

問 1.1 次の命題 (1), (2) を $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ.

(1) $f(x, y) := x^2y^3$ は任意の (a, b) において連続である.

(2) $f(x, y), g(x, y)$ が (a, b) で連続ならば, $f(x, y) + g(x, y)$ も $f(x, y)g(x, y)$ も (a, b) で連続である.

解説

(1) 点 (a, b) を固定する. 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする. (以後この ε は固定することに注意せよ.)

$$|x^2y^3 - a^2b^3| \leq |x^2y^3 - a^2y^3| + |a^2y^3 - a^2b^3| \leq |x - a|(|x| + |a|)|y|^3 + |y - b|(|y|^2 + |y||b| + |b|^2)|a|^2.$$

$|x - a| < 1, |y - b| < 1$ のとき $|x| < |a| + 1, |y| < |b| + 1$ である. したがってこのとき $|x| + |a| < 2|a| + 1, |y|^3 < (|b| + 1)^3, |y|^2 + |y||b| + |b|^2 < 3|b|^2 + 3|b| + 1, |a|^2 < (|a| + 1)^2$. よって $|x - a| < 1, |y - b| < 1$ のとき

$$|x^2y^3 - a^2b^3| < (2|a| + 1)(|b| + 1)^3|x - a| + (|a| + 1)^2(3|b|^2 + 3|b| + 1)|y - b|.$$

したがって, 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon/2}{(2|a| + 1)(|b| + 1)^3}, \frac{\varepsilon/2}{(|a| + 1)^2(3|b|^2 + 3|b| + 1)}\right\}$$

とすると, $|x - a| < \delta, |y - b| < \delta$ のとき

$$|x^2y^3 - a^2b^3| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

(2) $f(x, y)g(x, y)$ の連続性だけを示そう. 点 (a, b) を固定する. 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする. まず

$$|f(x, y)g(x, y) - f(a, b)g(a, b)| \leq |g(x, y)||f(x, y) - f(a, b)| + |f(a, b)||g(x, y) - g(a, b)|$$

に注意する. 仮定から, $\delta_1 > 0$ を十分に小さくとると, $|x - a| < \delta_1, |y - b| < \delta_1$ のとき $|g(x, y)| \leq |g(x, y) - g(a, b)| + |g(a, b)| < |g(a, b)| + 1$ が, また当り前の不等式 $|f(a, b)| < |f(a, b)| + 1$ が成り立つので, $|x - a| < \delta_1, |y - b| < \delta_1$ のとき

$$|f(x, y)g(x, y) - f(a, b)g(a, b)| < (|g(a, b)| + 1)|f(x, y) - f(a, b)| + (|f(a, b)| + 1)|g(x, y) - g(a, b)|$$

が成り立つ. 再び仮定から $\delta_2 > 0$ を十分小さくとると, $|x - a| < \delta_2, |y - b| < \delta_2$ に対して

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \frac{\varepsilon/2}{|g(a, b)| + 1}, \quad |g(x, y) - g(a, b)| < \frac{\varepsilon/2}{|f(a, b)| + 1}$$

が成り立つ. したがって $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ と定めると $|x - a| < \delta, |y - b| < \delta$ なるとき

$$|f(x, y)g(x, y) - f(a, b)g(a, b)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

問 1.2 教科書 p.8 の定理 2 を証明せよ.

解説 R を平面上の有界閉集合とし, $f(x, y)$ を R で定義された実数値連続関数とする. $f(R) := \{f(x, y) \mid (x, y) \in R\}$ とする.

$f(R)$ が上に有界の場合: $M := \sup f(R)$ とすると $M \in \mathbf{R}$ で, $f(x_n, y_n) \rightarrow M$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす R における点列 $\{(x_n, y_n)\}_n \subset R$ が存在する. 定理 1(Bolzano-Weierstrass) から, 適当な部分列 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_k$ と点 $(a, b) \in R$ で $(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (a, b)$ ($k \rightarrow \infty$) となるものが存在する. ところで $f(x, y)$ は $(a, b) \in R$ で連続だから $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(a, b)$. したがって $f(a, b) = M$. M の定義から, 任意の $(x, y) \in R$ に対して $f(x, y) \leq M = f(a, b)$, すなわち $f(x, y)$ は $(a, b) \in R$ で最大値をとる.

$f(R)$ が上に有界であることを示すために, 上に非有界として矛盾を導く. 上に非有界とすると $f(x_n, y_n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる R における点列 $\{(x_n, y_n)\}_n \subset R$ が存在する. 再び定理 1 から適当な部分列 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_k$ と点 $(a, b) \in R$ で $(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (a, b)$ ($k \rightarrow \infty$) となるものが存在する. $f(x, y)$ は $(a, b) \in R$ で連続だから $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(a, b)$. これは $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) に矛盾する.

最小値の存在も同様.

問 1.3 関数 $f(x, y) := \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ (ただし $x^2 + y^2 < r^2$) の偏微分 f_x, f_y を計算せよ.

解説 $z = r^2 - x^2 - y^2$ とおく. f_x を計算する. このときは y は定数とする. 合成関数の微分公式から

$$f_x = \frac{d\sqrt{z}}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

同様に $f_y = -y/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.