数理科学特別講義 I / 数理科学続論 A (2017/4/24–28, 123 講義室)

講義題目：数の幾何と解析的整数論

概要と目標：

X 未満の素数の個数を $\pi(X)$ とすると，$X \to \infty$ のとき，

$$\pi(X) \sim \int_2^X \frac{dt}{\log t}$$

が成り立つ．素数定理と呼ばれる定理であり，Riemann のゼータ関数を用いる証明が標準的である．このように，整数論的な量を数える関数について，漸近公式や上下からの評価を与えることは，解析的整数論の主題の一つである．

$N_3(X)$ で，判別式の絶対値が X 未満である 3 次体の個数を表そう．$X \to \infty$ のとき，

$$N_3(X) \sim \frac{1}{3\zeta(3)} X$$

が成り立つ．これは Davenport と Heilbronn により 1971 年に得られていた古典的な定理で，証明には**数の幾何 (geometry of numbers)** が用いられる．Bhargava は，この Davenport-Heilbronn の方法が大きなポテンシャルを持っていることを見抜き，鮮やかで劇的な拡張を与えた (2004–)．主な成果としては，

a) 4 次体と 5 次体の判別式の密度の決定
b) $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を高さで並べたときの，2,3,4,5-Selmer 群の平均位数の決定
c) $\mathbb{Q}$ 上の超楕円曲線 C を高さで並べたときの，$\mathrm{Sel}_2(\mathrm{Jac}(C))$ の平均位数の決定

などがあり，従来は困難だと考えられていたものも多い．例えば b) からは，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E を高さで並べたとき，階数 $\mathrm{rank}(E)$ の平均が有限であることがしたがう．(現在，< 0.885 であることまで示されている．)

この講義では，Bhargava のこれらの研究成果を主なテーマに据える．$N_3(X)$ の漸近公式の証明から始め，関連する話題を織り交ぜつつ，研究の近況までを概説する．Davenport-Heilbronn や Bhargava の手法と異なる，ゼータ関数（生成 Dirichlet 級数）を用いる方法についても触れる．この分野の問題意識やアプローチの方法について，大まかなビジョンを持ってもらうことが目標である．キーワードは次の通り：

数の幾何 / 数論的不変式論 / 高次合成則 / 篩法と一様評価 / 代数体の判別式の分布 / イデアル類群の平均位数と個別の位数 / Selmer 群の平均位数 / 数論統計学 / 概均質ベクトル空間のゼータ関数 / Perron の公式

予備知識：あまり仮定しない．一般的な代数学や複素関数論の他，整数論について，代数体の判別式やイデアル類群を知っていれば，概要は掴めると思う．Gauss の合成則/ GL_n の Siegel 領域/ Iwasawa-Tate の方法 (ゼータ関数の解析接続) / 双子素数についての Hardy-Littlewood 予想，などで知識があれば，講義内容の細部をより詳しく把握できるかも知れない．

成績評価方法：レポートによる．

谷口隆 (神戸大・理)