{1}{1 - h\lambda} y_0$$

$$\therefore R(z) = \frac{1}{1 - z}$$



$$S \subseteq \mathbb{C} = \{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

と存在する。 $R(z)$ を主値とする。

方法は A-安定である。

Implicit Euler 法は A 安定。

2020-06-19-mathlibs, sdeint } 黑板修正.
23m25s. pip install ~~sedint~~

google colaboratory 277.

! pip install sdeint.