

問 4.1 (1)  $f(x, y) = \sin(x + y^2) + \sqrt{x}$  について  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  を求めよ.

(2)  $f(x, y) = 1/\sqrt{1 - 2xy + y^2}$  について

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

を求めよ.

解説 (1) まず  $f_x = \cos(x + y^2) + (1/2)x^{-1/2}$ ,  $f_y = 2y \cos(x + y^2)$ . これより

$$f_{xx} = -\sin(x + y^2) - \frac{1}{4}x^{-3/2}, \quad f_{xy} = -2y \sin(x + y^2), \quad f_{yy} = -4y^2 \sin(x + y^2) + 2 \cos(x + y^2).$$

(2)  $f_x = (-1/2)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2}(-2y) = y(1 - 2xy + y^2)^{-3/2}$  より

$$\begin{aligned} ((1 - x^2)f_x)_x &= ((1 - x^2)y(1 - 2xy + y^2)^{-3/2})_x \\ &= -2xy(1 - 2xy + y^2)^{-3/2} + (1 - x^2)y(-3/2)(1 - 2xy + y^2)^{-5/2}(-2y) \\ &= -2xy(1 - 2xy + y^2)^{-3/2} + 3(1 - x^2)y^2(1 - 2xy + y^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

また  $f_y = (-1/2)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2}(-2x + 2y) = (x - y)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2}$  より

$$\begin{aligned} (y^2 f_y)_y &= (y^2(x - y)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2})_y \\ &= (2xy - 3y^2)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2} + y^2(x - y)(-3/2)(1 - 2xy + y^2)^{-5/2}(-2x + 2y) \\ &= (2xy - 3y^2)(1 - 2xy + y^2)^{-3/2} + 3y^2(x - y)^2(1 - 2xy + y^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &((1 - x^2)f_x)_x + (y^2 f_y)_y \\ &= -3y^2(1 - 2xy + y^2)^{-3/2} + (3(1 - x^2)y^2 + 3y^2(x - y)^2)(1 - 2xy + y^2)^{-5/2} \\ &= 3y^2(1 - 2xy + y^2)^{-5/2}(- (1 - 2xy + y^2) + (1 - x^2) + (x - y)^2) = 0. \end{aligned}$$

問 4.2 (1) 任意の関数  $f(z), g(z)$  と定数  $a, b$  に対して  $w := xf(ax + by) + yg(ax + by)$  は

$$b^2 w_{xx} - 2ab w_{xy} + a^2 w_{yy} = 0$$

を満たすことを示せ.

(2)  $f(x, y) := (ax + by)/(cx + dy)$  ( $a, b, c, d$  は  $ad - bc \neq 0$  を満たす定数) は

$$xf_x + yf_y = 0$$

を満たすことをしめせ.

解説 (1)

$$\begin{aligned} w_x &= f + xf'a + yg'a = f + axf' + ayg', \\ w_y &= xf'b + g + yg'b = g + bxf' + byg', \\ w_{xx} &= f'a + (af' + axf''a) + ayg''a = 2af' + a^2xf'' + a^2yg'', \\ w_{xy} &= f'b + axf''b + (ag' + ayg''b) = bf' + ag' + abxf'' + abyg'', \\ w_{yy} &= g'b + bxf''b + (bg' + byg''b) = 2bg' + b^2xf'' + b^2yg''. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &b^2 w_{xx} - 2ab w_{xy} + a^2 w_{yy} \\ &= b^2(2af' + a^2xf'' + a^2yg'') - 2ab(bf' + ag' + abxf'' + abyg'') + a^2(2bg' + b^2xf'' + b^2yg'') = 0. \end{aligned}$$

(2)

$$f_x = \frac{a(cx + dy) - c(ax + by)}{(cx + dy)^2} = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}, \quad f_y = \frac{b(cx + dy) - d(ax + by)}{(cx + dy)^2} = \frac{-(ad - bc)x}{(cx + dy)^2}.$$

これより  $xf_x + yf_y = 0$ .

問 4.3  $w_{xx} - w_{yy} = 0$  であるとき, 定数  $a, b$  を適当にとつて  $u = x + ay, v = x + by$  とおくことにより,  $w_{uv} = 0$  とすることが出来ることを示せ.

解説

$$w_x = w_u u_x + w_v v_x = w_u + w_v, \quad w_y = w_u u_y + w_v v_y = a w_u + b w_v$$

より

$$\begin{aligned} w_{xx} &= ((w_u)_u u_x + (w_u)_v v_x) + ((w_v)_u u_x + (w_v)_v v_x) = w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}, \\ w_{yy} &= a((w_u)_u u_y + (w_u)_v v_y) + b((w_v)_u u_y + (w_v)_v v_y) = a^2 w_{uu} + 2ab w_{uv} + b^2 w_{vv}. \end{aligned}$$

したがって

$$w_{xx} - w_{yy} = (1 - a^2)w_{uu} + 2(1 - ab)w_{uv} + (1 - b^2)w_{vv}.$$

よつて  $a^2 = 1, b^2 = 1, ab \neq 1$  となるように, 例えば  $a = 1, b = -1$  に選べば  $w_{xx} - w_{yy} = 0$  と  $w_{uv} = 0$  とは同値となる.

11月21日の講義における演習問題の解説

問題  $f_{xx} + f_{yy}$  を極座標  $(r, \theta)$  で表せ. ただし  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

解説.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}(y/x)$  より

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2}, \quad \theta_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2}.$$

さらに

$$r_{xx} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad r_{yy} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = 2 \frac{y}{r^3} r_x = \frac{2xy}{r^4}, \quad \theta_{yy} = -2 \frac{x}{r^3} r_y = -\frac{2xy}{r^4}.$$

連鎖律 (chain rule)(教科書 p.17) から

$$f_x = f_r r_x + f_\theta \theta_x, \quad f_y = f_r r_y + f_\theta \theta_y.$$

よつて

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_{rr} r_x + f_{r\theta} \theta_x) r_x + f_r r_{xx} + (f_{\theta r} r_x + f_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + f_\theta \theta_{xx} \\ &= f_{rr} (r_x)^2 + 2f_{r\theta} r_x \theta_x + f_{\theta\theta} (\theta_x)^2 + f_r r_{xx} + f_\theta \theta_{xx} \\ f_{yy} &= (f_{rr} r_y + f_{r\theta} \theta_y) r_y + f_r r_{yy} + (f_{\theta r} r_y + f_{\theta\theta} \theta_y) \theta_y + f_\theta \theta_{yy} \\ &= f_{rr} (r_y)^2 + 2f_{r\theta} r_y \theta_y + f_{\theta\theta} (\theta_y)^2 + f_r r_{yy} + f_\theta \theta_{yy}. \end{aligned}$$

したがって

$$f_{xx} + f_{yy} = A f_{rr} + 2B f_{r\theta} + C f_{\theta\theta} + D f_r + E f_\theta$$

とおくと

$$A = (r_x)^2 + (r_y)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad B = r_x \theta_x + r_y \theta_y = \frac{x}{r} \frac{-y}{r^2} + \frac{y}{r} \frac{x}{r^2} = 0, \quad C = (\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1,$$

$$D = r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{r}, \quad E = \theta_{xx} + \theta_{yy} = \frac{2xy}{r^4} - \frac{2xy}{r^4} = 0.$$

以上から

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} f_r.$$