基礎解析 II 演習問題 3 解説　2006 年 11 月 21 日

問 3.1　空間における極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

を考える．このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

が $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ に等しいことを確かめよ．

解説　まず連鎖律 (p.17 定理 1 の 3 変数版) から

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r, \quad f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta + f_z z_\theta, \quad f_\varphi = f_x x_\varphi + f_y y_\varphi + f_z z_\varphi$$

これを繰り返す．例えば $f_{rr} = (f_r)_r$ を計算する．

$$\begin{aligned}
f_{rr} &= (f_x)_r x_r + f_x x_{rr} + (f_y)_r y_r + f_y y_{rr} + (f_z)_r z_r + f_z z_{rr} \\
&= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r + f_{xz}z_r)x_r + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r + f_{yz}z_r)y_r + (f_{zx}x_r + f_{zy}y_r + f_{zz}z_r)z_r \\
&= f_{xx}x_r^2 + f_{yy}y_r^2 + f_{zz}z_r^2 + 2f_{xy}x_r y_r + 2f_{yz}y_r z_r + 2f_{zx}z_r x_r
\end{aligned}$$

ここで $x_{rr} = 0, y_{rr} = 0, z_{rr} = 0$ を用いた．同様に

$$\begin{aligned}
f_{\theta\theta} &= f_{xx}x_\theta^2 + f_{yy}y_\theta^2 + f_{zz}z_\theta^2 + 2f_{xy}x_\theta y_\theta + 2f_{yz}y_\theta z_\theta + 2f_{zx}z_\theta x_\theta + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta} + f_z z_{\theta\theta}, \\
f_{\varphi\varphi} &= f_{xx}x_\varphi^2 + f_{yy}y_\varphi^2 + f_{zz}z_\varphi^2 + 2f_{xy}x_\varphi y_\varphi + 2f_{yz}y_\varphi z_\varphi + 2f_{zx}z_\varphi x_\varphi + f_x x_{\varphi\varphi} + f_y y_{\varphi\varphi} + f_z z_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& f_{rr} + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}f_r + \frac{\cot\theta}{r^2}f_\theta \\
=\ & Af_{xx} + Bf_{yy} + Cf_{zz} + 2Df_{xy} + 2Ef_{yz} + 2Ff_{zx} + Gf_x + Hf_y + If_z
\end{aligned}$$

とおいて $A, B, \ldots, I$ を計算する．

$$\begin{aligned}
A &= x_r^2 + \frac{1}{r^2}x_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}x_\varphi^2 = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\
B &= y_r^2 + \frac{1}{r^2}y_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}y_\varphi^2 = \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1, \\
C &= z_r^2 + \frac{1}{r^2}z_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}z_\varphi^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 = 1, \\
D &= x_r y_r + \frac{1}{r^2}x_\theta y_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}x_\varphi y_\varphi = \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi = 0, \\
E &= y_r z_r + \frac{1}{r^2}y_\theta z_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}y_\varphi z_\varphi = \sin\theta\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + 0 = 0, \\
F &= z_r x_r + \frac{1}{r^2}z_\theta x_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}z_\varphi x_\varphi = \sin\theta\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + 0 = 0,
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{r^2}x_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}x_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}x_r + \frac{\cot\theta}{r^2}x_\theta \\
&= -\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} + \frac{2\sin\theta\cos\varphi}{r} + \frac{\cos^2\theta\cos\varphi}{r\sin\theta} = 0, \\
H &= \frac{1}{r^2}y_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}y_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}y_r + \frac{\cot\theta}{r^2}y_\theta \\
&= -\frac{\sin\theta\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} + \frac{2\sin\theta\sin\varphi}{r} + \frac{\cos^2\theta\sin\varphi}{r\sin\theta} = 0, \\
I &= \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}z_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}z_r + \frac{\cot\theta}{r^2}z_\theta \\
&= -\frac{\cos\theta}{r} + \frac{2\cos\theta}{r} - \frac{\cos\theta}{r} = 0.
\end{aligned}$$

以上で確認された．

問 3.2　次の関数 $f(x,y)$ の極値問題を解け.

$$(1)\quad xy(x^2+y^2-1) \qquad (2)\quad xy+\frac{a}{x}+\frac{a}{y}\quad (a>0) \qquad (3)\quad e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)\quad (a>b>0)$$

解説　(1)　$f_x = 3x^2y+y^3-y, f_y = x^3+3xy^2-x,\ f_{xx} = 6xy, f_{xy} = 3x^2+3y^2-1, f_{yy} = 6xy$.
$f_x = 0, f_y = 0$ を解くと $(x,y) = (0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),(\pm1/2,\pm1/2)$ (複号同順にあらず).
$(x,y) = (0,0)$ においては $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = -1 < 0$ であるので鞍点で，極値をとらない.
$(x,y) = (0,\pm1),(\pm1,0)$ においても $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = -4 < 0$ であるので鞍点で，極値をとらない.
$(x,y) = (\pm1/2,\pm1/2)$ (複号同順) においては $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 7/4 > 0$ かつ $f_{xx} = 3/2 > 0$ であるので極小で，極小値は $-1/8$.
$(x,y) = (\pm1/2,\mp1/2)$ (複号同順) においては $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 7/4 > 0$ かつ $f_{xx} = -3/2 < 0$ であるので極大で，極大値は $1/8$.
(2)　$f_x = y - a/x^2, f_y = x - a/y^2,\ f_{xx} = 2a/x^3, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2a/y^3$.
$f_x = 0, f_y = 0$ を解くと $(x,y) = (a^{1/3},a^{1/3})$.
この点において $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 3 > 0,\ f_{xx} = 2 > 0$ であるので f は極小となり、極小値は $3a^{2/3}$.
(3) $f_x = 2x(a-ax^2-by^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0, f_y = 2y(b-ax^2-by^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0$ を解く。これは

$$x(a-ax^2-by^2) = 0,\quad y(b-ax^2-by^2) = 0$$

と同値. $a>b>0$ より楕円 $a = ax^2+by^2$ は楕円 $b = ax^2+by^2$ の外側にある. これより $(x,y) = (0,0),(\pm1,0),(0,\pm1)$.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2[-2x^2(a-ax^2-by^2)+(a-ax^2-by^2)-2ax^2]e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{yy} &= 2[-2y^2(b-ax^2-by^2)+(b-ax^2-by^2)-2by^2]e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{xy} &= -4xy(a+b-ax^2-by^2)e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

$(x,y) = (0,0)$ においては $f_{xx} = 2a, f_{yy} = 2b, f_{xy} = 0$ より $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 4ab > 0, f_{xx} = 2a > 0$, よって極小. 極小値は 0.
$(x,y) = (\pm1,0)$ においては $f_{xx} = -4ae^{-1}, f_{yy} = -4be^{-1}, f_{xy} = 0$ より $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = 16abe^{-2} > 0, f_{xx} < 0$. よって極大で、極大値は $e^{-1}a$.
$(x,y) = (0,\pm1)$ においては $f_{xx} = 2(a-b)e^{-1}, f_{yy} = -4be^{-1}, f_{xy} = 0$ より $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = -8b(a-b)e^{-2} < 0$. よって極値を持たない. (鞍点である)

問 3.3　$x^2/a^2+y^2/b^2 = 1\ \ (a,b>0)$ のもとで $x+y$ の最大値，最小値を求めよ.

解答

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,\quad 1 = \lambda\frac{2x}{a^2},\quad 1 = \lambda\frac{2y}{b^2}$$

を解く．第 2 式，第 3 式から $x = a^2/(2\lambda), y = b^2/(2\lambda)$ を得るが，これを第 1 式に代入して $\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2}/2$ を得る．したがって

$$(\lambda,x,y) = (\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

(複号同順).
$(x,y) = (a^2/\sqrt{a^2+b^2}, b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ のとき $f(x,y) = \sqrt{a^2+b^2}$ (最大値).
$(x,y) = (-a^2/\sqrt{a^2+b^2}, -b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ のとき $f(x,y) = -\sqrt{a^2+b^2}$ (最小値).