

2021
6/3木

8:50- IPI関数

$$A_i(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h \cos\left(\frac{s^3}{3} + ts\right) ds$$

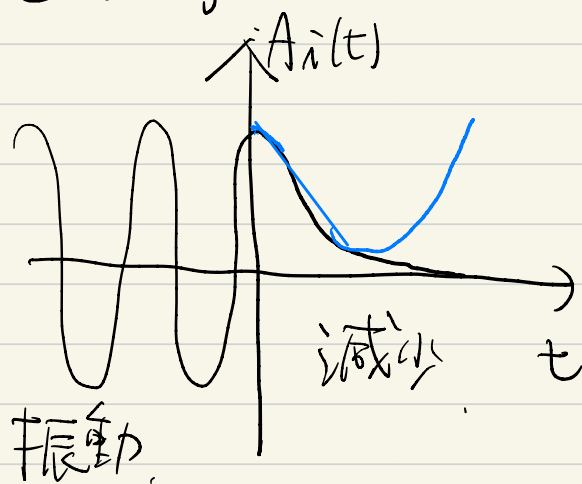
$A_i(t)$ は、

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - ty = 0 \quad \text{をみたす}$$

$$A_i(0) = 0.355 \dots$$

$$A_i'(0) = -0.258 \dots$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$



$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} Y$$

理由 ODE の特徴点のまわりの級数解の
構成 アルゴリズムあり

$$\begin{aligned} t &= \infty \\ t \rightarrow +\infty & \quad \text{減少} \quad t^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right) (1 + O(t^{-3/2})) \\ & \quad \text{増大} \quad t^{-1/4} \exp\left(+\frac{2}{3} t^{3/2}\right) (\quad) \end{aligned}$$

↑ 近似解がこれにひびく。

Airy function. series expansion

本日の目標: Taylor展開の計算を高速に.

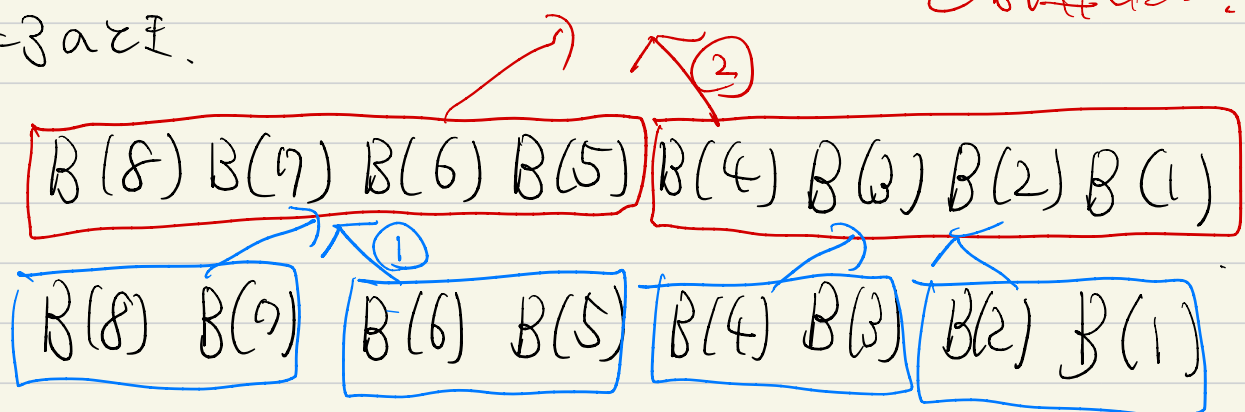
1. binary splitting,
2. bit burst.

1.5x-7 程度を求め. 正方行列 $B(n)$ given

$$B(2^k) B(2^k-1) \dots B(3) B(2) B(1)$$

を計算したい.

$k=3$ として.



① ② の順に計算する方が binary splitting.

どうして早いのか?

仮定 $B(n)$ は, n 個の数で成分に持つ.

理由 同じ位の桁数の数のかけ算は, FFT を使うと高速だから.

$M(n)$ n 個 $\times$ n 個の計算速度 $\sim O(n \log n)$

次の事実をみよ: $N \geq n$

$n \times n \times N$ の計算速度は

$$\left(\frac{2}{3} \frac{N}{n} + \frac{1}{3} + o(1) \right) M(n) =: M(n, N)$$

簡単のために、 1×1 行列で考えよ。

$$B(1)$$

$$B(2)B(1) \quad \text{とあり} \quad M(n, n)$$

$$B(3)(B(2)B(1)) \quad M(n, 2n)$$

$\vdots$

$$M(n, 3n)$$

右から順に加えていく方法では、

$$M(n, n) + M(n, 2n) + M(n, 3n) + \dots + M(n, 2^{k-1}n) \\ \sim M(n) \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \frac{2}{3} i = M(n) O(2^{\underline{2k}})$$

Binary splitting.

$$M(n) \times 2^{k-1} + M(2n) \times 2^{k-2} + \dots + M(n 2^{k-1}) \\ = \sum_{i=0}^{k-1} M(2^i n) 2^{k-1-i} \sim O(2^{\underline{k-1}} \cdot k(k-1)) \\ \searrow \\ O(2^i n \log(2^i n))$$

Taylor 展開の和の計算を、行列積の計算へ.

例12⁴. $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}$

$$b_m = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{v} \right)^n$$

部分和 $\frac{1}{n!} \left(\frac{u}{v} \right)^n$ 計算して

$$b_{m+1} - b_m = \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{u}{v} \right)^{m+1} =: a_{m+1}$$

a_m のみならず、漸化式は、

代 $a_{m+1} = \frac{1}{m+1} \frac{u}{v} a_m$

$$b_{m+1} - b_m = \frac{1}{m+1} \frac{u}{v} (b_m - b_{m-1})$$

$$b_{m+1} = \left(\frac{1}{m+1} \frac{u}{v} + 1 \right) b_m - \frac{1}{m+1} \frac{u}{v} b_{m-1}$$

$$\begin{pmatrix} h_{m+1} \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m+1} \frac{u}{v} + 1 & -\frac{1}{m+1} \frac{u}{v} \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_m \\ h_{m-1} \end{pmatrix}$$

$B(u, v, m)$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u}{v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B(u, v, m)$ の積を

binary splitting で計算

② 線型多項式係数の ODE をみたす関数の同様の

② の計算を上げる。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (m+1)u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + (m+1)v & -u \\ (m+1)u & 0 \end{pmatrix}$$

別に積を計算

練習

$\arctan x$ を binary splitting で

bit burst 法. 考えは. かけ算の計算量を減らす.

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ をみたす a を 次のように,
2進表現.

$$a = \sum_{j=0}^k a_j \frac{1}{2^{2^j}}$$

$$0 \leq a_j \leq 2^{2^j} - 1 \quad \leftarrow \text{2進.}$$

134.	0,	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
2^j の j		0	1		2				3									

$$v_j = a_j \frac{1}{2^{2^j}}$$

$$R_0 = v_0, \quad R_j = v_0 + v_1 + \dots + v_j \quad \text{と置く.}$$

$f(a)$ を計算したい.

$$f_j(x) = f(x + R_{j-1}) - f(R_{j-1}) \quad \text{と置く.}$$

$f = f_0, f_0(x) = f(x)$ と置く。
 $\therefore a$ と置く。

$$f_0(v_0) + f_1(v_1) + f_2(v_2) + \dots + f_k(v_k) = f(a)$$

① 左辺 = $f(v_0)$ ← R_0

$$+ \boxed{f(v_1 + R_0) - f(R_0)} \text{cancel}$$

$$+ f(v_2 + R_1) - \boxed{f(R_1)} \text{cancel}$$

$$\vdots$$

$$+ \boxed{f(v_k + R_{k-1}) - f(R_{k-1})} //$$

// a
// $a \approx x_0$

bit burst alg.

Step 1. $f\left(\frac{u}{v} + R\right) - f(R)$ の級数

展開を求め、部分和を binary splitting
 で計算する行列を求める。

$\hookrightarrow u, v, R$ を $10^3 \times 10^3$

Step 2. Step 1 の行列を用いて、

$f_j(v_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$
 を計算 (必要精度まで)

Step 3. 上の計算をたす。

早(なる)理由(大体)

j がいふと、 $f_j(v_j)$ で計算しないと
いけない。部分和の数がいふ。

j が大、 v_j の桁数也大

⇒ 各 j での binary splitting の計算量
が同じ位に。

練習 exp(a).

本日のプログラム。

my arctan. sage 素ほい、Taylor 展開の
和。

cos. sage

Sagemath の
高精度計算。

端末で、

cat 〰️ ファイル名。

と入力すると、ファイルの中身を表示、
〰️
〰️

休み。

〰️ 11:10
break
out room.

〰️
init. el
:

〰️
break
out room.