

問 2.1 次の関数 $f(x, y)$ または $f(x, y, z)$ について $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$ または $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$ を計算せよ .

$$(1) e^{ax-by} \cos(bx+ay) \quad (2) \log(x^2+y^2) \quad (3) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

解説 (1) $f_x = ae^{ax-by} \cos(bx+ay) - be^{ax-by} \sin(bx+ay)$, $f_{xx} = a^2 e^{ax-by} \cos(bx+ay) - 2abe^{ax-by} \sin(bx+ay) - b^2 e^{ax-by} \cos(bx+ay) = (a^2 - b^2)e^{ax-by} \cos(bx+ay) - 2abe^{ax-by} \sin(bx+ay)$. 同様に

$f_y = -be^{ax-by} \cos(bx+ay) - ae^{ax-by} \sin(bx+ay)$, $f_{yy} = b^2 e^{ax-by} \cos(bx+ay) + 2abe^{ax-by} \sin(bx+ay) - a^2 e^{ax-by} \cos(bx+ay) = (b^2 - a^2)e^{ax-by} \cos(bx+ay) + 2abe^{ax-by} \sin(bx+ay)$. よって $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(2)

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(3) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく . このとき $r_x = (1/2)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = x/r$, 同様に $r_y = y/r$, $r_z = z/r$. これを用いて

$$f_x = -\frac{1}{r^2} r_x = -\frac{x}{r^3}, f_{xx} = -\frac{r^3 - x(3r^2)r_x}{r^6} = -\frac{r^3 - x(3r^2)(x/r)}{r^6} = -\frac{r^3 - 3rx^2}{r^6}$$

同様に $f_{yy} = -(r^3 - 3ry^2)/r^6$, $f_{zz} = -(r^3 - 3rz^2)/r^6$. よって $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -(3r^3 - 3r(x^2+y^2+z^2))/r^6 = -(3r^3 - 3r^3)/r^6 = 0$.

注意. $f_{xx} + f_{yy} = 0$ とか $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ を満たす関数 $f(x, y)$ や $f(x, y, z)$ を 調和関数 (harmonic function) をいう .

問 2.2 (1) $z = z(x, y)$ とする . $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$, $y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ のとき z_u, z_v を z_x, z_y, α を用いて表し, $(z_u)^2 + (z_v)^2$ を計算せよ .

(2) $z = z(x, y)$ とする . $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0, \theta \in \mathbf{R}$) のとき z_r, z_θ を z_x, z_y, r, θ を用いて表し, $(z_r)^2 + (z_\theta)^2 / r^2$ を計算せよ .

解説 (1) $z_u = z_x x_u + z_v v_u = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$, $z_v = z_x x_v + z_y v_v = -z_x \sin \alpha + z_y \cos \alpha$. よって

$$(z_u)^2 + (z_v)^2 = (z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha)^2 + (-z_x \sin \alpha + z_y \cos \alpha)^2 = \dots = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

(2) $z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta$, $z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r \sin \theta + z_y r \cos \theta$. よって

$$(z_r)^2 + \frac{1}{r^2} (z_\theta)^2 = (z_x \cos \theta + z_y \sin \theta)^2 + \frac{1}{r^2} (-z_x r \sin \theta + z_y r \cos \theta)^2 = \dots = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

問 2.3 次の関数 $f(x, y)$ に対して $f(x, y) = 0$ から決まる関数 $y = y(x)$ の微分 dy/dx を x, y を用いて表せ (ただし (x, y) は $f(x, y) = 0$ を満たすとす) .

$$(1) y - xe^y - 1 \quad (2) x^2 y^3 + y - x$$

解答 (1) $y' = -f_x/f_y = -(-e^y)/(1-xe^y) = e^y/(1-xe^y)$. $f(x, y) = 0$ から $xe^y = y-1$ であるから $y' = e^y/(2-y)$ と表してもよい . このように y' を $f(x, y) = 0$ を満たす (x, y) を用いて表す仕方は無数にある .

(2) $y' = -f_x/f_y = -(2xy^3 - 1)/(3x^2 y^2 + 1) = (1 - 2xy^3)/(1 + 3x^2 y^2)$.

注意 教科書 p.31 の下から 6 行目以下の 4 行は次のように変更する .

陰関数定理は $k+n$ 変数の n 個の関数の連立方程式

$$f_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) = 0$$

の場合に拡張される . 適当な仮定の下で, その中の n 個の変数, 例えば x_{k+1}, \dots, x_{k+n} が残りの変数 x_1, \dots, x_k の n 個の関数として書けるのである .

$$x_{k+1} = g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, x_{k+n} = g_n(x_1, \dots, x_k)$$