

- 問 6.1 (1) 平面上の図形 $D: \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$ の面積 $S(D)$ を求めよ.
 (2) 空間内の図形 $D: x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, mx \leq z \leq nx$ ($0 < m < n$) の体積 $V(D)$ を求めよ.
 (3) 空間内の図形 $D: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1$ の体積 $V(D)$ を求めよ.

解説 (1)

$$S(D) = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy = \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = 1/6.$$

(2)

$$\begin{aligned} V(D) &= \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{mx}^{nx} dz = \int_0^a 2(n-m)x\sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= 2(n-m)[-(a^2-x^2)^{3/2}/3]_0^a = 2(n-m)a^3/3. \end{aligned}$$

(3) 変数変換 $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v, \sqrt{z} = w$ を行うと、 xyz -空間内の考えている立体 D は uvw -空間内の立体 $u, v, w \geq 0, u + v + w \leq 1$ に写り、 $dx dy dz = 8uvw du dv dw$ であるので

$$V(D) = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw 8uvw = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv 4uv(1-u-v)^2 = \int_0^1 du u(1-u)^4/3 = 1/90.$$

- 問 6.2 (1) 空間内の曲線 $C: x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = h\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の長さ $\ell(C)$ を求めよ.
 (2) 平面上の曲線 $C: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ の長さ $\ell(C)$ を求めよ.

解説 (1) $\sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 + (dz/d\theta)^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$ であるから

$$\ell(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + h^2} d\theta = 2\pi\sqrt{a^2 + h^2}.$$

(2) この曲線はパラメータ $0 \leq t \leq 2\pi$ を用いて $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ と表される。よって

$$\ell(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = (3a/2) \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a.$$

- 問 6.3 (1) 曲面 $z = \tan^{-1}(y/x)$ ($x, y > 0$) の $x^2 + y^2 = a^2$ の内部にある部分の曲面積 S を求めよ.
 (2) 半径 R , 高さ h の円柱面の曲面積 S を求めよ.
 (3) 半径 R の球の表面積 S を求めよ.

解説 (1) $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}/\sqrt{x^2 + y^2}$ であるので、

$$S = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2, x, y > 0} \sqrt{1 + x^2 + y^2}/\sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ をすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \sqrt{r^2 + 1} dr = (\pi/2) \left[(r\sqrt{r^2 + 1} + \log(r + \sqrt{r^2 + 1}))/2 \right]_{r=0}^{r=a} \\ &= (\pi/4)(a\sqrt{a^2 + 1} + \log(a + \sqrt{a^2 + 1})). \end{aligned}$$

(2) この円柱面は $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, z = z, (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h)$ と表せる.

$$E = (x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 + (z_\theta)^2 = R^2, \quad F = x_\theta x_z + y_\theta y_z + z_\theta z_z = 0, \quad G = (x_z)^2 + (y_z)^2 + (z_z)^2 = 1$$

であるので $\sqrt{EG - F^2} = R$. よって

$$S = \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h} \sqrt{EG - F^2} d\theta dz = R \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R h.$$

(3) この球面は $x = R \cos \varphi \sin \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ と表せる.

$$E = (x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 + (z_\theta)^2 = R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2,$$

$$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = R \cos \varphi \cos \theta (-R \sin \varphi \sin \theta) + R \sin \varphi \cos \theta (R \cos \varphi \sin \theta) = 0,$$

$$G = (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 + (z_\varphi)^2 = R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta.$$

よって $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \theta$. したがって

$$S = \int_{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2.$$