

超幾何系の同型分類アルゴリズム

中山洋将 (日本大学), 高山信毅 (神戸大学*), 15:30–16:00

1. D 加群の同型とは?
2. 問題: Horn 型超幾何系を同型なもので分類せよ
3. パラメータ空間の stratify のためのアルゴリズム
4. 例: 合流型 $HG {}_1F_1$, Gauss の ${}_2F_1$. 応用.

プログラムは

<https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/2025/prog-isom>

スライドは Nobuki Takayama 検索

<https://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/index-ja.html>

D 加群の同型とは?

$D = \mathbb{C}\langle x, \partial_x \rangle$, $\partial_x x = x\partial_x + 1$. 結合法則や分配法則 OK.

Example 1

$$L(a) = x\partial_x + a$$

$a \in \mathbb{Z}$ に対して左 D 加群 $D/L(a)$ を同型なもので分類せよ.

$$D/L(a) \ni \ell \xrightarrow{\cdot x} \ell x \in D/L(a+1)$$

は D 左準同型. $L(a)x = (x\partial_x + a)x = x(x\partial_x + a + 1) = xL(a+1)$ なので well-defined.

$$D/L(a+1) \ni \ell \xrightarrow{\cdot \partial_x} \ell \partial_x \in D/L(a)$$

も D 左準同型. $L(a+1)\partial_x = (x\partial_x + a + 1)\partial_x = \partial_x(x\partial_x + a)$ なので well-defined.

この2つの準同型を合成すると

$$D/L(a) \ni \ell \mapsto \ell x \partial_x \in D/L(a)$$

だが

$$x \partial_x \equiv -a \pmod{L(a)}$$

となる. $a \neq 0$ なら x, ∂_x は同型射を与える. しかし $a = 0$ では $D/L(0)$ と $D/L(1)$ をつなぐ同型射はつくれていない. $-a$ が超幾何 b 函数のもっとも単純な例.

∂_x, x は解の **contiguity relation** (隣接関係) を与える. つまり, $f = x^{-(a+1)}$ を $L(a+1) \bullet f = 0$ なる解とすると, xf は $L(a)$ の解. $f = x^{-a}$ を $L(a) \bullet f = 0$ なる解とすると, $\partial_x \bullet f$ は $L(a+1)$ の解. 以下, 超幾何 D -加群の上記のような同型射も **contiguity relation** とよぶことにする.

$D/L(0)$ と $D/L(1)$ が同型でないことは

$$\mathrm{Hom}_D(D/L(0), \mathbb{C}[x]) = \mathbb{C} \quad (\text{多項式解は1次元}),$$

$$\mathrm{Hom}_D(D/L(1), \mathbb{C}[x]) = 0 \quad (\text{多項式解は0のみ})$$

からわかる.

D-加群流の基本技: M, S を左 D -加群とする時 $\mathrm{Hom}_D(M, S)$ は M から S への左 D 準同型全体の集合. $\mathrm{Hom}_D(D/L(a), \mathbb{C}[x])$ がどうして多項式解とみなせるかということ, φ がこの元とすれば, $\varphi(1)$ は $\mathbb{C}[x]$ の元. 準同型なので $l_1 \in D, l_2 \in D/L(a)$ に対して

$$l_1\varphi(l_2) = \varphi(l_1l_2)$$

がなりたつが, $l_1 = L(a), l_2 = 1$ とおくと $L(a)1 \equiv 0$ で $\varphi(0) = 0$ なので, $L(a)\varphi(1) = 0$.

問題: Horn 型超幾何系を同型なもので分類せよ

1. Gauss の超幾何系

$$L = x(1-x)\partial_x^2 + (c - (a+b+1)x)\partial_x - ab \quad (1)$$

は (a, b, c) をパラメータに持つ. $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ を同型なもので分解せよ.

2. Appell F_1 の 2 変数超幾何系は (a, b, b', c) をパラメータに持つ. $(a, b, b', c) \in \mathbb{Z}^4$ を同型なもので分解せよ.
3. Appell F_2 の 2 変数超幾何系は (a, b, b', c, c') をパラメータに持つ. $(a, b, b', c, c') \in \mathbb{Z}^5$ を同型なもので分解せよ.
4. 一般に定理 2 の $A = (E, *)$ からきまる Horn 型超幾何系 (1,2,3 はこの場合に含まれる).

定理 1. 各 strata に属するパラメータに対する Horn 型超幾何系が同型であるように, パラメータ空間 \mathbb{Z}^d を stratify するアルゴリズムあり.

1. Mutsumi Saito, Isomorphism classes of A -hypergeometric systems, *Compositio Mathematica* 128 (2001), 323–338.
2. Berkesch, Christine; Matusevich, Laura Felicia; Walther, Uli, Torus equivariant D -modules and hypergeometric systems, *Advances in Mathematics* 350 (2019), 1226–1266.

1 は A -超幾何系 (GKZ 超幾何系) について同型分類の方法を与えた.

GKZ 超幾何系と Gauss, Appell などの Horn 型超幾何との対応を 2 が与えた.

GKZ 超幾何系 $H_A(\beta)$ は $d \times n$ の整数成分の行列 A とパラメータベクトル $\beta \in \mathbb{C}^d$ で決まる n 変数 x_1, \dots, x_n の holonomic 線形偏微分方程式系. $H_A(\beta)$ で n 変数の Weyl algebra

$$D_n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle \quad (2)$$

の左イデアルを表す.

定理 2.

1. E を $d \times d$ 単位行列とする. $A = (E, *)$ の時 GKZ 超幾何を $x_1 = \cdots = x_d = 1$ へ制限つまり

$$(H_A(\beta) + (x_1 - 1)D_n + \cdots + (x_d - 1)D_n) \\ \cap \mathbb{C}\langle x_{d+1}, \dots, x_n, \partial_{d+1}, \dots, \partial_n \rangle$$

を求めることで対応する Horn 型超幾何系が得られる. さらに $H_A(\beta)$ と $H_A(\beta')$ が GKZ 超幾何系として同型なら対応する Horn 型超幾何系も同型.

2. GKZ 超幾何としての同型射を制限して Horn 型超幾何の同型射を構成するアルゴリズムあり.

2 の実装は 2025-04-01-contiguity.rr.

Example 2

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \beta = (c-1, -a, -b)^T, \text{ Gauss HG } {}_2F_1$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right), \quad \beta = (-a, -b, -b', c-1)^T, \text{ Appell } F_1$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad \beta = (-a, -b, -b', c-1, c'-1)^T, F_2$$

```
F=sm1.gkz(A=[[1,0,0,-1],[0,1,0,1],[0,0,1,1]],Beta=[c-1,-a,-b]);  
  [[-x4*dx4+x1*dx1-c+1,x4*dx4+x2*dx2+a,x4*dx4+x3*dx3+b,  
   -dx1*dx4+dx2*dx3],  
  [x1,x2,x3,x4]]  
load("2024-08-09-gkzGauss-rest.rr");;  
test1(); // F[0] を x1=x2=x3=1 へ制限. x4->x, dx4 -> dx  
  (-x^2+x)*dx^2+((-a-b-1)*x+c)*dx-b*a
```

ノート 1

2 は A 超幾何系と Horn 型超幾何系の category 対応を与えているが, この対応で同型性が保存されるかは議論していない.

問題: この category 対応で同型性は保存されるか?

ノート 2

定理 2 の証明に使うもの.

1. M.Saito (2001).

$$E\partial^u - b(s)\partial^v \in H_A(s) \quad (3)$$

$A(u - v) = v_j(V)$, $v_j(V)$ はあとで.

2. Ir-reduction の導入 (left ideal と right ideal の和による reduction).

パラメータ空間の stratify のためのアルゴリズム, 準備

$L_i(s_1, \dots, s_d)$, $i = 1, \dots, m$ を係数が 1 次独立な 1 次式とする.
 $V = V(L_1, \dots, L_m)$ をアフィン空間. V が整数座標点 $S(V) \in \mathbb{Z}^d$ を含むとする. このとき $V \cap \mathbb{Z}^d$ を $S(V) + \sum_{j=1}^{d-m} \mathbb{Z}v_j(V)$ と表現するようなベクトル $v_j(V)$, $j = 1, \dots, d - m$ を効率的に構成できる.

Daniele Micciancio, Efficient reductions among lattice problems, <https://cseweb.ucsd.edu/~daniele/papers/SIVP-CVP.pdf>, Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2008, San Francisco, Jan. 20-22, 2008.

$H(\beta)$ で GKZ 超幾何系や Horn 型超幾何系を表すことにする.

パラメータ空間の stratify のためのアルゴリズム

procedure representative_candidates($V, H(\beta)$)

1. V に対する $\{v_j(V)\}$ と $S(V)$ を求める. $v_j(V)$ 方向の $H(\beta)$ の contiguity relations と b -関数の集合 $B(V)$ を求める.
2. $\mathcal{A} = B(V)$ が V で定義する arrangement.
3. \mathcal{A} の最大次元の face の内点を一つずつ取り出しその集合を P とする.
4. \mathcal{A} の codim が 1 の face f の affine hull を V' とする¹.
 $P' = \text{representative_candidates}(V', H(\beta))$ を呼び出し,
 $P = P \cup P'$ とする.
5. return P

$P = \text{representative_candidates}(\mathbb{R}^d, H(\beta))$ とすることにより同型なものの代表元が得られる.

なお, この方法は異なる P の元は同型でないということは保証しない.

¹この step はすべての codim 1 の face について繰り返す

ノート:

1. 超平面配置の face lattice を求める問題. Lars Kastner, Marta Panizzut, Hyperplane Arrangements in polymake, icms2020. <https://arxiv.org/abs/2003.13548>, our 実装は力づく.
2. lattice point が無いことを示す問題は NP hard であることが知られている. Benjamin Assarf, Ewgenij Gawrilow, Katrin Herr, Michael Joswig, Benjamin Lorenz, Andreas Paffenholz and Thomas Rehn, Computing convex hulls and counting integer points with polymake, Mathematical programming computation, 9 (2017), 1–38. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.4653>
Section 4.

例 ${}_1F_1$ ($S(a, c)$ は解空間)

Pochhammer symbol: $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$,
 $(a)_0 := 1$.

$${}_1F_1(a, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(1)_k(c)_k} x^k$$

微分方程式は,

$$x\partial_x^2 + (c-x)\partial_x - a \quad (4)$$

$V = \mathbb{R}^2$, $v_1(V) = (1, 0)$, $v_2(V) = (0, 1)$.

$$S(a, c) \xrightarrow{x\partial_x + a} S(a+1, c) \quad (5)$$

$$S(a+1, c) \xrightarrow{-x\partial_x + x + a - c + 1} S(a, c) \quad (6)$$

b -函数 (多項式) は $a(a-c+1)$.

$$S(a, c) \xrightarrow{x\partial_x + c - 1} S(a, c-1) \quad (7)$$

$$S(a, c-1) \xrightarrow{x\partial_x - 1} S(a, c) \quad (8)$$

b -函数 (多項式) は $a-c+1$.

$V: a = 0$ に制限した 1 次元 arrangement 上では $S(V) = (0, 1)$, $v_1(S) = (0, 1)$. contiguity は (7), (8).

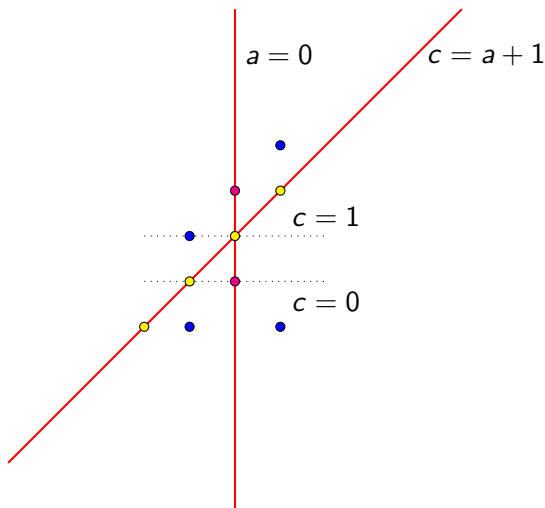
$V: a - c + 1 = 0$ つまり $c = a + 1$ に制限した 1 次元 arrangement 上では $S(V) = (0, 1)$, $v_1(S) = (1, 1)$ で

$$S(c-1, c) \xrightarrow{c\partial_x} S(c, c+1) \quad (9)$$

$$S(c, c+1) \xrightarrow{x\partial_x - x + c} S(c-1, c) \quad (10)$$

b -函数 (多項式) は $c(c-1)$.

アルゴリズムによる各 arrangement の最大次元の face の内点.



青: $a(c - a - 1) = 0$ の 2 次元 face の内点. magenta: $a = 0$ 内の $c = a + 1 = 1$ の決める arrangement の 1-face の内部点, (0-dim face は黄色). 黄色: $c - a - 1 = 0$ 内の $c(c - 1) = 0$ の決める arrangement の 1-face の内部点と 0-dim face .

制限 (restriction) は $\iota : 0 \rightarrow \mathbb{C}$ として $H^k \iota^* D/L$, $k = 0, 1$. 特に $H^0 \iota^* D/L = \frac{D}{DL+xD}$ は原点での形式べき級数解全体の \mathbb{C} ベクトル空間と同型.

入力 2025-05-20-1F1.rr:

```
Rules=[ [0,0],
         [-1,1],
         [1,-1],
         [1,2]];;
Ans=[];
for (I=0; I<length(Rules); I++) {
  T=base_replace(L,assoc([a,c],Rules[I]));
  R=sm1.restriction([T],[x],[x]);
  printf("Rule=%a, restriction=%a\n",Rules[I],R);
  Ans=cons(R,Ans);
}
Ans=reverse(Ans);;
```

出力:

```
Rule=[0,0], restriction=[[2,[]],[1,[]]]
Rule=[-1,1], restriction=[[1,[]],[0,[]]]
Rule=[1,-1], restriction=[[3,[2,e0+1]],[0,[]]]
Rule=[1,2], restriction=[[1,[]],[0,[]]]
```

制限 (restriction) は $\iota : 0 \rightarrow \mathbb{C}$ として $H^k \iota^* D/L$, $k = 0, 1$. 特に $H^0 \iota^* D/L = \frac{D}{DL+xD}$ は原点での形式べき級数解全体の \mathbb{C} ベクトル空間と同型.

(a, c)	H^0	H^1
$(0, 0)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-1, 1)$	\mathbb{C}	0
$(1, -1)$	\mathbb{C}	0
$(1, 2)$	\mathbb{C}	0

例. ${}_2F_1$, Gauss HG. $(S(a, b, c)$ は解空間)

$${}_2F_1(a, b, c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(1)_k (c)_k} x^k$$

微分方程式は

$$x(1-x)\partial_x^2 + (c - (a+b+1)x)\partial_x - ab$$

$a, b, c < 0$ で考える.

アルゴリズムの実行例

$V = \mathbb{R}_{<0}^3$, $v_1(V) = (1, 0, 0)$, $v_2(V) = (0, 1, 0)$, $v_3(V) = (0, 0, 1)$.

`representative_candidates(V, H(a, b, c))`

$v_1(V) = (1, 0, 0)$ について.

$$S(a, b, c) \xrightarrow{x\partial_x + a} S(a+1, b, c) \quad (11)$$

$$S(a+1, b, c) \xrightarrow{x(1-x)\partial_x + (c-a-1-bx)} S(a, b, c) \quad (12)$$

b -function は $a(a-c+1)$.

アルゴリズムの実行例, 続き (3次元空間の arrangement)

$v_2(V) = (0, 1, 0)$ について.

$$S(a, b, c) \xrightarrow{x\partial_x + b} S(a, b + 1, c) \quad (13)$$

$$S(a, b + 1, c) \xrightarrow{x(1-x)\partial_x + (c - b - 1 - ax)} S(a, b, c) \quad (14)$$

b -function は $b(b - c + 1)$.

$v_3(V) = (0, 0, 1)$ について.

$$S(a, b, c) \xrightarrow{(1-x)\partial_x + (c - a - b)} S(a, b, c + 1) \quad (15)$$

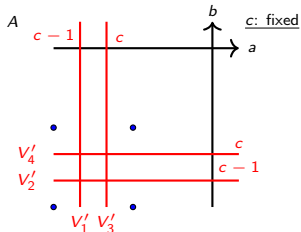
$$S(a, b, c + 1) \xrightarrow{x\partial_x + c} S(a, b, c) \quad (16)$$

b -function は $(a - c)(b - c)$.

$B(V) = \{a(a - c + 1), b(b - c + 1), (a - c)(b - c)\}$.

$B(V)$ が V で定義する arrangement を A とする.

A の最大次元の face の内点を 1 つずつとり, その集合を P とする.



$$P = \{(c + 1, c + 1, c), (c + 1, c - 2, c), \\ (c - 2, c + 1, c), (c - 2, c, c)\}$$

アルゴリズムの実行例, 続き (2次元空間の arrangement)

A の余次元 1 の face の affine hull を

$$V_1' : a - c + 1 = 0$$

$$V_2' : b - c + 1 = 0$$

$$V_3' : a - c = 0$$

$$V_4' : b - c = 0$$

`representative_candidates(V_1', H(a,b,c))`

V_1' : $a - c + 1 = 0$ に制限した 2 次元 arrangement で $S(V_1') = (-4, -4, -3)$,

$v_1(V_1') = (1, 0, 1)$, $v_2(V_1') = (0, 1, 0)$ がとれる. $a = c - 1$ とおく.

$v_1(V_1') = (1, 0, 1)$ について.

$$S(c - 1, b, c) \xrightarrow{(x-1)\partial_x + c - 1} S(c, b, c + 1) \quad (17)$$

$$S(c, b, c + 1) \xrightarrow{x(1-x)\partial_x - bx + c} S(c - 1, b, c) \quad (18)$$

b -function は $(c - 1)(c - b)$.

$v_2(V_1') = (0, 1, 0)$ について.

$$S(c - 1, b, c) \rightarrow S(c - 1, b + 1, c) \quad (19)$$

$$S(c - 1, b + 1, c) \rightarrow S(c - 1, b, c) \quad (20)$$

b -function は $b(b - c + 1)$. (b の一般の隣接関係から)

$B(V_1') = \{(c - 1)(c - b), b(b - c + 1)\}$.

$B(V_1')$ が V_1' で定義する arrangement を A_1 とする.

A_1 の最大次元の face の内点を 1 つずつとり, その集合を P_1 とする.

以下略.

Gauss HG の原点への制限

$(a, b, c) \in \mathbb{Z}_{<0}^3$ での代表元.

(a, b, c)	H^0	H^1
$(-6, -3, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-5, -3, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-4, -3, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-3, -3, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-6, -4, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-5, -4, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-4, -4, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-3, -4, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-6, -5, -4)$	\mathbb{C}	0
$(-5, -5, -4)$	\mathbb{C}	0
$(-4, -5, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-3, -5, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-6, -6, -4)$	\mathbb{C}	0
$(-5, -6, -4)$	\mathbb{C}	0
$(-4, -6, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}
$(-3, -6, -4)$	\mathbb{C}^2	\mathbb{C}

1. 超幾何系の原点や座標軸への制限をすべてのパラメータについて求めることが可能となった (comprehensive GB と 整数パラメータに対する同型分類を組み合わせればできる.
Risa/Asir conference 2023, 2024, 2025 における発表がようやく完結編に).
2. 解をすべて分類できたと考えてよい.
3. 間野の超幾何 exact sampler
<https://arxiv.org/abs/2110.14992> の挙動解析にも応用できるかも.

講演後の修正 (Errata).

1. 定理 1 は対応する A を正規とする仮定が必要. 同型射を構成するアルゴリズムがあることの記載忘れ.
2. “パラメータ空間の stratify のためのアルゴリズム” は特別な場合のみの説明. つまり同型である不等式制約の格子点をつなぐ Markov basis が $\pm e_1, \pm e_2, \dots$ で実現される場合の説明.