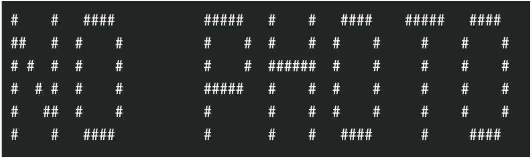
Feynman 積分を Macaulay matrix で調べる

V.Chestnov, F.Gasparotto, M.K.Mandal, P.Mastrolia, S.J.Matsubara-Heo, H.J.Munch, N.Takayama, Macaulay Matrix for Feynman Integrals: Linear Relations and Intersection Numbers, `https://arxiv.org/abs/2204.12983`, to appear in Journal of high energy physics.



and Henrik Munch.

計算代数

代数 (cohomology-GKZ 超幾何)

Feynman diagram の定義する積分

物理: 積分達の関係式が必要

Lee-Pomeransky の積分表示 (2013).

Feynman diagram → Symanzik 多項式 → Feynman 積分.

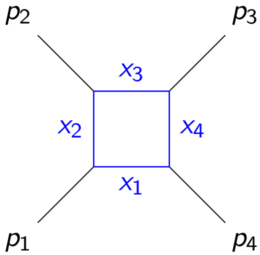
Example

massless box model.

$$\mathcal{G} = \mathcal{U}_G + \mathcal{F}_G = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 x_3 + z x_2 x_4$$

$$I(d_0, \nu; z) = \mathrm{const} \cdot (-s)^{d_0/2-\varepsilon-|\nu|} \cdot \int_{[0,+\infty]^4} \mathcal{G}^{\varepsilon - d_0/2} \prod_{i=1}^{4} x_i^{\nu_i} \frac{dx_i}{x_i}$$

$z = \frac{p_2 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2}$, $s = 2 p_1 \cdot p_2$.



Minkowski inner product

$$x \cdot y = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4, \quad x^2 = x \cdot x$$

Energy-momentum relation.

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0 c^2)^2$$

$(E, -p_1 c, -p_2 c, -p_3 c)$ を p (momentum) と書くらしい. Massless だと $p^2 = 0$.

$I(d_0, \nu; z)$ を z について微分していくと d_0, ν_i が整数ずれるだけで同じ形.

Fact: I は z についての線形常微分方程式を満たす.

この方程式の解の基底を

(物理では)master integrals

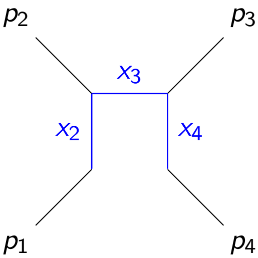
とよぶ. この例は 3 個.

$$(-s)^{\varepsilon}\Big(z(-s)I(4,0,1,0,2),\ (-s)I(4,1,0,2,0),\ \varepsilon z(-s)^2 I(4,1,1,1,1)\Big)$$

問題 1: master integrals? その方程式?

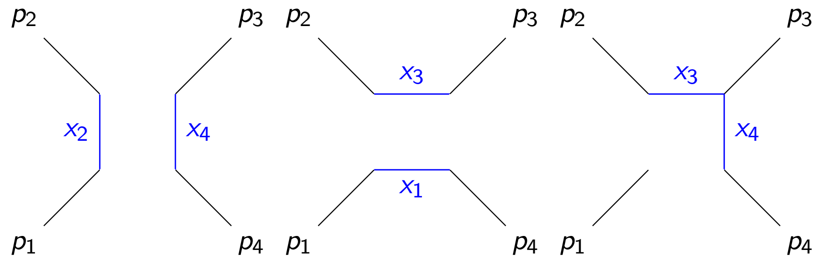
問題 2: $I(d_i, \nu)$, $\nu_i, d_i \in \mathbb{Z}$ を master integrals で表わす公式?

Diagram から多項式 $\mathcal{G}$ をどう作る?



他の 3 つ略.

$$\mathcal{U}_G = U = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$



あと 3 通りは略.

$$\mathcal{F}_G = F = (p_1+p_2)^2 x_1 x_3 + (p_2+p_3)^2 x_2 x_4 + p_1^2 x_1 x_2 + \cdots + (\sum m_i^2 x_i) U$$

ただし $p_i^2 = m_i^2 = 0$ (massless).

Feynman 積分 → GKZ 超幾何積分

Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky, 1989–.

$$f_\Gamma(\beta; z) = \int_\Gamma g(z;x)^{\beta_0}\, x_1^{-\beta_1} \cdots x_n^{-\beta_n} \frac{dx}{x} \quad , \qquad \frac{dx}{x} := \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \; . \tag{1}$$

ここで Γ は *twisted cycle*. $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$g(z;x) = \sum_{i=1}^{N} z_i\, x^{\alpha_i} \; . \tag{2}$$

$$x^{\alpha_i} := x_1^{\alpha_{i,1}} \cdots x_n^{\alpha_{i,n}} \; , \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}^n \tag{3}$$

$(n+1) \times N$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_N \end{pmatrix} \; ,$$

a_i は列ベクトルで monomial のべき α_i から $a_i := (1, \alpha_i)^T$,

Generalized Feynman 積分 (GKZ)

$$I(d_0,\nu;z) \quad := \quad c(d_0,\nu) f_\Gamma(\beta)\,, \qquad (4)$$

$$f_\Gamma(d_0,\nu;z) \quad := \quad \int_\Gamma \mathcal{G}(z;x)^{\varepsilon-d_0/2}\, x_1^{\nu_1+\varepsilon\delta} \cdots x_n^{\nu_n+\varepsilon\delta}\, \frac{\mathrm{d}x}{x}\,,$$

$$c(d_0,\nu) \quad := \quad \frac{\Gamma(d_0/2-\varepsilon)}{\Gamma\big((L+1)(d_0/2-\varepsilon)-|\nu|-n\varepsilon\delta\big)\prod_{i=1}^n \Gamma(\nu_i+\varepsilon\delta)}\,,$$

多項式 $\mathcal{G}$ の形

$$\mathcal{G}(z;x) = \sum_{i=1}^N z_i\, x^{\alpha_i} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0^n\,,$$

あと $a_i := (1,\alpha_i) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ とおく.

Example

Massless box (Volume は 3).

$$\mathcal{G}(z;x) = \sum_{i=1}^{4} z_i x_i + z_5 x_1 x_3 + z_6 x_2 x_4 \,, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

A-超幾何積分, ともよぶ.

GKZ 超幾何積分のみたす関係式

Theorem

(GKZ 1989 の系) $f_\Gamma(\beta; z)$ で β の整数シフトをうまく $r = \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(A))$ 個選んで長さ r の縦ベクトル F を作る．この時

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = P_j(\beta, z)F, \quad j = 1, \ldots, N \tag{8}$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial z_i} + P_j P_i = \frac{\partial P_i}{\partial z_j} + P_i P_j$$

をみたす β, z の有理式を成分とする $r \times r$ 行列 P_i が存在する．

Pfaffian 方程式 (8)

Pfaffian 行列 P_i

Pfaffian 方程式は master integrals の関係式にほかならない

物理 (既存): “integration by parts identity” (1981–), システム `LiteRed` (2012) など.
最近 GKZ との関係が注目されはじめた.
Tai-Fu Feng, Chao-Hsi Chang, Jian-Bin Chen, and Hai-Bin Zhang. GKZ-hypergeometric systems for Feynman integrals, 2020.
René Pascal Klausen. Hypergeometric Series Representations of Feynman Integrals by GKZ Hypergeometric Systems, 2020
A. Klemm, C. Nega and R. Safari, The *l*-loop Banana Amplitude from GKZ Systems and relative Calabi-Yau Periods, 2020
などなど.

Pierre Vanhove 先生の講演より

数学	物理
数値評価	physical region での数値評価
local monodromy	S 行列の unitarity
contiguity relations, Pfaffian eq	IBP (integration by parts) relations

1. 解空間の基底 (となる積分) ： master integrals
2. ??? ： cut integral

余談: Spencer Bloch, Pierre Vanhove, The elliptic dilogarithm for the sunset graph, `https://doi.org/10.1016/j.jnt.2014.09.032` (2014), `https://arxiv.org/abs/1309.5865`

GKZ は f_Γ が満たす高階連立線形偏微分方程式系を導出. GKZ 超幾何方程式系 (A 超幾何方程式系) $H_A(\beta)$.

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{Z}^N \,\middle|\, \sum_{j=1}^{N} u_j\, a_j = 0 \right\}. \tag{9}$$

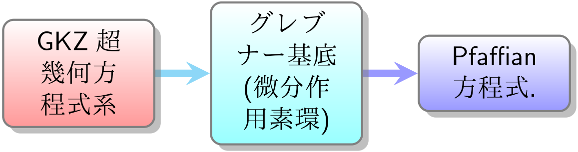
$$E_j = \sum_{i=1}^{N} a_{j,i}\, z_i\, \frac{\partial}{\partial z_i} - \beta_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n+1 \tag{10}$$

$$\Box_u = \prod_{u_i>0} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{u_i} - \prod_{u_i<0} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)^{-u_i}, \quad \forall u \in \mathrm{Ker}(A)\,. \tag{11}$$

$\Box_u$ の生成するイデアルは toric ideal I_A.

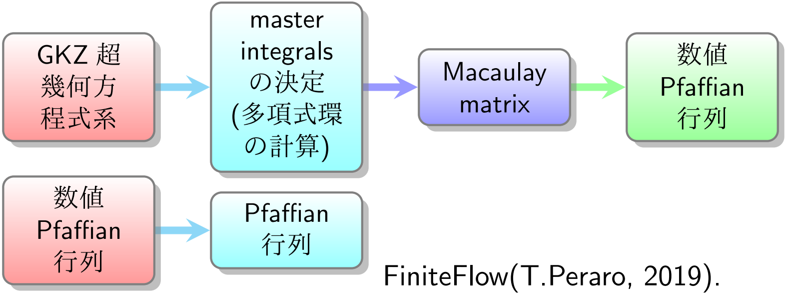
問題: GKZ の Pfaffian 方程式を求めるアルゴリズム?

計算代数 (既存):



問題点: 非可換の微分作用素環の計算なので master integrals の個数= holonomic rank = Pfaffian 行列のサイズ, が 10 程度まで.

新手法 (非可換性の排除)[イタリア amp group と 松原-T]

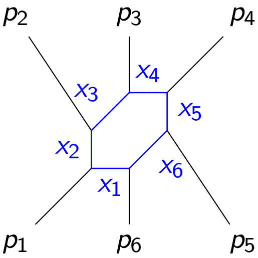


FiniteFlow(T.Peraro, 2019).

`http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/amp-MM/`
`https://arxiv.org/abs/2204.12983`

Example

massless hexagon model: master integrals の個数が 33 個. 数値 Pfaffian 行列の導出が 15.549s + 0.66s.



master integrals の決定

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$. $\mathrm{in}_{\prec}(I_A)$ の生成元は $\prod_{i=1}^{N} \partial_i^{k_i}$ と書ける．これの *distraction* を

$$\prod_{i=1}^{N} \partial_i(\partial_i - 1) \cdots (\partial_i - k_i + 1) \ . \qquad (12)$$

と定義. $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_N]$ で計算.

Theorem

[Hibi-Nishiyama-T (2017)] 多項式環 $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_N]$ において上記 *distraction* と *(10)* できまる一次式達 $E_j|_{z=(1,\ldots,1)}$ のグレブナー基底の *standard monomials* 達が *master integrals* を与える.

Macaulay 行列

Ohara-T (2015), Macaulay matrix. 今回 Small Macaulay matrix を導入して効率化.
Macaulay matrix とは?

Example

$A = (1, 2)$.

$$z_1\partial_1 + 2z_2\partial_2 - \beta_1 =: E \tag{13}$$

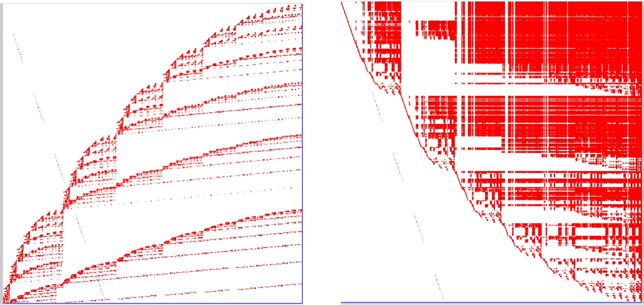
$$\underline{\partial_1^2} - \partial_2 \tag{14}$$

∂_1	∂_2^2	$\partial_1\partial_2$	∂_2	1	
z_1	0	0	$-2z_1$	β_1	E
0	$2z_2$	z_1	$\beta_1 - 2$	0	$\partial_2 E$
$1 - \beta_1$	0	$2z_2$	$-z_1$	0	$\partial_1 E$

$$\partial_2 E = z_1\partial_1\partial_2 + 2z_2\partial_2^2 + 2\partial_2 - \beta_1\partial_2$$

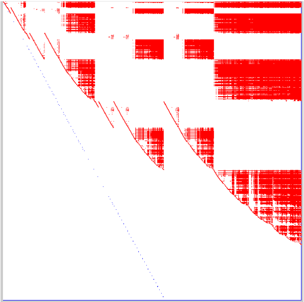
Example

One loop box model: 3 non-zero masses. 481×1395 matrix.
The rank is 481. The holonomic rank $=$ (number of the master integrals) is 14.
Left: input sparse linear equations. Right: row reduced echelon form (RREF).



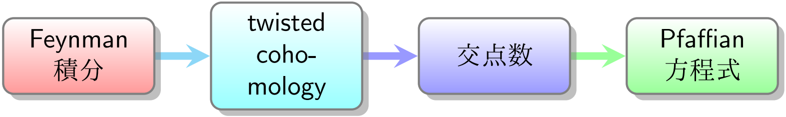
Example

4 cycle model (factorizable でない graphical model) の exact sampler:
degree 4 Macaulay matrix (MM) の転置は 10886 × 20020 行列.
Holonomic rank = 64. rank of MM = 8869.



MM' の RREF. MM の構成に約 6h. MM' の RREF (有限体で), Pfaffian を決めるのに十分かの確認に約 1d8h.

Twisted cohomology から master integrals の関係式 (Pfaffian 行列)



物理:
FGLMMMM, Decomposition of Feynman integrals by multivariate intersection numbers, 2008.
P.Mastrolia, S.Mizera, Feynman integrals and intersection theory, 2019.
S.Mizera, A.Pokraka, From infinity to four dimensions: higher residue pairings and Feynman integrals, 2019.
など.
数学: 松本圭司, 後藤, 松原, 他 (F_A, $E_{k,n}$, ...)

$$X := \left\{ (z,x) \in \mathbb{A}^N \times (\mathbb{G}_m)^n \middle| \, g(z;x) \neq 0 \right\} \quad , \quad Y := \mathbb{A}^N , \tag{15}$$

$$\Omega^k_{X/Y} = \bigoplus_{J \subset \{1,\dots,n\},\, |J|=k} \mathcal{O}(X)\, \mathrm{d}x^J \tag{16}$$

$$\nabla_x = \mathrm{d}_x + \beta_0 \frac{\mathrm{d}_x g(z;x)}{g(z;x)} \wedge - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} \wedge \, . \tag{17}$$

次の複体 (complex, $\nabla_x \nabla_x = 0$) を得る.

$$\cdots \xrightarrow{\nabla_x} \Omega^k_{X/Y} \xrightarrow{\nabla_x} \Omega^{k+1}_{X/Y} \xrightarrow{\nabla_x} \cdots \, . \tag{18}$$

k 次の *relative de Rham cohomology group* は

$$\mathbb{H}^k := \mathrm{Ker}\ \nabla_x : \Omega^k_{X/Y} \longrightarrow \Omega^{k+1}_{X/Y} \Big/ \mathrm{Im}\ \nabla_x : \Omega^{k-1}_{X/Y} \longrightarrow \Omega^k_{X/Y} \, . \tag{19}$$

GKZ 系の cohomology

Theorem

(GKZ, 1990) β が *non-resonant*. 次の同型あり.

$$\mathcal{D}_N/H_A(\beta) \simeq \mathbb{H}^n \tag{20}$$

ここで $[1] \in \mathcal{D}_N/H_A(\beta)$ と $\left[\frac{dx}{x}\right] \in \mathbb{H}^n$ が対応.

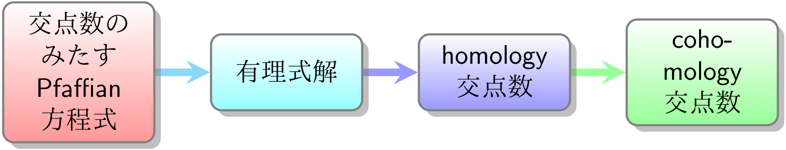
交点数とは (松本圭司ら, 1994–)

$\beta \to -\beta$ とした $\nabla_x^\vee$ の cohomology を $\mathbb{H}^{\vee k}$.

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^{\vee n} \to \mathbb{C}(\beta, z) \tag{21}$$

大体 $\int_X \omega \wedge \omega^\vee$, $\omega \in \mathbb{H}^n$, $\omega^\vee \in \mathbb{H}^{\vee n}$.

新手法 (交点数の計算アルゴリズム)[松原-T]



Theorem

[松原-T, 2020,2021, 松原 2019, 松原/後藤 2020]

1. 定理の式 *(20)* の同型を任意の $\mathbb{H}^n$ の元に対して構成するアルゴリズムあり.
2. 交点数行列 I_{ch} は *secondary equation* の有理式解.

$$\partial_i I_{ch} = P_i \cdot I_{ch} + I_{ch} \cdot \left(P_i^\vee\right)^T, \qquad i = 1, \ldots, N; \tag{22}$$

3. この解は *1* 次元分しかない. 定数の不定性をきめるアルゴリズムあり.

http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/intersection2/

交点数の情報がより基本的だが.

今後の問題

1. z_i を物理で意味のある領域に制限 (夏休みの宿題). D-加群の制限.
2. $\delta \to 0$.
3. 係数が巨大な式になっている ODE や 差分方程式をどう数値的に扱うか? (計算グラフ上の計算代数の問題意識とも共通).
4. 次世代計算代数システム (いろんな代数, 数値計算との統合, いろんなシステム...)

まとめ

物理で周期積分, intersection number, GKZ, ... Feynman diagram.
数学の立場から興味をもってもらうきっかけとなれば.