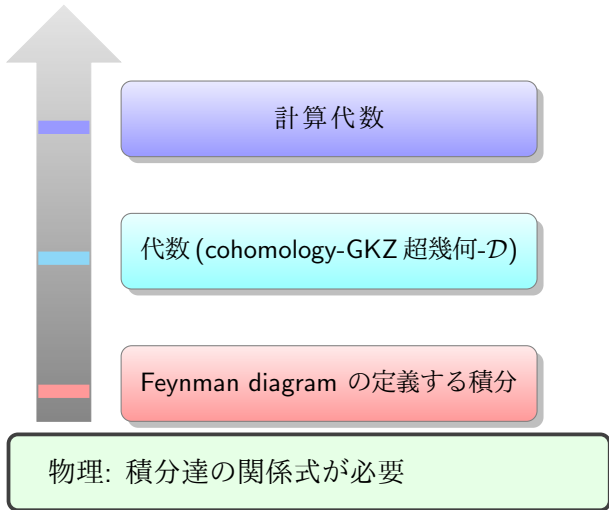


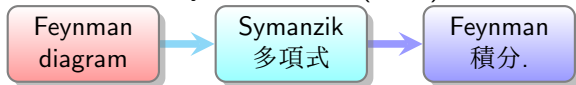
高山信毅 (神戸大)*, 松原宰栄 (熊本大).

- V.Chestnov, F.Gasparotto, M.K.Mandal, P.Mastrolia, S.J.Matsubara-Heo, H.J.Munch, N.Takayama, Macaulay Matrix for Feynman Integrals: Linear Relations and Intersection Numbers, [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2022\)187](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2022)187), Journal of high energy physics, 2022, 187(2022).
- Restrictions of Pfaffian Systems for Feynman Integrals, in preparation.

No Image



Lee-Pomeransky の積分表示 (2013).



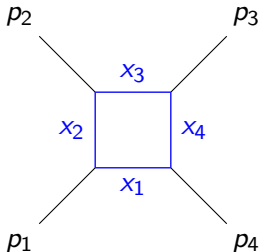
Example 1

massless box model.

$$\mathcal{G} = \mathcal{U}_G + \mathcal{F}_G = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 x_3 + z x_2 x_4$$

$$I(d_0, \nu; z) = \text{const} \cdot (-s)^{d_0/2 - \varepsilon - |\nu|} \cdot \int_{[0, +\infty]^4} \mathcal{G}^{\varepsilon - d_0/2} \prod_{i=1}^4 x_i^{\nu_i} \frac{dx_i}{x_i}$$

$$z = \frac{p_2 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2}, \quad s = 2p_1 \cdot p_2.$$



Minkowski inner product

$$x \cdot y = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4, \quad x^2 = x \cdot x$$

Energy-momentum relation.

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0 c^2)^2$$

$(E, -p_1 c, -p_2 c, -p_3 c)$ を p (momentum) と書くらしい。Massless だと $p^2 = 0$.

$I(d_0, \nu; z)$ を z について微分していくと d_0, ν_i が整数ずれるだけで同じ形.

Fact: I は z についての線形常微分方程式を満たす.

この方程式の解の基底を

(物理では) master integrals

とよぶ. この例は 3 個.

$$(-s)^\varepsilon \left(z(-s)I(4, 0, 1, 0, 2), (-s)I(4, 1, 0, 2, 0), \varepsilon z(-s)^2 I(4, 1, 1, 1, 1) \right)$$

問題: master integrals? その方程式?

連立線形偏微分方程式系 \mathcal{I} の Gröbner basis の用語では
master integrals \simeq standard monomials of \mathcal{I} in $\mathcal{R} := \mathbb{C}(z)\langle \partial_z \rangle$.

この例ではどんな方程式を満たす？

制限 (Restriction) 計算がなぜ必要か?

$$G = z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 + z_4x_4 + z_5x_1x_3 + z_6x_2x_4$$

の積分 (GKZ 系, 方程式系わかってる) できる z の関数を
 $z_1 = \dots = z_5 = 1$ へ制限して

$$\mathcal{G} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_3 + z_6x_2x_4$$

の Lee-Pomeransky 積分 (Feynman 積分の表示) の方程式系を得る.
方程式の holonomic rank (generic point での正則解空間の次元) も
一般に減少.

D-加群の制限アルゴリズム: 大阿久 (1997). 一般的, 完全な答え.

`nk_restriction.rr` (中山, 西山)

`mt_mm.rr` は制限計算を効率的におこなう各種アルゴリズム

1: Pfaffian eq の制限. 2: 確率的近似的制限アルゴリズム

を実装. 今回は 2 のみ紹介.

Pfaffian 方程式とは?

$Y = \mathbb{C}^m$. $\mathcal{D}_Y = \mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_m, \partial_1, \dots, \partial_m \rangle$. $J = \langle z_1, \dots, z_{m'} \rangle$,
 $m' \leq m$ または $J = \langle L \rangle$, L は irreducible polynomial. $Y' = V(J)$.
 $\mathcal{O}_{Y'} = \mathbb{C}[z]/J$, $\mathcal{O}_Y = \mathbb{C}[z]$. $\mathcal{M} = \mathcal{D}_Y/\mathcal{I}$ が regular holonomic
 \mathcal{D}_Y -module. \mathcal{M} の Y' への制限 \mathcal{N} は

$$\mathcal{O}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M}$$

Lemma 2

(well-known) \mathcal{N} の maximal open strata $W \subset Y'$ が原点を含む
 とする. $S = \{s_i\}$ は ∂ のモノミアル s_i の有限集合で \mathbb{C} -ベクトル
 空間 $\mathcal{D}_Y/(\mathcal{I} + \sum_{i=1}^m z_i \mathcal{D}_Y)$ の基底であるとする. この時
 $1 \otimes s_i \in \mathcal{N}|_W$, $s_i \in S$, は $\mathcal{N}|_W$ の $\mathcal{O}_{Y'}$ -加群としての基底を与える.

\mathcal{N} の stratification とは?

制限の Pfaffian 方程式とは?

$\mathcal{R}_{Y'} = \text{frac}(\mathcal{O}(Y')) \langle \partial_{m'+1}, \dots, \partial_m \rangle$. Rational restriction

$$\mathcal{R}_{Y'} \otimes_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{N}$$

は $\text{frac}(\mathcal{O}(Y'))$ 上の有限次元ベクトル空間となる.

r を制限 \mathcal{N} の holonomic rank とする.

$$\mathcal{R}_{Y'} = \mathbb{C}(z_{m'+1}, \dots, z_m) \langle \partial_{m'+1}, \dots, \partial_m \rangle.$$

記号

$$: \ell : \Big|_{z_1 = \dots = z_{m'} = 0}$$

の意味. ℓ の ∂_i 's を右へ z_j 's を左へ (関係式 $[\partial_i, z_j] = \delta_{ij}$ で) あつめて, その標準形にしてから $z_1 = \dots = z_{m'} = 0$ とおく. たとえば

$$: \partial_1 z_1 : \Big|_{z_1=0} = (z_1 \partial_1 + 1) \Big|_{z_1=0} = 1.$$

$$\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_\mu \rangle. \quad \mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y'} / \mathcal{I}.$$

Theorem 3

Lemma 2 の S を縦ベクトルとみなす. $\mathcal{R}_{Y'}[\partial_1, \dots, \partial_{m'}]$ 成分の $r \times \mu$ 行列 Q_i と $\mathbb{C}(z') := \mathbb{C}(z_{m'+1}, \dots, z_m)$ 成分の $r \times r$ 行列 P_i で

$$\partial_i S = P_i S + : Q_i(f_1, \dots, f_\mu)^T : \Big|_{z_1 = \dots = z_{m'} = 0}$$

を $\mathcal{R}_{Y'}[\partial_1, \dots, \partial_{m'}]$ において満たすものが存在.

$\partial_i - P_i$ が \mathcal{M} の制限 \mathcal{N} の Pfaffian eq.

$J = \langle L \rangle$ の場合.

Theorem 4

\mathcal{D}_Y 成分の $r \times \mu$ 行列 Q_i , $\mathbb{C}[z]$ 成分の $r \times r$ matrix P_i , 多項式 $q_i \in \mathbb{C}$ で

$$q_i \partial_i S = P_i S + : Q_i(f_1, \dots, f_\mu)^T : \quad \text{mod } L \quad (1)$$

が \mathcal{D}_Y で成立するものが存在する. ここで

$\mathcal{D}_Y \ni \sum c_\alpha(z) \partial^\alpha = 0 \text{ mod } L$ は $c_\alpha(z)$ が L で割り切れることを意味する.

$q_i \partial_i - P_i$ が \mathcal{M} の制限 \mathcal{N} の Pfaffian eq.

確率的近似的制限アルゴリズムの流れ

Standard monomials S を求める確率的近似的アルゴリズム

$$c(k) = \#\{\partial^\alpha \mid |\alpha| \leq k\}.$$

$v_k(\ell)$: ∂ の多項式 ℓ の係数ベクトル.

アルゴリズム 1

(Rational restriction to $z_1 = \cdots = z_m = 0$)

入力: holonomic イデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_Y$ の生成元 $\{f_1, \dots, f_\mu\}$. 原点

$z = (z_1, \dots, z_m) = 0$ での正則解空間の次元 r . $\gamma \geq \max(s_0, s_1)$ となる整数 γ .

出力: 原点への制限の \mathbb{C} -基底 (Lemma 2 の S).

1: $w = (1, \dots, 1)$

2: $k = \gamma$

3: **repeat**

4: $J = \mathbb{C} \cdot \left\{ v_k \left(: \partial^\alpha f_i : \Big|_{z=0} \right) \mid \text{ord}_{(-w, w)} \prod_{j=1}^m \partial_j^{\alpha_j} f_i \leq k, \alpha \in \mathbb{N}_0^m \right\} \subseteq \mathbb{C}^{c(k)}$

5: $k := k + 1$

6: **until** $\dim \mathbb{C}^{c(\gamma)} / J \cap \mathbb{C}^{c(\gamma)} = r$

7: **return** A vector space basis of $\mathbb{C}^{c(\gamma)} / J \cap \mathbb{C}^{c(\gamma)}$.

アルゴリズムの例

$x = z_1, y = z_2$. $\mathcal{I} = \{2y\partial_x + 3x^2\partial_y, 2x\partial_x + 3y\partial_y - 3\}$ は $(y^2 - x^3)^{1/2}$ を解にもつ. \mathcal{D}/\mathcal{I} の $(x, y) = (1, 2)$ への制限を近似計算. 変数変換 $x := x + 1, y := y + 2$. $w = (1, 1)$, $m = 2$, $\gamma = 1$, $c(\gamma) = 2$, $r = 1$ で適用.

$$f_1 = 2(y + 2)\partial_x + 3(x + 1)^2\partial_y$$

$$f_2 = 2(x + 1)\partial_x + 3(y + 2)\partial_y - 3.$$

$k = 1$ での J の生成元は

$$v_k(f_1|_{x=y=0}) = (4, 3, 0), v_k(f_2|_{x=y=0}) = (2, 6, -3).$$

v_k は $(\partial_x, \partial_y, 1)$ でインデックス付けられてる. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathbb{C}^3/J \cap \mathbb{C}^3$ の rank は 1.

Macaulay 行列とは? 利用する利点は?

$$A = (1, 2).$$

$$z_1 \partial_1 + 2z_2 \partial_2 - \beta_1 =: E$$

$$\underline{\partial_1^2} - \partial_2$$

∂_1	∂_2^2	$\partial_1 \partial_2$	∂_2	1	
z_1	0	0	$-2z_1$	β_1	E
0	$2z_2$	z_1	$\beta_1 - 2$	0	$\partial_2 E$
$1 - \beta_1$	0	$2z_2$	$-z_1$	0	$\partial_1 E$

$$\partial_2 E = z_1 \partial_1 \partial_2 + 2z_2 \partial_2^2 + 2\partial_2 - \beta_1 \partial_2$$

mt_mm.rr のコマンド

$F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(1)_m(1)_n(c_1)_m(c_2)_n} x^m y^n$. を $x = 0$ へ制限. $(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1)$.

```
import("mt_mm.rr")$
Ideal = [(-x^2+x)*dx^2+(-y*x)*dx*dy+((-a-b1-1)*x+c1)*dx-b1*y*dy-b1*a,
        (-y^2+y)*dy^2+(-x*y)*dy*dx+((-a-b2-1)*y+c2)*dy-b2*x*dx-b2*a]$
Xvars = [x,y]$
//Rule for a probabilistic determination
//      of RStd (Std for the restriction)
Rule=[[y,y+1/3],[a,1/2],[b1,1/3],[b2,1/5],[c1,1/7],[c2,1/11]]$
Ideal_p = base_replace(Ideal,Rule);
RStd=mt_mm.restriction_to_pt_by_linsolv(Ideal_p,Gamma=2,KK=4,[x,y]);
RStd=reverse(map(dp_ptod,RStd[0],[dx,dy]));
Id = map(dp_ptod,Ideal,poly_dvar(Xvars))$
MData = mt_mm.find_macaulay(Id,RStd,Xvars | restriction_var=[x]);
P2 = mt_mm.find_pfaffian(MData,Xvars,2 | use_orig=1);
```

Pfaffian system $\partial_y S - P_2 S$, $S = (1, \partial_y)^T$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-b_2 a}{y(y-1)} & \frac{-(a+b_2+1)y+c_2}{y(y-1)} \end{pmatrix}$$

大規模な例 (2 loop 0 mass doublebox)

GKZ system の A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(2)}$$

GKZ 系の holonomic rank は 238. これを $z_i = 1, 1 \leq i \leq 25$ へ制限. $z_{26} = y$.

rank 238 が rank 12 に

$y = 1/7$, $\gamma = 3$, $k = 5$, パラメータも数字にして mod
 $p = 100000007$ で行列の echelon form を計算
(generic_gauss_elim_mod).

$$[\partial_y \partial_{z_{15}}, \partial_{z_{23}} \partial_y, \partial_{z_{24}} \partial_y, \partial_y^2, \partial_{z_{13}}, \partial_{z_{15}}, \partial_{z_{21}}, \partial_{z_{22}}, \partial_{z_{23}}, \partial_{z_{24}}, \partial_y, 1]$$

12 個の S=RStd の候補が出力される. ここから rank 12 の ODE
(Pfaffian system) を Macaulay matrix で求めた.

Timing on t-PC(AMD EPYC 7552 48-Core Processor * 4 @
1.5GHz, 1T memory)

23,815s (RStd の guess, $132,145 \times 33,649$ 行列)

502s (Macaulay matrix, 2926×10775 行列)

89,021s (rational reconstruction, FiniteFlow. 並列で 20 分ほど)

[http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/
amp-Restriction/ref.html](http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/amp-Restriction/ref.html) rank 8 はまだ.

超曲面 $V(L)$ への制限にも使える!(新)

$$F_4(a, b, c_1, c_2; x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j}(b)_{i+j}}{(1)_i(1)_j(c_1)_i(c_2)_j} x^i y^j. \quad (3)$$

$$f_1 = \theta_x(\theta_x + c_1 - 1) - x(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + \theta_y + b), \quad (4)$$

$$f_2 = \theta_y(\theta_y + c_2 - 1) - y(\theta_x + \theta_y + a)(\theta_x + \theta_y + b). \quad (5)$$

rank は 4. 特異点は

$$xy((x - y)^2 - 2(x + y) + 1) = 0 \quad (6)$$

パラメータ generic. $L = (x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$ への制限は?
答え: RStd は $(1, \partial_x, \partial_y)$ で rank 3 の ODE.

$(a, b, c_1, c_2) = (-2/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ の時に $(x, y) = (1/4, 1/4)$ での初期値 $(1, 0, 0)^T$ を与えた時の数値計算

https://colab.research.google.com/drive/1UQIOo4B2qz_6BNUbbzP1XDkxZPZhOfJQ?usp=sharing

文献

1. 大阿久, *D* 加群と計算数学, 2002, 朝倉.
2. T.Oaku, Algorithms for the b -functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D -modules, *Advances in Applied Mathematics* 19 (1997), 61–105.
3. N.Takayama, An algorithm of constructing the integral of a module — an infinite dimensional analog of Gröbner basis, *Proceedings of ISSAC 1990*, 206-211.
4. C.Bogner, S.Weinzierl, Feynman graph polynomials, *International Journal of Modern Physics A* (2010)
<https://doi.org/10.1142/S0217751X10049438>
5. [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2022\)187](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2022)187) の参考文献.
6. FiniteFlow, multivariate functional reconstruction using finite fields and dataflow graphs.
<https://github.com/peraro/finiteflow>
7. LiteRed, LiteRed is a Mathematica package performing the IBP reduction of the multiloop integrals.
<https://www.inp.nsk.su/~lee/programs/LiteRed/>