

2022
6/2 木
8:50

term rewriting system (項書き換え系)

例 1.1 S : 集合

群の公理
(定義)

$$m: S \times S \rightarrow S$$

(1) $\exists e \in S, m(x, e) = m(e, x) = x$
 $\uparrow$ 単位元 $\quad \forall x \in S$
 $\uparrow$ 中置記法 $m(x, e)$ は $x \circ e$ とか c .
 $\uparrow$ 前置記法 $x * e$ とか c .
 $\uparrow$ 右置記法 $x \circ e$ とか c .
 $\uparrow$ 中置記法 $m(x, e)$ など $\in$
 $\uparrow$ 中置記法 $x \circ e$ とか c .

(2) $\forall x \in S, \exists y \in S, m(x, y) = m(y, x) = e$

y は x の逆元と fz . $y \in x^{-1}$ とか c .

(3) $\forall x, y, z \in S, m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$

$(xy)z = x(yz)$ (中置記法)

実は、余分なものあり。上下で fz

(1) $\exists e \in S, \forall x \in S, ex = x$ (左単位元)

(2) $\forall x \in S, \exists x^{-1} \in S, x^{-1}x = e$

(3) $\forall x, y, z \in S, (xy)z = x(yz)$

① (1)(2)(3) より, $Xe = X$ は fz . つまり, $eX = Xe = X$

② (2)(3) より,

$(X^{-1}X)Z = X^{-1}(XZ)$ (3)

(2) $P^{-1}P$
 $\uparrow$ 代入 e

(3) $Z := P^{-1}$
 $Y := P$ fz 代入

(2) fz 代入
 (3) の左辺 $eZ = P^{-1}(PZ)$ (3) の右辺.

$$(1) \text{ あり } Z = P^{-1}(PY)$$

変数名を Z とし、公式 $X^{-1}(XY) = Y$ (4) を得る。

$$\boxed{X^{-1}(XY) = Y} \quad (4) \leftarrow X := P^{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P^{-1}(PQ) \\ \parallel \\ Q \end{array}} \quad (\widetilde{4}) \leftarrow Y := PQ \text{ を代入}$$

$$\therefore (P^{-1})^{-1}Q = PQ \quad \leftarrow (4) \text{ の右辺に代入}$$

↑
(4) の左辺に (4) の右辺を代入

変数名を Z とし、公式 $(X^{-1})^{-1}Y = XY$ (5) を得る。

$$X^{-1}(XY) = Y \quad (4)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P^{-1}P \\ \parallel \\ e \end{array}} \quad (2)$$

$$X := P^{-1}$$

$$Y := P \text{ を代入}$$

$$(P^{-1})^{-1}e = P$$

ここで (5) を使う。つまり (5) の X に P , Y に e を代入。

$$(P^{-1})^{-1}e = Pe. \quad \therefore P = Pe.$$

e は右単位元! かいた //

例 2. 半群 (Semigroup) の定義 (公理)

S 集合

$m: S \times S \rightarrow S$ が定義される。 $m(x, y) \in XY$

$$\forall x, y, z \in S \quad (XY)Z = X(YZ) \quad (\text{結合法則})$$

(XY)

とか。

をみたす。

群の公理より (1) (2) をみたすもの

a , 文字. a の生成する自由半群とは,

$$S = \{ a, (aa), (aaa), (aaaa), \dots \}$$

m は, 単に a の列を結合する写像

例, $m(aa, aaa) = aaaaa$.

これは, $(\mathbb{N}, +)$ に同型な半群.

$$S \ni \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ 回}} \longmapsto n \in \mathbb{N}.$$

a, b, c 3つの文字. 文字をなす集合を S .

m は 文字列を結合する写像.

↑ 7-10.

これを a, b, c の生成する自由半群という.

例. $m(aba, bcb) = ababcb$. $ab \neq ba$

以下この半群で考える.

S の元に次の順序をいれる.

① 長さで比較.

② 同じ長さなら, 辞書式に比較. $a > b > c$.

例. $\underline{abc} > \underline{ac}b$

$$ccb > acb$$

長さ3 > 長さ2.

ワードの書き換え規則を導入. (rewriting rule)

rule 1. $ab \Rightarrow b$

(注) 左 $\Rightarrow$ 右. 左を右に
かきかえるルール
もあるが、

① 左 $\Rightarrow$ 右 とする.

rule 2. $bc \Rightarrow a$

問. このルールを等式とみれば、つまり、 $ab \equiv b$, $bc \equiv a$.

2つのワードが 合同になるか判定せよ。

判定するルールは2つある。

例. $bc \equiv aa$ か?

答 $(abc \equiv bc)$ by rule 1.

$a(bc) \equiv aa$ by rule 2.

$\therefore bc \equiv aa$ //

↓
term rewriting
system (trs)
を解ける
場合あり.

rule 3. $aa \Rightarrow bc$

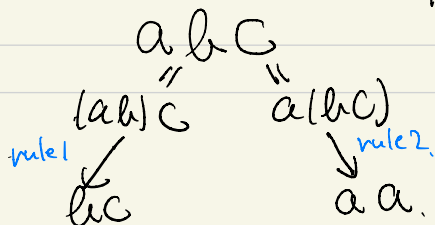
実は、trs. の Th によれば、rules 1, 2, 3 で書きかえて、
同じなら $\equiv$, 異なるなら $\neq$ がいえる。 Prop 1.

rule 3. は、rule 1, rule 2 の critical pair で導出
できる。

$a \circ b \Rightarrow b$
 $bc \Rightarrow a$

2つの rule の左のかきなりをかきかす。

(overlap)



rule 1 と rule 2 の
critical pair は
 bc と aa .

critical pair
新 rule へ なる

新 rule が 生成 しない 場合 も あり
rule 1 と rule 3 の critical pair.

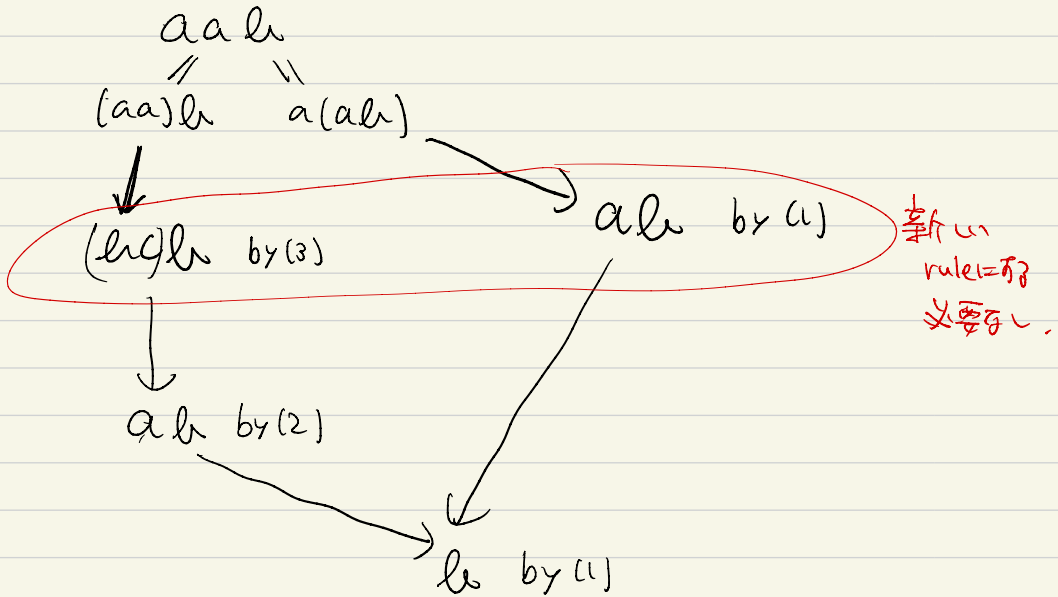
$ah \Rightarrow h$ rule 1
 $aa \Rightarrow ah$ rule 3

注. overlap が
複数 あり の 場合 も あり

aaa
 $aaah$
 $aaaa$
 $aaah$

練習
練習

$aaah$ には rule 1, rule 3
で しか と 別の word に
なる。 どちら へ rule 1, 2, 3 で 変換 すると
同じ word になる こと を 示し たい。



用語. いろいろな rule の適用 順 を や っ て も 常に 同じ
既約 word になる 性質 を 合流性

word が rule の適用 で どれ 以上 書き 換え できない
とき その word を 既約 な word という

上の例では b が「既約ワード」。
rule 1, 2, 3 で

これを $aab \xrightarrow{*} b$ と書く。
($\xrightarrow{*}$ の右には「既約ワード」)

Prop 1 を用いて、次を答えよ。

問1. $aabc \equiv bcbcb$ か?

問2. $aaab \equiv bcbcb$ か?

答. 左, 右を既約ワードにすれば「判定」できる。

$aabc \xrightarrow{(2)} aab \xrightarrow{(3)} abc \xrightarrow{(2)} aa \xrightarrow{(3)} bc$
 $\xrightarrow{(1)} a$

$bcbcb \xrightarrow{(2)} bcb \xrightarrow{(2)} ab \xrightarrow{(2)} aa \xrightarrow{*} a$

$\therefore aabc \equiv bcbcb$

問2. $aaab \xrightarrow{(1)} aab \xrightarrow{(1)} ab \xrightarrow{(1)} b$

$bcbcb \xrightarrow{*} a$

$\therefore aaab \not\equiv bcbcb$

この例題は 外山先生の SWB. prob.

補足 a, b, c のワードの order を次のように定める。

① 辞書式に比較 ② ① で比較できないときは、長い方が大。

例. $a > bc$ (② $a > b$ から)

$ab > b$

$bcb > b$

- rules
- (i) $a \Rightarrow ac$
 - (ii) $acbc \Rightarrow b$

実はこの order では、(i)(ii) で Prop1 相当が成立。

WS2. trs.

2022
6/2 木
(0:40~)

trs の用語と概念.

変数は、大文字で書く、 $X, Y, X_0, X_2, \dots$

関数記号は小文字で書く、 $f, g, m, \text{append}, \dots$

特に定数は、引き数かこの関数とみなす

例. $e()$ $()$ は略 rank 0.

関数の引き数の数を関数の rank といふ.

例. 群のかけ算の $m(x, y)$ の m の rank は 2

Ω slot. (おとし例) (記号)

項 (term) とは 変数 or, $f(t_1, \dots, t_n)$

ここで f は関数記号、引き数 $t_1, \dots, t_n$ は項.

例. 群の例. $m(m(x, y), z)$ は項

$m(m(e, x), y)$ も項

代入操作を Θ とかく。

代入とは、変数に項を代入すること.

例. Θ は $X := e$ $Y := p$ $\hookrightarrow$ $m(x, y)$
 $= m(e, p)$ のこと.

α, τ は項 (term) とする。

$\theta\alpha = \theta\tau$ とする θ (代換) は α, τ の unifier といふ。

↑
記号列と等しい。

例1. $\alpha = m(x, i(\gamma))$

$\tau = m(z, z)$

θ により $x := i(s)$
 $\gamma := s$
 $z := i(s)$

とすると

$\theta\alpha = m(i(s), i(s))$

$\theta\tau = m(i(s), i(s))$

θ' により $x := i(e)$

$\gamma := e$

$z := i(e)$

とすると $\theta'\alpha = m(i(e), i(e))$

$\theta'\tau = m(i(e), i(e))$

θ' も unifier.

most general unifier.

θ, θ' は記号列に対する写像とみなす。

$\theta' = \theta'' \circ \theta$ θ'' は $s := e$ なる代換。

Prop2. Θ : $\theta\alpha = \theta\tau$ とする代換 θ の集合。

$\exists \theta \in \Theta, \forall \theta' \in \Theta, \exists \theta'' \in \Theta, \theta' = \theta'' \circ \theta$

↑
most general unifier とする。

Context とは. (変数 on slot Ω)

$\text{or } (f(\tau_1, \dots, \tau_n), \text{ } f \text{ は関数記号 } \tau_1, \dots, \tau_n \text{ は context})$

例. $m(\Omega, Z)$

略記法 ΩZ
 $m(m(X, \Omega), Z) \longrightarrow (X\Omega)Z$

Context を $\gamma[\Omega]$ と書く $\gamma[\Omega] = m(\Omega, Z)$

例. $\gamma[\Omega] = \Omega Z$ Context

$a = m(X, Y) = XY$ term

例. $\gamma[a] = m(m(X, Y), Z) = (XY)Z$

注. trs は、有限生成自由半群にも一般的.

a, b, c の例を trs とみなすには.

a, b, c は階数 0 の関数とみなす.

m は階数 2 の関数で 文字列の結合に対応.

$a \Rightarrow b, c$ は、以下の如くに trs の rule とみなす.

$a \Rightarrow m(b, c)$

$m(X, a) \Rightarrow m(X, m(b, c))$

$m(a, X) \Rightarrow m(m(b, c), X)$

$m(X, m(a, Y)) \Rightarrow m(X, m(m(b, c), Y))$

$m(m(X, Y), Z) \Rightarrow m(X, m(Y, Z))$

$a \Rightarrow b, c$
 $xa \Rightarrow x(b, c)$
 x は Z に c の文字列.

$ax \Rightarrow (b, c)x$

$x(a, Y) \Rightarrow x(b, c, Y)$

$(XY)Z \Rightarrow X(YZ)$

term に、順序をいれる。よい性質

① $>$ は無限減少列をもたない.

② $\forall \theta$ 代入. $\forall \alpha, \tau$ terms.

$$a < \tau \Rightarrow \theta a < \theta \tau.$$

$$(2) \quad \forall r[\Omega] \quad \forall a, \tau \text{ terms.}$$

context

$$a < \tau \Rightarrow r[a] < r[\tau]$$

① lexicographic partial order. ①②をみたり. 理解しない.

term の reduction

(この rule による
書き換えに相当.)

$r[\Omega]$ context.

θ . 代入

$\lambda \Rightarrow \rho$. term の rewriting rule.

subset

$$r(\theta u) \longrightarrow r(\theta \rho)$$

$r(\theta u)$ の rule $\lambda \Rightarrow \rho$ による reduction.

例. $\lambda = bcb \Rightarrow \rho = b.$

$$r[\Omega] = \Omega C.$$

θ . 何もなし.

$$r(\theta u) = \boxed{bcb}C \longrightarrow \boxed{b}C.$$

$\uparrow \Omega$ $\uparrow \Omega$

重要概念.

2つの rewriting rule の critical pair. g_{det}

$$r[a] \Rightarrow \rho.$$

$$\tau \Rightarrow \pi.$$

共通の変数がない別に変数をかきつた.

$\exists \theta$. most general unifier

$$\theta a = \theta \tau \quad \text{と成る。}$$

case

$\theta r(\pi) \text{ と } \theta \rho \text{ は、 } \lambda \text{ 変数の rule 的 critical pair と成る。}$

反例

$$\theta a = \theta \tau$$

$$r(\theta a) = r(\theta \tau)$$

$$\theta r[a] = \theta r[\tau]$$

$$\Downarrow$$

$$\rho$$

$$\Downarrow$$

$$r[\pi]$$

$$\theta \rho \equiv \theta r[\pi] \quad \text{と成る。}$$

例

同 rule
critical
pair.

context の 2 変数 (変数) 2 変数と成る。

$$m(m(x, y), z) \Rightarrow m(x, m(y, z))$$

$$r[\Omega] = m(\Omega, z), \quad a = m(x, y)$$

$$m(m(\rho, \Omega), R) \Rightarrow m(\rho, m(Q, R))$$

$$\theta \text{ と } \rho, \quad X := m(\rho, Q) \\ Y := R$$

$$\theta \rho = m(m(\rho, \Omega), m(R, z))$$

$$\text{略} \\ = (PQ)(Rz)$$

$$\theta r[\pi] = m(m(\rho, m(Q, R)), z)$$

$$= (P(QR))z$$

intro
たに
変数計算
の記法

$$(x \ y) z \Rightarrow x(yz)$$

$$\text{例}$$

$$(PQ)R$$

$$\Downarrow$$

$$P(QR)$$

$$(P(QR))Z \Rightarrow (PQ)(RZ)$$

例. $\begin{cases} a \text{ l} x \Rightarrow \text{l} x = P. \\ \text{l} c \Rightarrow a. \end{cases}$

$$r(\Omega) = a\Omega$$

$$a = \text{l} x$$

$$r(a) = a \text{ l} x \Rightarrow \text{l} x.$$

代入 $\theta \in X := C.$

$$\theta a = \theta \tau$$

$$\text{" l} c \quad \text{" l} c.$$

critical pair の det に $\neq$ 34. $\theta P = \text{l} c.$

$$\theta r[\pi] = a a.$$

$a a$ と $\text{l} c$ は critical pair.

$$\begin{aligned} & (a \text{ l} c) \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & \text{l} c \quad a a. \end{aligned} \quad \begin{aligned} & a = \text{l} x. \\ & r(a) = a \text{ l} x \\ & r(\Omega) = a\Omega \\ & r[\pi] = a a \\ & r[\Omega] = a\Omega = a\Omega \text{ (X)} \\ & \theta: x = c. \\ & a a, \quad \theta r(a) \\ & a \text{ l} x \Rightarrow \text{l} x = a \text{ l} c. \\ & \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a \text{ l} c) \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & \text{l} c \quad a a \end{aligned}$$

Knuth-Bendix completion algorithm

(Th) もしこれが 停止すれば、出力は 完備な書き換え系 となる。

max comp は、

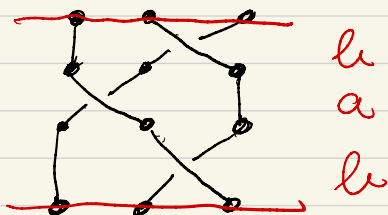
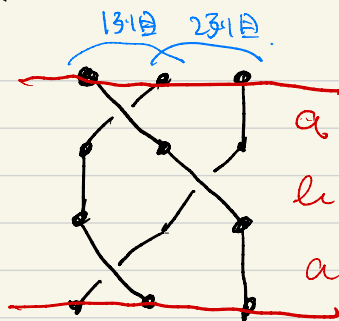
Knuth-Bendix completion
を実行し、完備な書き
換え系を出力。

プログラムの 返り値。

↑
任意の入力に対し、書き換え
出力の 既約元が一意の
(つまり、書き換え rule の
適用順に依らない)

critical pair をつくり、
これが なくなれば、rule に ∞ 。

例. 3本系の braid.



1列目の交差 $\times \in a$
 " $\times \in a^{-1}$
 2列目の交差 $\times \in b$
 " $\times \in b^{-1}$
 とかく

e, a, b の π - π 。

$$a^{-1}a = e, b^{-1}b = e.$$

とある。

さらに, braid relation

$$aba = bab$$

を仮定

これに対して, Knuth-bendix
 定理が適用できるか?

braid. trs

群. (2). $m(x)$