



## 2 平均曲率一定曲面, ウェイン・ラスマン

この章では平均曲率一定曲面 (CMC 曲面) を扱う。この分野における研究のテーマと研究方法, そして多くの研究者達がなぜ CMC 曲面に興味を抱くのかについての 1 つの手懸りをお示しするのが目標である。この章は全 5 節から成り, 節が進むにつれて, 入門的な話から, より専門的で技術的な話へとなっていくだろう。最初の節では, CMC 曲面が石鹸膜の数学的モデルであることを説明し, さらに CMC 曲面と他分野との関係を見る。第 2 節においては, CMC 曲面と石鹸膜との関係をより深く理解するために, 変分的性質について述べる。第 3 節では, ユークリッド空間以外の空間の中で CMC 曲面を考える。とくに 3 次元双曲型空間について詳しく見る。第 4 節においては, この半世紀における CMC 曲面の研究の結果の一部を紹介する。最後の第 5 節では, 古典的なメビウス幾何学の立場から, 曲面のより専門的な話題を扱う。

最初の 2 節に関しては, この分野を専門としていない読者でも読めるように, また面白さを見出してもらえるように努めた。とくにこの 2 節はそれだけで完結した話になるように書かれている。すでに曲面論をよくご存じの読者にとっては, 最後の第 5 節が興味あるものになることを願う。

著者と藤森氏, 小林氏による以前の概説論文[9] は, 本章で度々参照されることになる。他にも参照できる文献はたくさんあるが, 論文[9] は (共通の著者をもつために) 本章での記号とよく合致しているので都合がよい。他には, 例えば, 梅原・山田[23], 剣持[15], 小林[17]などを参照されたい。また, ここでの参考文献のリストはこの章で実際に引用されたもののみに限った最小限のものであり, より完全なリストは[9]に譲る。

ところで, 本章はこの分野の歴史的な発展に沿って記述されているわけではないということに注意すべきである. それにもかかわらず, その発見の歴史は文中に現れる有名な人名からある程度明らかになろう. 例えば, ワイエルシュトラウス (Weierstrass), リーマン (Riemann), エネパー (Enneper), クリストッフエル (Christoffel), ミンコフスキー (Minkowski), ウィルモア (Willmore), トムゼン (Thomsen), ブラシュケ (Blaschke), メビウス (Moebius), ポアンカレ (Poincare), クライン (Klein), デロネイ (Delaunay), シュワルツ (Schwarz), ラプラス (Laplace), ホップ (Hopf), ガウス (Gauss), コダッチ (Codazzi) といった名前である. また, まだ現役で活動している数学者の名前も多く現れるが, この分野の現代の研究者の名前を網羅しようとはしなかった. 実際そんなことをすれば, それらの名前のリストは, かなり小さいフォントでも使わない限り, 1つのページには収まらないであろう.

## 2.1 CMC 曲面を学ぶことへの動機づけ

本章では, 平均曲率一定 (constant mean curvature) 曲面, 略して「CMC」曲面に関して述べる.

CMC 曲面は石鹸膜の数学的モデルとすることができる. あるいは「数学的に完全な」石鹸膜といえるかもしれない. 確かに「CMC 曲面は石鹸膜の数学的モデルである」という表現は厳密な数学的定義とはいえないが, しかしそれは, なぜ CMC 曲面が興味深い対象であるかを認識するための良い出発点である. 実際のところ, 石鹸膜や流体の境界面などの議論なくしては, なぜ数学者が CMC 曲面の研究にこれほどまでに多大な努力をしてきたかを説明することは不可能であろう. 今日の CMC 曲面の研究は, いつも石鹸膜に直接関係しているわけではないけれども, 背景にはつねに石鹸膜がある. そこでまずこれを, CMC 曲面の素朴な定義としよう:

CMC 曲面とは石鹸膜のことである.

実際には CMC 曲面は, その名が示すように, 平均曲率が一定である曲面として定義される. しかし平均曲率の厳密な定義は後に回そう. この厳密な定義と

というのは局所的には上の素朴な定義に等しい。そのことも後ほど説明する。

### 2.1.1 石鹸膜

石鹸膜は与えられた制約に関して面積を最小にするような曲面を形成し、どのようなタイプの石鹸膜が形成されるかを決めるのはその制約条件である。いくつか例を見てみよう。これらのすべてには必要な材料が手に入れば実際に作る事ができる:

- (1) 円形の針金を石鹸液に入れて取り出せば石鹸膜が得られ、それはこの針金の輪を境界とする平面円板となる。ここでこの石鹸膜の唯一の制約はその境界であり、それは固定された円である。この境界の制約が、生じる石鹸膜を決定しているのである。
- (2) 上の (1) における平面円板にある程度強く息を吹きかけると、この石鹸膜は輪から解き放たれて空中を漂う球面になるであろう。(これはシャボン玉といわれる。) この球面は内部に一定体積の空気を含んでおり、その空気は石鹸膜の外側へ逃れることはできないので、この体積は変わらない。ここでこの石鹸膜の唯一の制約はそれが含む一定の体積である。この体積の制約に関して、石鹸膜は自身の表面積を最小にする。そして球面膜はこれをみたす唯一の形である。
- (3) 同じ半径をもつ 2 つの丸い針金の輪を用いると、(1) のようにして、円板の形をした 2 つの平たい石鹸膜を作ることができる。この 2 つの円板をぴったり重なるように合わせてからそれらをその平面に対して垂直方向に少し引き離すと、1 つの円に沿って会合する 3 つのなめらかな部分をもつ石鹸膜ができる (図 2.1 の左から 3 番目)。そのうちの 2 つのなめらかな部分は回転面であり、それらは互いに、2 つの針金の中間にある平面に関して、対称である。3 番目のなめらかな部分は 2 つの針金の中間にある平面円板である。その 3 番目のなめらかな部分を (鉛筆のような) 先の尖った乾いた物体で突くと、石鹸膜は弾けて一瞬にして、図 2.1 の左から 4 番目のような、かなとこ型の回転面になる。この最後の石鹸膜は懸垂面 (catenoid) と呼ばれ、この曲面はその境界の制約である 2 つの固定された針金の輪によって

決定される.

- (4) 次に, (3) においてできた懸垂面の石鹸膜に対して, その境界となっている 2 つの針金の内側に平らなプラスチックの円板を配置して蓋をする. そのようにして懸垂面内部の空気を閉じ込める. 片方のプラスチック円板に小さな穴を 1 つ開けてこの内部に空気を送り込むと, かなとこ型の懸垂面の側面は内部の体積の増加に応じて膨張する. もし空気が適切な量だけ送り込まれば (かつ, 境界となっている 2 つの円形の針金が互いにそれほど離れていないとすると), この石鹸膜はちょうど円柱面 (cylinder) の一部分になる (図 2.1 の右端). よって円柱面は石鹸膜を用いて作る可以说是. この場合には 2 つの制約がある. 一方の制約は固定された境界 (2 つの針金の輪) であり, そしてもう一方は (円柱面内部の) 一定の体積である. 内側の領域に空気を送り込むというこの方法によって, 他にも石鹸膜から作ることができる回転面が存在し, これらの曲面はデロネイ曲面の一部であることがわかる. デロネイ曲面についての詳細は[9]をご覧ください.

これらの例は, 平面, 球面, 懸垂面, 円柱面がすべて CMC 曲面であることを示している.

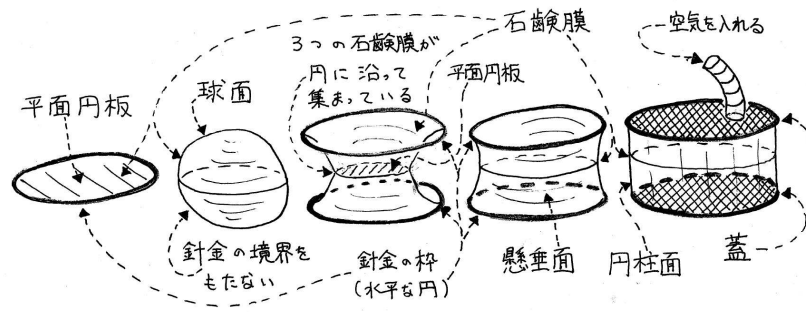


図 2.1 2.1 節の始め (1), (2), (3), (4) で説明されている石鹸膜.

上述の 4 つの例では, 2 番目と 4 番目の例だけが体積の制約をもっている (体積一定という条件をみたしている).

(1 番目と 3 番目の例のように) 体積の制約はなくて境界の制約のみがある場合, 生じる石鹸膜は極小曲面と呼ばれ, CMC 曲面の特別な場合である. つまり平面と懸垂面は極小曲面である. (2 番目と 4 番目の例のように) 体積の制約がある場合, 生じる石鹸膜は極小曲面ではない CMC 曲面である. したがって球面と円柱面は極小曲面ではない CMC 曲面である.

### 2.1.2 境界面

より一般に, CMC 曲面は 2 つの異なる (一様な) 流体間の境界面のモデルといえる. 例えば, 水よりも軽い油を水の入ったカップに注ぐと, 油はてっぺんに浮かび上がってきてその油と水の境界面は水平の平面, すなわち極小曲面になる. また, 互いに反応しない同じ密度をもつ 2 種類の油があるとして, その一方の油で満たされているコップの容器にもう一方の油を少量入れると, その少量の油は容器を満たしている油の中で漂う丸い玉の形をとるであろう. この玉は丸いので, 2 種類の油の境界面は CMC 曲面である球面となる. (重力の存在下では, 一様で反応し合わない別個の流体の境界面は capillary 曲面と呼ばれ, CMC 曲面であるとは限らないより一般の曲面のタイプになり得る. Robert Finn は capillary 曲面についての多くの業績を残している. 例えば[7]を見よ.)

### 2.1.3 変分的性質

与えられた制約に対して石鹸膜がその面積を最小にすることは変分的性質と呼ばれる. というのも, もし仮に与えられた制約が保たれるように石鹸膜を連続的に変分 (変形) するとその石鹸膜の面積は増加するので, (もとの) 石鹸膜は制約を保つような連続的な変形のうち面積を最小にするものだからである. CMC 曲面の厳密な定義を与えると, CMC 曲面の全体は, “不安定な” 石鹸膜と呼ばれる非物理的な対象をも含み, 石鹸膜全体よりもっと広い曲面のクラスになる. このことから, 上で述べた「CMC 曲面とは石鹸膜のことである」という主張は厳密には正しくない. しかしながら, これは当面は無視してもよい専門的なことである. 留意すべき大切なことは, 上の変分的性質が CMC 曲面に対して

も局所的に成立することである。言い換えれば, CMC 曲面の十分に小さい部分を, その与えられた制約がやはり保たれるように連続的に変形すれば, 変形された曲面のその部分の面積はもとの CMC 曲面におけるその部分の面積よりも大きくなるのである。よって我々は CMC 曲面の 2 番目の定義を与えることができる。それは依然として厳密ではないが直感的で有用である:

CMC 曲面とは, 境界および体積の制約に関して局所的に面積を最小にする曲面のことである。

“不安定な” CMC 曲面の意味については 2.2 節でより詳細に述べる。さらにここでは, いくつかの例を紹介する。

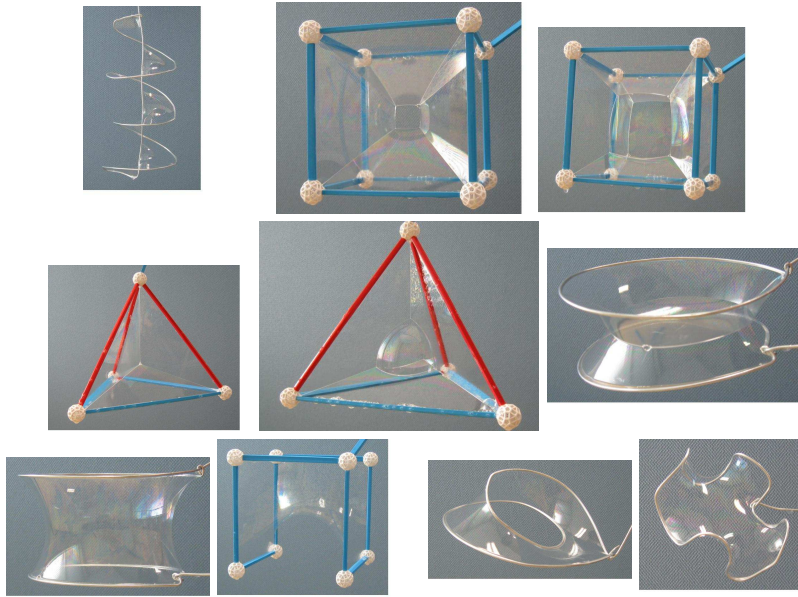


図 2.2 いろいろな石鹸膜の例。複数の石鹸膜が 1 つの曲線に沿って集まるときは常に 120 度で 3 面が会合する。またそのような曲線のいくつかは 1 つの頂点で会合するときには常に 4 面体の角度 (約 109 度) で 4 つが集まる。

### 2.1.4 他分野との関係

CMC 曲面は石鹸膜や流体の間の境界面のモデルであるがゆえに、物理学、化学、ポリマー科学と関係が深い。実際、ときとして CMC 曲面の新しい例が、これら他分野の研究者によって発見されることがある。(Fischer と Koch [8] によって発見された極小曲面がその一例である。[9] の図 3.4.10 を参照。) また CMC 曲面は生物学とも大いに接点がある。例えばサンゴの形態が CMC 曲面に似た形をとることがその一例である。実際、図 2.3 で描かれている CMC 曲面の形状がそのようなものである。ちなみにこれは 3 つの垂直する方向に関して周期的である。また、極小曲面に似た屋根をもつミュンヘンのオリンピックスタジアムやベルリンのソニーセンターから窺えるように、CMC 曲面はときとして建築とさえ関係がある。そうした建築との関連を非常に詳細に説明している書物 ([20]) も最近出版された。このように、CMC 曲面は数学以外の諸分野とも興味深い関連がある。このことは、まさしく我々が CMC 曲面を研究する 1 つの理由となっている。

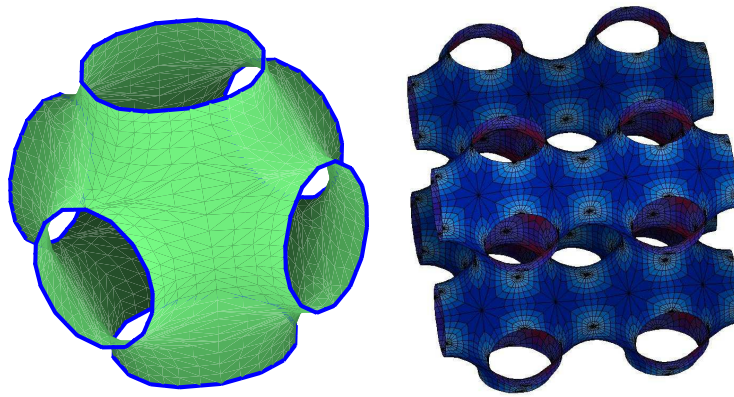


図 2.3 3重周期のシュワルツ P 曲面 (これは極小曲面)。左側の図はその曲面の 1 つの基本的な部分。右側の図はこの曲面の周期的な性質を表している。



### 2.1.5 数学内での関係

CMC 曲面を研究する他の理由は、それが豊かな数学的構造をもち、かつ数学における様々な分野と興味深い結びつきがあるからである。極小曲面や CMC 曲面は幾何学における研究テーマであるけれども、上で説明した変分的性質から明らかなように、それらは変分法とも密接に関係している (この関係については、2.2 節においてごく手短かに紹介する)。

極小曲面はまた、ワイエルシュトラウスの表現公式と呼ばれる公式によって、複素解析の分野とも強く結びついている (この表現公式は [9] にある)。この表現公式は、リーマン面上で定義された複素解析関数の組を用いることで極小曲面を表示する 1 つの方法を与える。このことから、極小曲面は豊かな数学的構造をもち、かつ多くの例を構成することができる。実際、[9] ではたくさんの例が説明されている。

また、極小曲面ではない CMC 曲面も、同様に、リーマン面上で定義された複素解析関数の言葉での記述が可能である ([9] 参照)。したがって、我々は、この場合にもまた複素解析学との関係を見るのである。その上さらに、ある種の孤立特異点 (臍点のこと。臍点については後述) を除いたところでは、極小曲面ではない CMC 曲面は  $\sinh$ -Gordon 方程式の解に対応している。この  $\sinh$ -Gordon 方程式は可積分系の理論において現れる顕著な方程式であり、CMC 曲面はこうした分野とも直接的な関係があるといえる。実際のところ、[9] で重点的に扱われている DPW の方法の背後にある本質的なアイデアは可積分系の理論からきている。DPW の方法とは、可積分系の理論に由来するループ群の手法を用いて CMC 曲面を構成するものである。最後に、極小・非極小 CMC 曲面はともによく知られた偏微分方程式で記述されることに注意しておく。したがって、これらの曲面と偏微分方程式の分野には、やはり明瞭な関係がある。

このように、CMC 曲面に他の数学分野の技巧や研究成果が応用できるということは、CMC 曲面が豊饒な数学的構造をもつことを示して余りない。実際そのことが、さらには CMC 曲面の多くの例を提供するための手段を与える源泉となっている。

### 2.1.6 非ユークリッドアンビエント空間

対象となる曲面が、より大きな(すなわち、より次元の高い)空間の中にあるとしよう。その大きい方の空間のことをアンビエント空間<sup>\*1</sup>という。3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  以外のアンビエント空間内にある CMC 曲面の研究に関しては、化学、ポリマー科学、建築学との関係はもはや期待できないが、物理学との結びつきは依然として存在する。また数学の他分野との強い結びつきはそのまま完全に残る。というのも、CMC 曲面の豊かな数学的構造や他の数学の分野との関係を引き継ぐような別のアンビエント空間を見出すことができるからである。この場合、その数学的構造に関する研究は  $\mathbb{R}^3$  の場合と類似のやり方で引き継がれるが、観点を換えれば、その構造にも興味深い変化が起こる。例えば、曲面に直交する方向の振る舞い(ガウス写像)は別の3次元アンビエント空間において全く異なる様相を呈する場合がある。さらに CMC 曲面の大域的な性質が大きく違ってくる可能性もある。

### 2.1.7 離散 CMC 曲面

近年、解析学や幾何学の様々な場面で見られるように、なめらかな対象に対し、その離散的類似物を見つけることが数学における重要なテーマとなっている。なめらかな極小曲面や CMC 曲面の離散的な類似物を考えることもまた自然である。しかしそこにはこれといった決定的なアプローチは存在しない。対象とするなめらかな極小曲面や CMC 曲面のどのような性質に着目し、対応する離散的対象の構成を行うのかということに依存し離散化の方法や定義は決まってくるのである。

例えば、3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の離散的な極小曲面として、次のような性質をみだす区分的に線型な三角形分割された曲面を定義してみよう。これは、その単体構造を保つような、台がコンパクトで境界が固定された連続的で区

---

<sup>\*1</sup> 佐々木武氏(神戸大学名誉教授)によると、戦前(第2次世界大戦以前)は、アンビエント空間は環繞(カンジョウ、カンニョウ)空間と呼ばれていた。繞とは、めぐること、かこむこと、まつわることの意。あるいは、漢字構成上の名称で、漢字の左から下の部分につく字形。例えば「しんによ」「えんによ」など。

分的に線型な任意の（その各頂点の）変分に関して、面積汎関数が臨界となるという性質に着目した定義といえる。また離散 CMC 曲面に関して、「変分は曲面の体積を保たなければならない」という条件が加わる以外は、同じように定義できる。これらの定義は明らかに、なめらかな場合の極小曲面や CMC 曲面のもつ変分的性質を模倣したものである。その結果、適切な変分的性質を備えながらも、対応するなめらかな曲面がもつ、エレガントな「正則」構造はないような離散的な曲面が生まれる。このような方法で構成された離散的な懸垂面とデロネイ曲面の例を図 2.4 に示す。

上述の方法とは異なり、なめらかな極小曲面や CMC 曲面のもつ可積分系の性質のアナロジーを用いて離散版の可積分系を考えることによって、これらの離散的な曲面を定義することも可能である。それは、[4]における Bobenko と Pinkall がとったアプローチであり、その方法で得られた離散的な曲面は平面四角形から構成される。このアプローチによって与えられた離散的な極小曲面や CMC 曲面は「離散的な正則」な数学的構造をもち、それはなめらかな極小曲面と CMC 曲面の正則構造に対応している。このように、この定義には、離散化に対し豊富な数学的構造を保つという利点がある。しかし一般に、それらが頂点の変分に関して面積汎関数が臨界となるような離散的な曲面を与えることはない。このアプローチを通して構成された離散的なデロネイ曲面の例を図 2.4 の右側に示しておく。

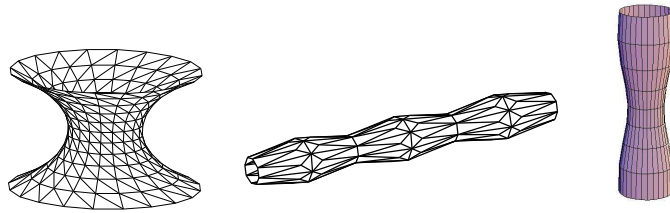


図 2.4 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の離散的な懸垂面とデロネイ曲面. 左の曲面は離散的な極小曲面であり、中央と右の2つの曲面は離散的な CMC 曲面.

## 2.2 CMC 曲面とその変分的性質

第 1 章では定義 1.8 において平均曲率を定義している。そして、平均曲率  $H$  が一定であるような曲面は CMC 曲面であり、また極小曲面とは平均曲率  $H = 0$  をもつ CMC 曲面であるとしている。この節では、なぜこの定義で極小曲面および CMC 曲面が石鹸膜のモデルになるのかを考える。

面積汎関数の第 1, 第 2 変分公式は、CMC 曲面および極小曲面がどのようにして石鹸膜のモデルになるのかを理解するために不可欠であり、同様になぜ我々がそのような曲面に興味を抱くのかを知るうえでも重要である。しかしながらこの章においては、第 1, 第 2 変分公式が直接的に用いられることはない。したがってこれらについては証明抜きで紹介する。同様に、他の種々の性質についても証明なしで述べるに留める。さらに、議論をいくぶん平易にするために、この節では  $\mathbb{R}^3$  内の曲面である場合に限定する。(他のアンビエント空間内での極小曲面および CMC 曲面についても、公式はやや異なるが、議論は (ほぼ) そのまま保たれる。)

今,

$$f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を直交座標  $u, v$  をもつ平面  $\mathbb{R}^2$  内の 2 次元領域  $\Sigma$  から  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込み\*2 とし、その誘導計量を  $g$  とする。また、 $f$  の単位法線ベクトルを  $\vec{N} = \vec{N}(u, v)$  で表す。このとき、 $p \in \Sigma$  に対し、 $f(p)$  における平均曲率  $H$  を定義しよう\*3。まず、接方向

$$\vec{v} \in \mathcal{S} := \{\vec{w} \in T_p \Sigma \mid g(\vec{w}, \vec{w}) = 1\}$$

に対して、法曲率

$$-\langle \vec{v}, D_{\vec{v}} \vec{N} \rangle$$

を考える。ただし、 $T_p \Sigma$  は  $p \in \Sigma$  における  $\Sigma$  の接空間、 $D_{\vec{v}}$  は  $\vec{v}$  方向への方向微分を表している。直感的には、法曲率は、 $\vec{N}$  に対して  $\vec{v}$  方向に曲面が曲がって

\*2 この場合、 $f$  がはめ込みであるとは、領域  $\Sigma$  の点  $p = (u, v)$  で  $f_u(u, v)$  と  $f_v(u, v)$  が一次独立であること。

\*3 この定義の仕方は、第 1 章の定義 1.8 のそれとは異なっている。しかし、ここで定義される平均曲率は、第 1 章の定義 1.8 における平均曲率と同値である。

いる割合を表している. そして, すべての接方向  $S$  について, 法曲率の平均をとることによって平均曲率  $H$  を定義する. ここでその平均は,  $-\langle \bar{v}, D_{\bar{v}} \bar{N} \rangle$  を  $S$  上で積分することによって計算される. したがって, 例えば, 極小曲面は任意の点で法曲率の平均が 0 といえる. このことは 1 つの物理的解釈を示している. これに関して, Hoffman と Meeks [11] から引用する:

「大雑把に言うと, 曲面は, さまざまな方向に張られた非常に多くのゴムバンドの集まりから成っていると思うことができる. そして極小曲面の場合は, 各点においてゴムバンドにかかる力は釣り合っており, 曲面は張力を減少させるように動く必要はない。」

このことをより厳密に述べよう.  $\Sigma$  を  $(u, v)$ -平面内のコンパクトな領域と仮定する. はめ込み  $f(\Sigma)$  の境界が固定されたなめらかな変分を次の 3 つの性質をもつ  $C^\infty$  級の写像  $f_t: (-1, 1) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  として定義する:

- (1) 任意の  $t \in (-1, 1)$  に対して,  $f_t(\cdot): \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  ははめ込み,
- (2)  $\Sigma$  上で  $f_0 = f$ ,
- (3) 任意の  $t \in (-1, 1)$  に対して,  $f_t|_{\partial\Sigma} = f|_{\partial\Sigma}$ . ( $f|_{\partial\Sigma}$  は,  $f$  を  $\Sigma$  の境界  $\partial\Sigma$  に制限したものの.)

このとき,

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} f_t|_{t=0}$$

のことを  $t = 0$  における  $f_t$  の変分ベクトル場と呼ぶ.

$A(f_t(\Sigma))$  で  $f_t(\Sigma)$  の面積を表すとすると,  $A(f_t(\Sigma)) = \int_{\Sigma} dA_t$  である. ここで

$$dA_t = \sqrt{g_{t,11}g_{t,22} - g_{t,12}^2} du dv$$

は,  $\Sigma$  の座標  $(u, v)$  に関する, はめ込み  $f_t$  の誘導された計量  $g_t = (g_{t,ij})$  の体積要素 (面積 2 次形式) である. このとき, 境界が固定されたなめらかな変分の第 1 変分公式は

$$(2.1) \quad \left. \frac{d}{dt} A(f_t(\Sigma)) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle H \bar{N}, \mathcal{E} \rangle dA_0$$

で与えられる. とくに, 極小曲面 ( $H \equiv 0$ ) では,  $\Sigma$  の任意のコンパクトな部分領域上の, 境界が固定されたなめらかな変分すべてに関して面積汎関数が臨界

となる。我々は極小曲面をこの観点から定義したのであった。実際に、 $\Sigma$  が十分小さいときには、 $f(\Sigma)$  は面積汎関数に関して臨界であるだけでなく、一意的に定まる面積最小曲面である。したがって、そのような曲面を「極小」曲面と呼ぶのはもっともであろう。

十分に短い区間で定義された測地線 (測地線に関しては、1 章の小節 1.1.1 を参照) というのは、一方の端点からもう一方の端点への最短経路であるから、実のところ極小曲面は測地線の自然な 2 次元への一般化である ([23],あるいは [9] の Section 1.1 参照)。また、測地線は長い区間の端点の間では最短になるとは限らないが、依然として端点の固定された曲線のなめらかな変分について、長さに関して常に臨界である (再度 [23] や [9] を参照)。このように、極小曲面の変分的性質は、測地線の性質の拡張になっている。

同様に、極小曲面でない CMC 曲面は、次のようなはめ込み  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  として定義できる。つまり、 $f(\Sigma)$  が、曲面の体積 (体積に関しては、1 章の小節 1.5.3 を参照) が変わらないような、境界が固定されたなめらかな変分すべてに関して、面積汎関数が臨界となるものとして定義するのである。この体積汎関数の  $t$  に関する微分は、 $t = 0$  において

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{N}, \mathcal{E} \rangle dA_t$$

となる。そこでもし、 $t$  に関して体積が不変、すなわち  $\int_{\Sigma} \langle \vec{N}, \mathcal{E} \rangle dA_t = 0$  であり、かつ  $H$  が一定であるとする、式 (2.1) から

$$\left. \frac{d}{dt} A(f_t(\Sigma)) \right|_{t=0} = 0$$

がしたがう。この  $f_t|_{\Sigma}$  の体積を保つような変分は体積保存の変分と呼ばれる。体積を保つというこの制約は非極小 CMC 曲面を生み出すうえでの自然な制約であることが、小節 2.1.1 の石鹸膜の例 (2) から見て取れる。実際、例 (2) で解説されている球面の石鹸膜が、その内部の体積を保たないように変形することが許されるならば、それは半径が小さくなることで表面積が減少し、最終的には面積をもたない 1 つの点に縮むであろう。しかし、実際には体積の制約があるので、このようなことは起こるはずがないのである。

結論をまとめると次のようになる。 $\mathbb{R}^3$  内の極小曲面とは、境界が固定された

なめらかな変分に関して面積汎関数が臨界となる曲面のことであり, CMC 曲面とは, 境界を固定し, かつ曲面の体積も保存するようななめらかな変分に関して面積汎関数が臨界となる曲面のことである. したがって, 極小曲面および CMC 曲面は石鹸膜のモデルである. すなわち, 極小曲面は, 内側に空気を含まないような石鹸膜のモデルとなり, そのような膜は境界が固定された任意の変分に対して面積最小となる. また, 非極小 CMC 曲面は, 内側に空気を含む石鹸膜のモデルとなり, そのような膜は内側の空気の体積をそのまま保つような変分に関してのみ表面積最小となる.

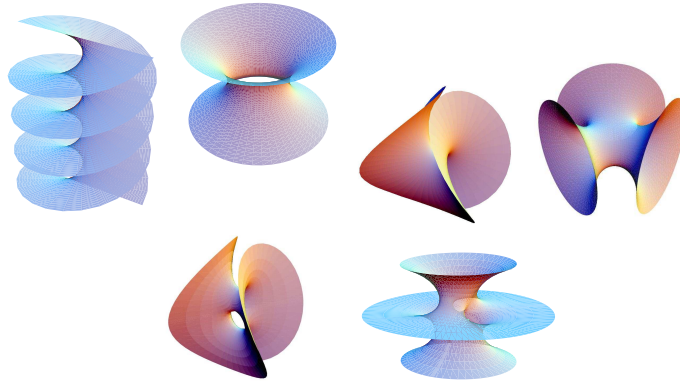


図 2.5 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の完備な極小曲面のコンパクト部分の例. 上段左から, 螺旋面 (helicoid), 懸垂面, エネパー曲面, Jorge-Meeks trinoid. 下段左は, 種数 1 の Chen-Gackstätter 曲面, 右は種数 1 の Costa 曲面. また, 螺旋面, 懸垂面, Costa 曲面は, 完備な極小曲面に拡張できる.

$\mathbb{R}^3$  の場合におけるこのような変分的性質は  $S^3$  や  $\mathbb{H}^3$  といった他のアンピエント空間についても同様に成り立つ ([9]を参照).

CMC 曲面の, 体積を保つ変分に対する第 2 変分公式は

$$(2.2) \quad \frac{d^2}{dt^2} A(f_t(\Sigma)) \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} h L(h) dA_0$$

となる (CMC 曲面が極小曲面である場合は体積を保つという条件を無視してよい). ここで,  $h = \langle \vec{N}, \mathcal{E} \rangle$  であり,  $L$  は, ラプラス-ベルトラミ作用素と, 曲面の平均曲率およびガウス曲率によって記述される作用素である. ただし,  $L$  の正確な定義は, ここでの入門的な議論には不要であるから割愛する.

CMC 曲面については, 体積保存かつ境界固定のなめらかな変分に関し面積汎関数の 1 階の微分

$$\frac{d}{dt} A(f_t(\Sigma)) \Big|_{t=0}$$

が 0 になるので, 2 階の微分 (2.2) の符号がその変分が面積を増加させるのかあるいは減少させるのかを決定する. もし (2.2) が負の値をとるような変分  $f_t$  が存在するならば, その極小曲面あるいは CMC 曲面は, 体積保存かつ境界固定のなめらかな変形に関して面積最小ではない. その一方で, もし (2.2) が体積保存かつ境界固定のなめらかな変形の任意の非自明な変分  $f_t$  に対して正の値をとるならば, 極小曲面あるいは CMC 曲面は (局所的には) 面積最小となる.

2.1 節の最初に説明された石鹸膜の 4 つの例は面積最小である極小曲面と CMC 曲面の例である. もしそれらが面積最小でなかったなら, 我々はそこでそれらを石鹸膜で構成することは決してできなかったであろう. しかしながら, これら 4 つの例すべてが, 面積最小であるような, より大きな CMC 曲面に拡張できるわけではない (たとえ CMC 曲面としての拡張が, 第 1 変分公式 (2.1) によって, 依然として面積の臨界であろうとも). 1 番目の例の平面円板は, 極小曲面である完備な平面に拡張できる. 完備な平面は次の意味で面積最小である. 任意のコンパクトな領域  $\Sigma$  は, その範囲内で, (コンパクトな領域の境界に関して) 面積最小であり, 針金の枠を境界にもつような石鹸膜として構成できる. とくに, (2.2) は, そのようなコンパクトな領域  $\Sigma$  の境界を固定した任意のなめらかな変分に対して, 常に正の値をとる. ところが 2 番目の例である球面は, すでに完備であるから拡張はできない.

3 番目と 4 番目の例では, それらは面積最小ではない曲面に拡張される. まずは 4 番目の例を考察しよう. 4 番目の例は円柱面であり, それは  $\mathbb{R}^3$  の等長変換によって移り合うものは同じだと見なせば唯一つに決まり,



$$f(u, v) = (r \cos u, r \sin u, rv),$$

$$(u, v) \in \Sigma = [0, 2\pi] \times [0, \frac{d}{r}] \subset \mathbb{R}^2, r, d \in \mathbb{R}^+$$

と表すことができる。これは半径が  $r$  の円柱面の一部であって、高さは  $d$  である。これの (2.2) における面積汎関数の 2 階微分は、 $d > 2\pi r$  であるときに限って、境界を固定した体積を保つある変分に対して負になる。その円柱面が、どうして  $d = 2\pi r$  を境として面積最小とならずに面積臨界にしかならないのかには理由がある。ここではその理由を十分には説明しないが、なぜそうなるのかについて 1 つのヒントを与えよう。関数

$$h = h(v) = \sin \frac{2\pi rv}{d}$$

を考えると、これは次のような性質をもつ:

- $h|_{v=0} = h|_{v=d/r} = 0$  (無限小の意味での「境界固定」性),
- $\int_0^{d/r} h dv = 0$  (無限小の意味での「体積保存」性),
- $\mu = \frac{4\pi^2 r^2 - d^2}{r^2 d^2}$  とおくと  $L(h) = \mu h$ .

このように、 $h$  は、固有値  $\mu$  をもつ作用素  $L$  の固有関数であり、 $d > 2\pi r$  のときにちょうど  $\mu < 0$  となる。したがって、関数  $h$  についての回転対称な変分 (つまり、 $t = 0$  における変分ベクトル場が  $h\vec{N}$  となる回転対称な変分である。ただしここで、 $\vec{N} = (\cos u, \sin u, 0)$  は  $f = f(u, v)$  の単位法線ベクトル) を選べば、第 2 変分公式 (2.2) における被積分関数は、 $d > 2\pi r$  のときに負になる。その結果、半径が  $r$  で高さが  $d > 2\pi r$  の円筒の管は物理的な膜としては構成できないのである。(半径  $r$ 、高さ  $d$  の円柱面に対し、 $d = 2\pi r$  の成立はその円柱面の円周の長さが高さが等しいことを意味している。)

2.1 節の石鹸膜の 3 番目の例は懸垂面である。懸垂面の生成曲線は双曲的余弦関数であるので、懸垂面は

$$f(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

$$(u, v) \in \Sigma = [0, 2\pi] \times [-d, d] \subset \mathbb{R}^2, d \in \mathbb{R}^+$$

のようにパラメータ表示できる。ここで  $2d$  は 2 つの境界となっている円の間の距離である。 $v \sinh v = \cosh v$  の唯一の正の解は  $d_0 \approx 1.2$  である。そのとき  $f$

は,  $d < d_0$  ならば面積最小となり,  $d > d_0$  ならば面積最小にならない (すなわち, 面積臨界のみ). それゆえに  $d$  の値を,  $d_0$  を超えて拡大させると, 懸垂面はもはや石鹸膜では構成できない. 実際に  $d > d_0$  の石鹸膜 (図 2.6 の右側) に起こるのであることは, 境界円を保っている限り, 曲面の内側は, 図 2.6 の左側に描かれている曲面を拡大した形に落ち着くまで外に向かって動くということである. そのような変形は面積を減少させる.

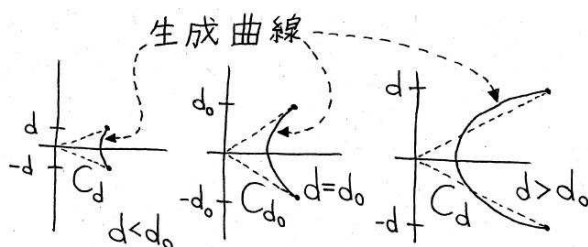


図 2.6 左, 真中, 右の生成曲線は, それぞれ, 安定, 弱安定, 不安定な懸垂面を作る.

懸垂面が面積最小にならない限界の値が, なぜちょうど  $d_0$  であるかの理由の厳密な説明は省略するが, ここでもそのヒントを与えておこう. 値  $d_0$  については, 次のような幾何学的解釈ができる. 各々の  $v > 0$  に対して, 円錐

$$C_v = \left\{ \left( x, y, \pm \frac{v}{\cosh v} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

を考えると, 円錐  $C_v$  は,  $v = d_0$  のとき, またそのときに限って, 懸垂面と接するように交わる.  $d < d_0$  の場合, 原点  $(0, 0, 0)$  を中心とする  $\mathbb{R}^3$  の任意の相似変換はその懸垂面を元の懸垂面と共通部分をもたない別の懸垂面に移す. 一方,  $d > d_0$  のときはそうではない. これらの事実は,  $f$  の境界を固定した変分  $f_t$  で, 2階微分が負であるものが存在するかという問題と関係している (懸垂面は極小曲面なので, ここでは「体積保存」性を必要としない).

### 2.3 アンビエント空間

曲面はつねに何かしらより大きなアンビエント空間の中に存在している. 2.1 節と 2.2 節で見た石鹸膜の例では, その CMC 曲面は 3 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内にあるものとしていた. しかし, 我々は CMC 曲面を  $\mathbb{R}^3$  以外の非ユークリッド空間の中でも考えることができる. 本節ではアンビエント空間として主に 3 次元双曲型空間について説明する. またこの節には,  $n+1$  次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{n,1}$  と 3 次元球面 (空間)  $\mathbb{S}^3$  も出てくるが, 読者はすでにある程度これらの空間に慣れ親しんでいるものとする.

#### 2.3.1 3 次元双曲型空間

3 次元双曲型空間とは一定の断面曲率  $-1$  をもつ単連結な 3 次元完備リーマン多様体のことである. それは様々なモデルによって表現される. 具体的には, ミンコフスキー空間モデル, ポアンカレ球モデル, エルミート行列モデル, クライン球モデル, 上半空間モデルなどである.

ローレンツ計量  $g_{\mathbb{R}^{3,1}}$  をもつ 4 次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{3,1}$  を用いて 3 次元双曲型空間のミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  を定義する. この場合, それは二葉双曲面の上側部分

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x_0^2 - \sum_{j=1}^3 x_j^2 = 1, x_0 > 0 \right\}$$

で, 計量  $g$  は  $g_{\mathbb{R}^{3,1}}$  の, 上で定義した集合への誘導計量 ( $g$  は  $g_{\mathbb{R}^{3,1}}$  のそこへの制限である) として定義される. これを 3 次元双曲型空間のミンコフスキーモデルと呼ぶ. 計量  $g_{\mathbb{R}^{3,1}}$  はローレンツ計量であるので正定値ではないが, 誘導計量  $g$  は正定値となる. したがって, このミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  はリーマン多様体である.

3 次元双曲型空間のミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  の等長変換群は, 行列群

$$O_+(3, 1) = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^4 \in O(3, 1) \mid a_{44} > 0\}$$

を用いて記述される. 与えられた  $A \in O_+(3, 1)$  について定まる写像  $\mathbb{R}^{3,1} \ni$

$\vec{x} \mapsto A\vec{x} \in \mathbb{R}^{3,1}$  は、ミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  を保つ  $\mathbb{R}^{3,1}$  の等長変換であり、したがってそれは 3 次元双曲型空間の等長変換である。さらに 3 次元双曲型空間のすべての等長変換はこのようにして得られることもわかる。次の補題は、ミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  が実際に 3 次元双曲型空間であることを示している。

**補題 2.1** ミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  は、一定の断面曲率  $-1$  をもつ単連結な 3 次元完備リーマン多様体である。  $\square$

[証明] ミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  が単連結であることは明らかであるので、まずはじめに断面曲率が恒等的に  $-1$  であることを確かめよう。

任意の点  $p = (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{H}^3$  に対して、 $x_0 = \cosh(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  とすると、 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sinh^2(s)$  であるから、

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh(s) \end{pmatrix}$$

となる行列  $A \in \text{SO}_3 = \text{O}(3) \cap \{A \in M_{3 \times 3} \mid \det A = +1\}$  が存在する。このとき、 $4 \times 4$  行列

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O_+(3, 1)$$

は  $\mathbb{H}^3$  を保ち、かつ  $p$  を点  $(0, 0, \sinh(s), \cosh(s))$  へ移す。そのとき行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(-s) & \sinh(-s) \\ 0 & 0 & \sinh(-s) & \cosh(-s) \end{pmatrix} \in O_+(3, 1)$$

は、 $\mathbb{H}^3$  を保ち、点  $(0, 0, \sinh(s), \cosh(s))$  を点  $(0, 0, 0, 1)$  へ移す  $\mathbb{R}^{3,1}$  の等長変換である。したがって、 $\mathbb{H}^3$  の任意の点を  $\mathbb{H}^3$  の等長変換で点  $(0, 0, 0, 1)$  に移すことができるのである。今、 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  を  $T_{(0,0,0,1)}(\mathbb{H}^3)$  の 2 次元部分空間とすると、 $d\psi_{(0,0,0,1)}(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$  となるような、 $(0, 0, 0, 1)$  を固定する  $\mathbb{H}^3$  の等長変換を表

す行列  $A \in O_+(3, 1)$  が存在する. それゆえ (例えば, [9] の補題 1.1.6 により), このモデルは一定の断面曲率をもつ. よって  $\mathbb{H}^3$  が一定の断面曲率  $-1$  をもつことを見るためには次のことだけ確かめればよい. それは  $-1$  が  $T_{(0,0,0,1)}(\mathbb{H}^3)$  の 1 つの固定された 2 次元部分空間の断面曲率の値となることである. この計算は読者に残しておこう (例えば, [9] の式 (1.1.10) や式 (1.1.14) を参照).

最後に  $\mathbb{H}^3$  が完備であることを示す.  $\mathbb{H}^3$  と平面  $\{x_1 = x_2 = 0\}$  の共通部分は,  $\alpha(s) = (0, 0, \sinh(s), \cosh(s))$  と表示される. このパラメータ  $s$  は  $\mathbb{H}^3$  の計量  $g$  に関して弧長である.  $\alpha(s)$  はすべての  $s \in \mathbb{R}$  に対して定義されているから, この曲線  $\alpha(s)$  は完備である. しかも,  $\mathbb{H}^3$  の任意の測地的線分はある等長変換によって,  $\alpha(s)$  の一部に移される. したがって, 任意の測地的線分が無限の長さの測地線へ延長されることがわかる. したがって  $\mathbb{H}^3$  は完備である. これで補題の証明が完了した. ■

以後, 3 次元双曲型空間とそのミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  について記号の混用を行う.

$\mathbb{H}^3$  の等長変換群は行列群  $O_+(3, 1)$  であるから, 測地線

$$\alpha(t) = (0, 0, \cosh t, \sinh t)$$

の等長変換による像は, 原点を含む  $\mathbb{R}^{3,1}$  の 2 次元平面に含まれている. したがって  $\mathbb{H}^3$  の任意の測地線 (の像) は,  $\mathbb{R}^{3,1}$  の原点  $(0, 0, 0, 0)$  を通る 2 次元平面と  $\mathbb{H}^3$  との交わりによって構成されるといえる.

ミンコフスキーモデルは,  $\mathbb{H}^3$  における等長変換や測地線を理解するための最良のモデルであろう. しかしながら, ミンコフスキーモデルは 4 次元空間  $\mathbb{R}^{3,1}$  にあるので,  $\mathbb{H}^3$  内の曲面のグラフィックスのためには使えない. したがって, 印刷されたページの上で見ることができる他のモデルも手にしたい. また,  $\mathbb{H}^3$  を表現するために  $2 \times 2$  行列を用いるモデルもほしい. これは DPW の方法に対して有用である (次の節を参照). これを踏まえて  $\mathbb{H}^3$  の他のモデルを与える.

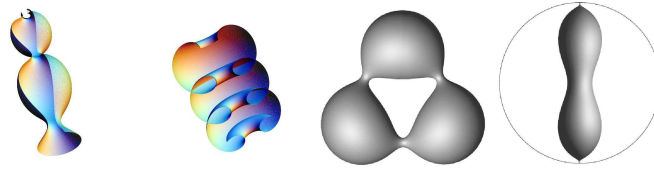


図 2.7 左の 2 つの曲面は、3 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内のデロネイ曲面であるアンデュロイド (unduloid) とノドイド (nodoid). これらは平均曲率一定の回転面であり、曲面内部を見せるために一部分が切り取られている (下瀬浩一によるグラフィック). また、3 次元球面  $S^3$  と 3 次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  内のデロネイ曲面が右に描かれている (N. Schmitt のソフトウェア CMCLab [21] で作られたグラフィック).  $S^3$  は  $\mathbb{R}^3$  への立体射影を用いて、 $\mathbb{H}^3$  はポアンカレ球モデルを用いて表されている.

### 2.3.2 クラインモデル

本節ではクラインモデルは使わないが、それは  $\mathbb{H}^3$  のよく知られたモデルであるので、ここで簡単に言及しておく.  $\mathcal{K}$  を、 $\mathbb{R}^{3,1}$  の超平面  $\{x_0 = 1\} (\approx \mathbb{R}^3)$  にある半径が 1 で中心が  $(0, 0, 0, 1)$  である 3 次元球とする. ミンコフスキーモデル  $\mathbb{H}^3$  を原点  $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{3,1}$  から  $\mathcal{K}$  へ立体射影することによって、 $\mathcal{K}$  は  $\mathbb{H}^3$  のクラインモデルとなる. クラインモデル  $\mathcal{K}$  にはこの立体射影を  $\mathbb{R}^{3,1}$  の等長写像にするような計量が与えられる. ミンコフスキーモデルにおける  $\mathbb{H}^3$  の測地線は原点を通る  $\mathbb{R}^{3,1}$  の 2 次元平面と  $\mathbb{H}^3$  との交わりによって構成されるので、 $\mathcal{K}$  への射影の後、クラインモデルにおける測地線は、(ユークリッド計量での) 直線となることは明らかであり、そしてこのことはクラインモデルの利点である. しかしながら、クラインモデルのデメリットはその計量がユークリッド計量と共形的 (conformal) でないことである. (ある計量がユークリッド計量と共形的であるとは、2 つのベクトルのなす角度、および 2 つのベクトルの長さの比が、ユークリッド計量の場合と変わらないということ.)

### 2.3.3 ポアンカレモデル

$\mathcal{P}$  を  $\mathbb{R}^{3,1}$  の超平面  $\{x_0 = 0\}$  にある, 半径が 1 で中心が  $(0, 0, 0, 1)$  である 3 次元球とする.  $\mathbb{H}^3$  のミンコフスキーモデルを点  $(0, 0, 0, -1) \in \mathbb{R}^{3,1}$  から  $\mathcal{P}$  へ立体射影することによって,  $\mathcal{P}$  は  $\mathbb{H}^3$  のポアンカレモデルとなる. この立体射影は

$$(2.3) \quad (x_1, x_2, x_3, x_0) \in \mathbb{H}^3 \rightarrow \left( \frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}, \frac{x_3}{1+x_0}, 0 \right) \in \mathcal{P}$$

である.  $\mathcal{P}$  にはこの立体射影を等長写像にするような計量が与えられる. このポアンカレモデルでは 4 番目の座標が自明に 0 であるから, それを取り除くことで, ポアンカレモデルを  $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$  内の単位球

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$$

と見なすことができ, その双曲計量  $g$  は

$$(2.4) \quad g = \left( \frac{2}{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

となる. この計量 (2.4) に関して, 立体射影 (2.3) は等長写像であり, それゆえ断面曲率は依然として  $-1$  である. (2.4) の計量  $g$  はユークリッド計量  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  の関数倍である. このことはポアンカレモデルの計量がユークリッド計量と共形的であることを意味している. したがって, 2つのベクトルのなす角度が双曲計量の場合とユークリッド計量の場合双方で同じになる. そしてこのことが, 3次元双曲型空間内の曲面のグラフィックスを描く際にポアンカレモデルが重宝される理由である. ところが, その距離は明らかにユークリッドの距離ではない. 実は, ポアンカレモデルの境界

$$\partial B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

は, (2.4) の双曲計量  $g$  に関して  $B^3$  のどの点からも無限に離れているのである. 例として, ポアンカレモデル内の曲線

$$c(t) = (t, 0, 0), \quad t \in [0, 1]$$

を考えよう. その長さは

$$\int_0^1 \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = \int_0^1 \frac{2dt}{1-t^2} = +\infty$$

となる. つまりポアンカレモデルにおいては, 境界の点  $(1, 0, 0)$  は点  $(0, 0, 0)$  から無限に離れているのである. この理由から, 境界  $\partial B^3$  はしばしば  $B^3$  の無限遠理想境界と呼ばれる.

クラインモデルとは違い, ポアンカレモデルの測地線は (ユークリッド計量の) 直線ではない. その代わりに, それらは理想境界  $\partial B^3$  と直交するような (ユークリッド計量の) 直線や円の一部となる.

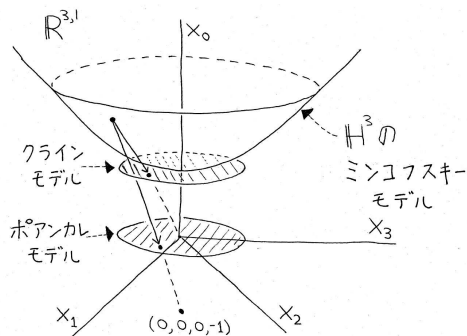


図 2.8  $\mathbb{H}^3$  のクラインモデル, ポアンカレモデル, ミンコフスキーモデル.

注意  $\mathbb{H}^3$  のモデルとしては上半空間モデルやエルミート行列モデルもあるが, この章では触れない.

図 2.7, 図 2.9, 図 2.10, 図 2.12 では, いろいろなアンビエント空間内の曲面が描かれている.

## 2.4 1950年代以降の CMC 曲面の研究

$\Sigma$  を 2 次元多様体とする. はめ込み  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  の臍点 (せいてん) とは, 2 つの主曲率が等しい点のことである. 直感的には, 臍点とは「あらゆる方向に曲





図 2.9 極大曲面, すなわち, 3次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の  $H = 0$  である空間的曲面 (spacelike surface). 左側は, 極大懸垂面と呼ばれる回転面. 真中の曲面は極大螺旋面で, これは3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の極小螺旋面の像に含まれている. 右側は極大エネパー型曲面で,  $\mathbb{R}^3$  内の極小エネパー曲面と対応している. これらの曲面はすべて, 小林治[16]の表現公式を用いて構成できる.

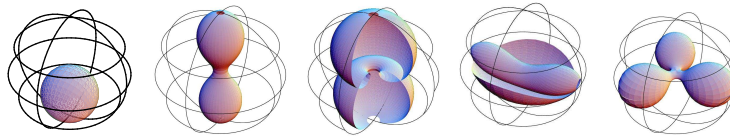


図 2.10 3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  内の, ポアンカレ球モデルによって表された,  $H = 1$  である CMC 曲面. 左から horosphere, 2つの異なる catenoid cousins (回転面), エネパー cousin, trinoid cousin.

がり具合が同じ点」のことである。

よって、例えば、平面や球面の任意の点は臍点であり、円柱面は臍点をもたない。懸垂面もまた臍点をもたないことが確かめられる。

全ての点が臍点であるとき、その曲面は全臍的であるという。このとき、そのような曲面は球面か平面になる。次の事実は、例えば[23]で証明されている。

**補題 2.2**  $\Sigma$  を 2 次元多様体とし、 $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  を全臍的なはめ込みとする。このとき、 $f(\Sigma)$  は平面の一部かまたは球面の一部である。  $\square$

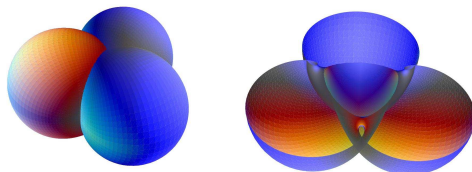


図 2.11 (CMC) Wente トーラスと、その半分をカットした曲面  
(下瀬浩一によるグラフィック)。

$\Sigma$  が向き付け可能で、閉曲面 (すなわちコンパクトで境界のない曲面) である場合、さらに議論を進めることができる。向き付け可能な閉曲面は種数によって分類される。例えば、 $\Sigma$  が球面ならばその種数は 0 で、トーラスならば種数は 1 となる。以後、 $\Sigma$  は向き付け可能な閉曲面とし、その種数を  $g$  とする。

次はホップの有名な定理である[12]:

**定理 2.3 (ホップの定理)**  $\Sigma$  が種数 0 の閉 2 次元多様体であり、 $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  が (極小ではない) CMC はめ込みであるならば、 $f(\Sigma)$  は球面である。  $\square$

**注意** 実は  $\mathbb{R}^3$  内で境界のないコンパクトな極小曲面というのは存在しない。したがって、上の定理は、実は  $f$  が極小でないという仮定はなくても成立する。

$\Sigma$  が  $g \geq 1$  の向き付け可能な閉曲面で、 $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  が共形的で CMC はめ込みの場合を考えよう (上の注意から、 $f$  は極小曲面ではない)。この場合、 $f(\Sigma)$  はもちろん球面ではない。このとき、曲面上にはちょうど  $4g - 4$  個の臍点が存在することが示されて、次がいえる。

系 2.4  $\mathbb{R}^3$  内の種数 1 の CMC 閉曲面は臍点をもたず,  $\mathbb{R}^3$  内の種数が 1 より大きい閉じた CMC 曲面は臍点をもつ.  $\square$

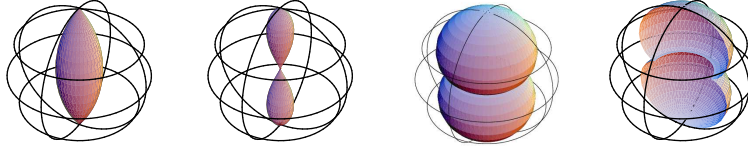


図 2.12  $\mathbb{H}^3$  内の平坦 (ガウス曲率が 0) な回転面 (清水弘也によるグラフィック).

ホップの定理によると,  $\mathbb{R}^3$  内の任意の種数 0 の CMC 閉曲面は球面に他ならない. さらにホップは, 曲面の種数に関する仮定をなくして, 任意の閉じた CMC 曲面が球面になるかを問うた. つまり彼は  $\mathbb{R}^3$  内の任意種数の閉じた CMC 曲面は種数 0 すなわち球面になるであろうと予想したのである.

この予想が正しいであろうと考えられる 1 つの根拠として, CMC 曲面に対する最大値原理があった. この原理は  $\mathbb{R}^3$  内の任意の埋め込まれた CMC 閉曲面が球面になることを示すための方法を与えるものである. この原理を用いると, CMC 閉曲面が種数 0 である, または埋め込みであるならば, それは球面になることがわかる.

それゆえにホップの予想に反例があるとすれば, その曲面は, 正の種数を持ち, かつ埋め込みではない必要がある. 1986 年, H. Wente [25] は種数 1 の曲面でそのような反例を発表した. ホップ予想が成立しないというこの発見は, CMC 曲面の研究が進展する上での強力な追い風となった. Wente の発見に続いて, 1987 年に U. Abresch [1] が, 連続的な平面曲率線の族をもつ CMC 閉曲面に対して, 楕円関数を用いた, より具体的なパラメータ表示を与えた. (曲面における曲率線とは, 速度ベクトルが主曲率の方向を向くような曲面上の曲線のことであり, 平面曲線とは,  $\mathbb{R}^3$  のある平面に乗っているような曲線のことである.) R. Walter [24] (同じく 1987 年に発表) は, Jacobi の sn, cn 関数と呼ばれる楕円関数を用いることで, Abresch が与えたパラメータ表示よりもさらに具体

的な表示を発見した. この Walter のパラメータ表示は, 曲率線のすべてが平面に入っているならば, それに直交する曲率線は球面に入っているという事実を用いることによって発見された. その結果ついに, J. Spruck [22] は, 1988 年, Abresch と Walter によって考えられた CMC トーラスは, 実は Wente が先に見つけていた曲面に他ならないことを示した.

上で述べた業績と 1960 年代以来の可積分系の理論の発展は, 次の 2 つを認識するための手助けとなった. 1 つは, CMC トーラスは可積分系の理論の技法を使って研究できるという事実であり, 2 つ目は, CMC トーラスは, それらが「有限型」であるという意味で, 特別な CMC 曲面であるという認識である. このことは, 1989 年から 1991 年にかけての U. Pinkall と I. Sterling [19], および A. Bobenko [3] の仕事で示されている. さらに, それらの研究において  $\mathbb{R}^3$  内のすべての CMC トーラスが分類された. また, N. Kapouleas は 1991 年と 1995 年に, 任意の種数  $g(> 1)$  に対して, 閉じた CMC 曲面を構成している [13], [14]. しかし Kapouleas が用いたのは, 可積分系の理論とはかなり異なる解析的手法であった. その方面における更なる発展が最近 Kusner, Mazzeo, Pacard, Pollack, Ratzkin によって得られている.

Bobenko の仕事で用いられた可積分系の方法では, 対象となる CMC 曲面の研究を  $2 \times 2$  行列の言葉に換えることができた. Dorfmeister, Pedit, Wu らが, 1998 年に出版された論文 [5] において, 後に DPW の方法と呼ばれる手法を開発する際にも同様のアプローチがなされた.  $2 \times 2$  行列の使用は,  $\mathbb{R}^3$  の古典的な微分幾何学の観点からはあまり自然なもののように思われぬが, 一方で, 可積分系の立場から見ればそれは非常に自然であり, DPW の方法を展開するには確かに便利である.

$2 \times 2$  行列を用いたとき, DPW の方法の背後には, 岩澤分解と呼ばれる行列の分解を用いる考え方がある. 実際,  $S^1$  から  $2 \times 2$  行列への写像に (正則データを使い) 岩澤分解を適用することにより, 必要とされる方程式とその解を見つけるのである. このアイデアは, (もっと以前からあったかもしれないが) 少なくとも I. M. Kričevič [18] (1980) まで遡る. J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu は, そのアイデアを広く適用して CMC 曲面を構成した [5].

## 2.5 5次元ミンコフスキー空間と曲面理論

この節では, 5次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  を用いて 3次元空間形を記述する. この方法は, 異なる 3次元空間形内の曲面を統一的に記述するのに有効である. この節は前の 4つの節よりも専門的な内容を含んでいる.

### 2.5.1 5次元ミンコフスキー空間

5次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  を得るために次のような  $2 \times 2$  行列の集合を考える.  $H$  を 4元数体とする.  $\text{Im } H$  を 4元数体  $H$  の虚数部分とし,

$$\mathbb{R}^{4,1} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & x_\infty \\ x_0 & -x \end{pmatrix} \mid x \in \text{Im } H, x_0, x_\infty \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく.  $X, Y \in \mathbb{R}^{4,1}$  に対し

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{4} \cdot \text{tr}(XY + YX)$$

と定義する. ここで  $I$  は 2次の単位行列である. このとき  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbb{R}^{4,1}$  上, 符号  $(+, +, +, +, -)$  の計量となり, この計量に関して

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は  $\mathbb{R}^{4,1}$  の正規直交基底となる. ただし, 上で  $1, i, j, k$  は  $H$  の基底とする.  $x_4 = \frac{1}{2}(x_\infty - x_0)$ ,  $x_5 = \frac{1}{2}(x_\infty + x_0)$  と置けば,  $X =$

$$x_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける. ここで  $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$  であり, 対応  $X \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  によって,  $\mathbb{R}^{4,1}$  は 5次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^5$  と同一視され, ノルムとして

$$\|\xi\| = \text{sgn}(\delta) \sqrt{|\delta|}, \delta = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$$

を考える. また 4次元の光円錐は

$$L^4 = \{X \in \mathbb{R}^{4,1} \mid \|X\| = 0\}$$

となる。さて、3次元の空間形を次のように構成できる：零ベクトルでない任意の  $Q \in \mathbb{R}^{4,1}$  に対して、1つの空間形  $M$  を  $M = L^4 \cap \{X \mid \langle X, Q \rangle = -1\}$  で定めよう。 $M$  は  $Q^2 = \kappa \cdot I$  となるどんな  $Q$  に対しても一定の断面曲率  $\kappa$  をもつので、

$$(2.5) \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

と選べば任意の空間形を得ることができるのである（証明は後述）。このとき、 $x$  の長さを調節し、さらに  $\text{Im } H \cup \{\infty\}$  を  $\text{Im } H$  の1点コンパクト化とすれば、

$$\begin{aligned} M &= \left\{ X = \frac{2}{1 - \kappa x^2} \cdot \begin{pmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \mid x = \right. \\ &= \left. x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \text{Im } H \cup \{\infty\}, x^2 \neq \kappa^{-1} \right\} \end{aligned}$$

と書け、これは  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq -\kappa^{-1}\}$  と同一視される。ここで  $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \text{Im } H \cup \{\infty\}$  である。 $\kappa < 0$  のとき、 $M$  は断面曲率  $\kappa$  をもつ3次元双曲型空間の2つのコピーになることに注意する。なお、以下の性質にも注目しておこう：

$$1 - \kappa x^2 \text{ は } M \text{ 内の点に対して決して } 0 \text{ にはならない。}$$

$M$  は、光円錐  $L^4$  を定義している2次方程式と超平面を定めている線型方程式によって決定されるので、2次曲線と呼ばれる。

我々は  $Q$  をいつでも (2.5) のようにとるので、 $Q$  によって決まる  $M$  を  $M_\kappa$  と表すことにしよう。

射影的光円錐  $PL^4$  の元

$$\alpha \begin{pmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

が与えられたとき、空間形  $M_\kappa$  での点を得るために一意的に  $M_\kappa$  へ射影することができるので、ときとして我々は  $\alpha$  を無視したり、あるいは  $\alpha$  を自由に選ぶことができる。

$X = \frac{2}{1 - \kappa x^2} \cdot \begin{pmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \in M_\kappa$  における接空間  $T_X M_\kappa$  は,  $a \in \text{Im } H$  に対して,

$$T_X M_\kappa = \left\{ \mathcal{T}_a = \frac{2}{(1 - \kappa x^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} a + \kappa x a x & -x a - a x \\ \kappa(x a + a x) & -a - \kappa x a x \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられる.  $X = X(t) = \frac{2}{1 - \kappa x(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} x(t) & -x(t)^2 \\ 1 & -x(t) \end{pmatrix} \in M_\kappa$  を実変数  $t$  のなめらかな曲線とし,  $\prime$  で  $t$  についての微分を表すとすると,

$$X' = \mathcal{T}_{x'}$$

である. 計算により

$$(2.6) \quad \langle \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b \rangle = \frac{-4}{(1 - \kappa x^2)^2} \text{Re}(ab),$$

$$\|\mathcal{T}_a\| = 1 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{2}|1 - \kappa x^2|$$

がわかる. また,

$$(2.7) \quad X'' = \mathcal{T}_{\frac{2\kappa(xx' + x'x)}{1 - \kappa x^2} \cdot x' + x''} + \frac{4(x')^2}{(1 - \kappa x^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \kappa x & -1 \\ \kappa & -\kappa x \end{pmatrix}$$

もわかる.  $X''$  は一般には  $T_X M_\kappa$  に含まれないことに注意する.

(2.6) から次の補題がしたがう.

**補題 2.5** (2.5) の  $Q$  によって定められた  $M$  は一定な断面曲率  $\kappa$  をもつ.  $\square$

さまざまな  $\kappa$  に対する (2.5) における  $Q$  の選択によって, いろいろな  $M$  が決まるわけであるが, それらはすべて共形的であることが (2.6) からわかる. 実際, 写像  $M \ni X \rightarrow x \in \text{Im } H \approx \mathbb{R}^3$  は  $\kappa \neq 0$  のとき立体射影である. (図 2.14 を参照.)

## 2.5.2 空間形内の曲面

空間形  $M_\kappa$  内の曲面  $x$  を考える. そのパラメータ表示を

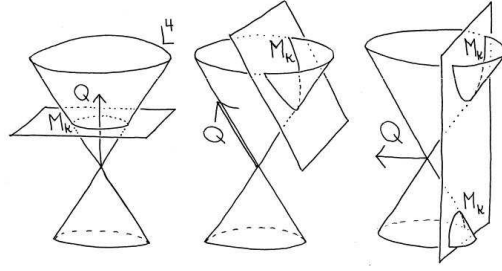


図 2.13  $\kappa$  の 3 つの選び方 ( $\kappa > 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\kappa < 0$ ) に対し, それぞれ空間形  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  (の 2 つのコピー) が与えられる.

$$x = x_1(u, v)i + x_2(u, v)j + x_3(u, v)k$$

としよう.  $(u, v)$  は等温座標, かつ, 曲率線座標であると仮定する (すべての CMC 曲面に対してこのような座標がとれる). このような座標を双等温 (共形曲率線) 座標と呼ぶ.

$x_1, x_2, x_3$  は, 空間形  $M_\kappa$  とは異なる空間形  $M_\mu$  内においても曲面  $x$  のパラメータ表示を与えることに注意しておく.

$n$  を  $M_\kappa$  における  $x$  の単位法線ベクトルとする.  $n_0$  は 3 次元ユークリッド空間  $M_0$  における  $x$  の単位法線ベクトルである. 平均曲率が空間形の選び方に依存していることを示すために, 空間形  $M_\kappa$  における曲面  $X$  の平均曲率を  $H_\kappa$  と書く.  $H_0$  は 3 次元ユークリッド空間形  $M_0$  の場合の平均曲率である.

補題 2.6 (2.5) の  $Q$  によって与えられた空間形  $M_\kappa$  に属する  $x$  の平均曲率  $H_\kappa$  は,  $\Delta x = \partial_u \partial_u x + \partial_v \partial_v x$  としたとき,

$$\begin{aligned} H_\kappa &= \frac{-1}{2} |x_u|^{-2} \operatorname{Re}\{\Delta x \cdot n\} - \frac{\kappa}{1 - \kappa x^2} (xn + nx) \\ &= \frac{-1}{2} (1 - \kappa x^2) |x_u|^{-2} \operatorname{Re}\{\Delta x \cdot n_0\} - \kappa (xn_0 + n_0x) \\ &= (1 - \kappa x^2) H_0 - \kappa (xn_0 + n_0x) \end{aligned}$$

となる. もし  $H_\kappa$  が一定ならば  $\partial_u H_\kappa = \partial_v H_\kappa = 0$  であり, これは

$$(\partial_u H_0) \cdot (1 - \kappa x^2) = \kappa \frac{k_2 - k_1}{2} \partial_u (x^2),$$



$$(\partial_v H_0) \cdot (1 - \kappa x^2) = \kappa \frac{k_1 - k_2}{2} \partial_v(x^2)$$

と同値である. ここで  $k_j \in \mathbb{R}$  は 3 次元ユークリッド空間形  $M_0$  における曲面の主曲率であり,  $\partial_u n_0 = -k_1 \partial_u x$ ,  $\partial_v n_0 = -k_2 \partial_v x$  をみたく.  $\square$

[証明]  $X$  における曲面の単位法線ベクトルは  $\mathcal{T}_n$  で与えられる. ここで  $n = (1 - \kappa x^2)n_0$  であり,

$$n_0 = \frac{(x_{2u}x_{3v} - x_{3u}x_{2v})i + (x_{3u}x_{1v} - x_{1u}x_{3v})j + (x_{1u}x_{2v} - x_{2u}x_{1v})k}{2\sqrt{(x_{2u}x_{3v} - x_{3u}x_{2v})^2 + (x_{3u}x_{1v} - x_{1u}x_{3v})^2 + (x_{1u}x_{2v} - x_{2u}x_{1v})^2}}$$

と書ける. ただし,  $x_{1u}$  は  $\frac{d}{du}(x_1)$  を表し, 他の記号も同様である. 曲面の第 1 基本量  $(g_{ij})$  は,  $\langle \mathcal{T}_{x_u}, \mathcal{T}_{x_v} \rangle = 0 = g_{12} = g_{21}$  と

$$g_{11} = \langle \mathcal{T}_{x_u}, \mathcal{T}_{x_u} \rangle = \frac{4|x_u|^2}{(1 - \kappa x^2)^2} = \frac{4|x_v|^2}{(1 - \kappa x^2)^2} = \langle \mathcal{T}_{x_v}, \mathcal{T}_{x_v} \rangle = g_{22}$$

をみたく. 今, (2.7) において, 記号 ' が  $\partial_u$  (あるいは  $\partial_v$ ) を表すと考え, それを用いると, 次の式を得る.

$$\begin{aligned} b_{11} &= \langle X_{uu}^T, \mathcal{T}_n \rangle = \langle X_{uu}, \mathcal{T}_n \rangle = \\ &= \frac{-4}{(1 - \kappa x^2)^2} \operatorname{Re}\{x_{uu} \cdot n\} + \frac{4\kappa x_u^2}{(1 - \kappa x^2)^3} (xn + nx), \\ b_{12} &= b_{21} = \langle X_{uv}^T, \mathcal{T}_n \rangle = \langle X_{uv}, \mathcal{T}_n \rangle = 0, \\ b_{22} &= \langle X_{vv}^T, \mathcal{T}_n \rangle = \langle X_{vv}, \mathcal{T}_n \rangle = \\ &= \frac{-4}{(1 - \kappa x^2)^2} \operatorname{Re}\{x_{vv} \cdot n\} + \frac{4\kappa x_v^2}{(1 - \kappa x^2)^3} (xn + nx). \end{aligned}$$

ただし, ここでの上付き記号「 $T$ 」はベクトルの  $T_X M$  への射影を表しているとする. 最後に  $H_0 = (k_1 + k_2)/2$  から結論がしたがう.  $\blacksquare$

注意 トムゼンは 1920 年代に, ある空間形内の双等温座標のとれるウィルモア曲面  $x$  (すなわち汎関数  $\int (H^2 - K)dA$  に関して臨界な曲面) に対して, ある  $Q \in \mathbb{R}^{4,1}$  が存在して, その  $Q$  が定める空間形の中で  $x$  が極小曲面になることを証明した. (ブラシュケのテキスト[2]の第 3 巻を参照.)

### 2.5.3 球面

任意の空間形  $M_\kappa$  内において, 球面とは, ある定数  $C_0 \in \text{Im}H$  に対して  $|x - C_0|$  が一定となる曲面のことである.  $\kappa = 0$  の場合, もし球面が半径  $r_0$  をもつならば, そのとき  $r_0 H_0 = 1$  となる. したがって, 球面はある定数  $C_0$  について  $x = (-1/H_0)n_0 + C_0$  のように表すことができる. このとき, 方程式  $H_\kappa = (1 - \kappa x^2)H_0 - \kappa(xn_0 + n_0x)$  から次の公式が導かれる.

$$(2.8) \quad H_\kappa = H_0 - \frac{\kappa}{4H_0} - H_0\kappa C_0^2.$$

この方程式は, 1つの球面の, いろいろな空間形  $M_\kappa$  内における平均曲率の間の関係を述べたものに他ならない.

$\mathbb{R}^{4,1}$  の1点

$$S = \begin{pmatrix} z & z_\infty \\ z_0 & -z \end{pmatrix}$$

が正の長さ

$$\|S\| = \sqrt{-z^2 - z_0 z_\infty} > 0$$

をもつとき,  $S$  は空間形  $M_\kappa$  内の1つの球面  $\tilde{S}$  を定める (図 2.14 を見よ):

$$(2.9) \quad \tilde{S} = \{Y \in M_\kappa \mid \langle Y, S \rangle = 0\}.$$

$Y \in \tilde{S}$  であることは  $Y$  が  $S - Y$  に直交することを意味しているので,  $S$  から射影的光円錐  $PL^4$  への接円錐を考えたとき,  $\tilde{S}$  は次の図で描かれているものになる.

今, 我々は空間形内の点と球面の双方が1つの空間  $\mathbb{R}^{4,1}$  の点としてどのように表されるかという, 興味深い性質を見ているのである. こういったことはメビウス幾何学の考え方である.  $\tilde{S}$  は  $S$  のスカラー倍で不変であり, また, もし  $S$  が  $z_0 = -z_\infty$  をみたすならば,  $\tilde{S}$  は  $M_1 = \mathbb{S}^3$  における1つの大球になることに注意しておく. また,  $\|S\| = 0$  ならば  $S$  は  $\mathbb{S}^3$  内の1点となり,  $\tilde{S}$  は単なる  $S$  の実スカラー倍となるので, 結局  $\tilde{S}$  は同じ点  $S$  を与えることにも注意してほしい.

$S$  から時間軸  $\{(0, 0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  へ水平な線分  $l$  をとる. このとき  $m =$

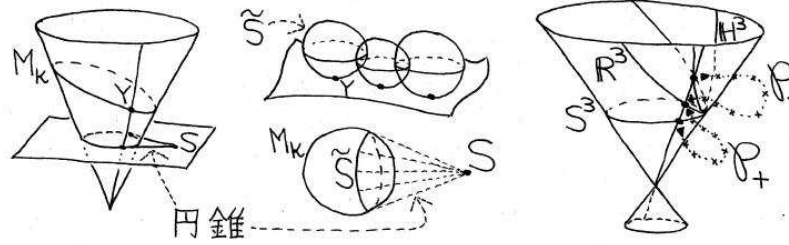


図 2.14 左側の図は, 球面の  $\mathbb{R}^{4,1}$  モデルにおける対応が描かれている. 中央の図の上側は,  $\tilde{S}$  の包絡面. 右側の図においては,  $p_+$  と  $p_-$  が, それぞれ  $\mathbb{S}^3$  と  $\mathbb{H}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への共形写像であり, これは  $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$  がメビウス同値であることを意味している.

$\ell \cap L^4$  は 1 つの点となり, それは, 射影的光円錐  $PL^4$  の元と見なすと, 空間形  $M_1 = \mathbb{S}^3$  において  $\tilde{S}$  の中心を与える.

**補題 2.7**  $\tilde{S}_1$  と  $\tilde{S}_2$  をそれぞれ  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  から生成される  $\mathbb{S}^3$  内の 2 つの交わる球面とし, さらに  $\|\mathcal{S}_1\| = \|\mathcal{S}_2\| = 1$  を仮定する.  $\alpha$  を  $\tilde{S}_1$  と  $\tilde{S}_2$  の交わる角度とすれば,  $\cos \alpha = \pm \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$  である. ここで右辺の符号は  $\mathcal{S}_1$  と  $\mathcal{S}_2$  の向きによって定まる.  $\square$

[証明]  $\kappa = 1$  のとき, 任意の  $p \in \mathbb{S}^3 = M_1$  の  $x_5$  座標は 1 に等しい.  $p \in \tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 \subset M_1$  とすると,  $x_5(p) = 1$ .  $\mathcal{S}_1$  と  $\mathcal{S}_2$  を  $x_5(\mathcal{S}_1) = x_5(\mathcal{S}_2) = 1$  となるように長さ調節する. すると  $\mathcal{S}_1 - p$  と  $\mathcal{S}_2 - p$  はそれぞれ  $\tilde{S}_1$  と  $\tilde{S}_2$  の  $p$  における ( $\mathbb{S}^3$  の接空間での) 単位法線ベクトルである. よって

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left\langle \frac{\mathcal{S}_1 - p}{\|\mathcal{S}_1 - p\|}, \frac{\mathcal{S}_2 - p}{\|\mathcal{S}_2 - p\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{S}_1 - p\|} \frac{1}{\|\mathcal{S}_2 - p\|} (\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle - \langle \mathcal{S}_2, p \rangle - \langle \mathcal{S}_1, p \rangle + \langle p, p \rangle) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{S}_1 - p\|} \frac{1}{\|\mathcal{S}_2 - p\|} (\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle - 0 - 0 + 0) = \frac{1}{\|\mathcal{S}_1\|} \frac{1}{\|\mathcal{S}_2\|} \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle. \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_1$  と  $\mathcal{S}_2$  の長さを  $\|\mathcal{S}_1\| = \|\mathcal{S}_2\| = 1$  なるように正規化すれば, 補題が示される.  $\blacksquare$

注意 補題 2.7 は,  $\mathcal{S}$  が  $Y \in M_\kappa$  を含む球面  $\tilde{\mathcal{S}}$  を与えるとき,  $\{\mathcal{S} + tY \mid t \in \mathbb{R}\}$  が  $Y$  における球面の束を与えることを意味している.

補題 2.8  $\tilde{\mathcal{S}}$  に関する反転は, 写像  $f: p \rightarrow p - 2\langle p, \mathcal{S} \rangle \mathcal{S}$  で与えられる.  $\square$

[証明]  $C$  を  $\tilde{\mathcal{S}}$  と垂直に交わる 1 つの円とする.  $p \in C$  のとき  $f(p) \in C$  であることを示したい. ある球面  $\tilde{\mathcal{S}}_1$  と  $\tilde{\mathcal{S}}_2$  に対して,  $C = \tilde{\mathcal{S}}_1 \cap \tilde{\mathcal{S}}_2$  であることに注意する. このとき  $\tilde{\mathcal{S}}_1 \perp \tilde{\mathcal{S}}$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_2 \perp \tilde{\mathcal{S}}$  であるから, 前の補題によって,  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}_1 \rangle = \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}_2 \rangle = 0$ . このとき  $p \in C$  は  $p \in \tilde{\mathcal{S}}_1 \cap \tilde{\mathcal{S}}_2$  であることを意味し,  $\langle p, \mathcal{S}_1 \rangle = \langle p, \mathcal{S}_2 \rangle = 0$  となる. したがって,  $\langle p - \langle p, \mathcal{S} \rangle \mathcal{S}, \mathcal{S}_1 \rangle = \langle p - \langle p, \mathcal{S} \rangle \mathcal{S}, \mathcal{S}_2 \rangle = 0$  となり,  $f(p) \in C$ .  $\blacksquare$

ここでの話題のさらなる説明については, [10] を見てほしい.

補題 2.9  $\tilde{\mathcal{S}}$  は  $M_0$  内で,

$$\text{平均曲率が } \frac{|z_0|}{2\|\mathcal{S}\|} \text{ で, 中心が } \frac{z}{z_0}$$

の球面であり,  $M_\kappa$  内では平均曲率  $H_\kappa$  をもつ球面である. ただし  $H_\kappa$  は式 (2.8) で与えられる.  $\square$

[証明]  $z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$  とし,  $\kappa = 0$  の場合を考える.

$$Y = 2 \begin{pmatrix} y & -y^2 \\ 1 & -y \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{S}}$$

をとると,  $YS + SY = 0$  は

$$\sum_{j=1}^3 (z_0 y_j - z_j)^2 = \|\mathcal{S}\|^2$$

を意味している. よって  $\tilde{\mathcal{S}}$  は半径  $2\|\mathcal{S}\|/|z_0|$  の球面である. したがって  $H_0 = |z_0|/(2\|\mathcal{S}\|)$ .  $\blacksquare$

#### 2.5.4 クリストッフエル変換

ここでは, 臍点をもたない曲面  $x$  のクリストッフエル変換  $x^*$  を定義する. クリストッフエル変換は  $\mathbb{R}^3$  内のある種の CMC 曲面に対してそれと平行な CMC

曲面を与える. 今,  $x$  を平均曲率  $H_0$  と単位法線ベクトル  $n_0$  をもつ  $\mathbb{R}^3$  内の曲面とする. クリストッフエル変換  $x^*$  とは次をみたす変換として定義される:

- $x^*$  は  $x$  と同じ領域で定義されている,
- $x^*$  は  $x$  と共形的である,
- $x$  と  $x^*$  の向きは逆,
- $x$  と  $x^*$  は対応している点において平行な接平面をもつ.

このとき,  $x$  と  $x^*$  の対応する点での曲率方向はそれら自身また平行であることが確かめられる.

この定義は次の定義と同値であることがわかる. さらに, 定義の中の積分因子  $\rho$  の存在は双等温座標の存在と同値である. また,  $x^*$  は  $dx^* = x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv$  をみたしていることがわかるだろう.

**定義 2.10**  $\mathbb{R}^3$  内の臍点のない曲面  $x$  のクリストッフエル変換  $x^*$  は, 曲面  $x$  上のある 0 でない実数値関数  $\rho$  に対して,  $dx^* = \rho(dn_0 + H_0 dx)$  をみたすような曲面のことである (ここで  $x^*$  は, 平行移動と相似変換による違いを除いて一意的に定まる). □

**注意** クリストッフエル変換は, 「双対曲面」と呼ばれることもある. その意味で, クリストッフエル変換をとることは「双対化」と呼ばれる.

**注意** 上の定義において  $x$  が臍点をもつことは許されていない. 臍点では何かしらの問題が生じる可能性があるからである. とくに,  $x$  が球面 (全臍的) である場合は,  $dn_0 + H_0 dx = 0$  となり, クリストッフエル変換は定義できない.

**補題 2.11**  $x$  の臍点でないところでは, クリストッフエル変換  $x^*$  が存在することと  $x$  が双等温座標がとれることは同値である. □

[証明] はじめに,  $x$  が双等温座標がとれると仮定して  $x^*$  の存在を示す.

$x$  の双等温座標を  $u, v$  をとする. このとき, ある関数  $A, B$  に対して  $x_{uv} = Ax_u + Bx_v$  が成り立つ. 次に

$$d(x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv) = 16g_{11}^{-2}(x_u x_{uv} x_u + x_v x_{uv} x_v) du \wedge dv = 0$$

がいえる. これは,

$$dx^* = x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv$$

をみたま  $x^*$  が存在することを示している. また, 臍点でないことから  $b_{11} - b_{22} \neq 0$  なので,

$$dn_0 + H_0 dx = \frac{1}{8}(b_{11} - b_{22})(x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv)$$

は,  $x^*$  がクリストッフエル変換であることを示している.

次に,  $x^*$  の存在を仮定したときに  $x$  が双等温座標をもつことを示す.

任意の座標  $(u, v)$  に関して,  $x = x(u, v)$  のコダッチの方程式は

$$(b_{11})_v - (b_{12})_u = \Gamma_{12}^1 b_{11} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22},$$

$$(b_{12})_v - (b_{22})_u = \Gamma_{22}^1 b_{11} + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) b_{12} - \Gamma_{21}^2 b_{22}$$

となる (例えば, [12] の 97 ページ). ここでクリストッフエル記号は

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{hk} (\partial_{u_j} g_{ik} + \partial_{u_i} g_{jk} - \partial_{u_k} g_{ij})$$

であり,  $u_1 = u, u_2 = v$  としている.  $x$  は臍点をもたないので,  $u$  と  $v$  は  $x$  の曲率線座標であるとしてよい (例えば [23] の付録 B-5 を見よ). したがって,  $g_{12} = b_{12} = 0$  とできる. 以上のことから,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\partial_u g_{11}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial_v g_{22}}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial_v g_{11}}{2g_{22}},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial_u g_{22}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial_v g_{11}}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial_u g_{22}}{2g_{22}}$$

がわかる. 主曲率を  $k_j (j = 1, 2)$  と表すことで, コダッチの方程式は

$$(2.10) \quad 2(k_1)_v = \frac{\partial_v g_{11}}{g_{11}} \cdot (k_2 - k_1), \quad 2(k_2)_u = \frac{\partial_u g_{22}}{g_{22}} \cdot (k_1 - k_2)$$

と簡易化される. したがって,  $x^*$  が存在するので

$$d(\rho dn_0 + \rho H_0 dx) = 0$$

である. よって

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b_{11}}{g_{11}} - \frac{b_{22}}{g_{22}} \\ \frac{b_{22}}{g_{22}} - \frac{b_{11}}{g_{11}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \left( \frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}} \right)_v \\ \left( \frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}} \right)_u \end{pmatrix}$$

がわかる.  $\rho_{uv} = \rho_{vu}$  であるから,

$$\left( \frac{(k_2 + k_1)_v}{k_1 - k_2} \right)_u = \left( \frac{(k_1 + k_2)_u}{k_2 - k_1} \right)_v$$

となり, これより

$$\frac{2((k_1)_v)_u + ((k_2)_u)_v}{k_1 - k_2} + \frac{2((k_1)_v)(k_2 - k_1)_u + (k_2)_u(k_2 - k_1)_v}{(k_2 - k_1)^2} = 0$$

が成立する. 上式にコダッチの方程式 (2.10) を代入することで,

$$\left( \log \frac{g_{11}}{g_{22}} \right)_{uv} = 0$$

を得る. とくに,

$$(f_1(u))^2 g_{11} = (f_2(v))^2 g_{22}$$

となるような, それぞれ  $u$  と  $v$  のみに依存する正值関数  $f_1(u)$  と  $f_2(v)$  が存在する. ここで新たな曲率線座標  $\hat{u}$  と  $\hat{v}$  について  $u = u(\hat{u})$ ,  $v = v(\hat{v})$  と書くことによって,  $\hat{u}$  と  $\hat{v}$  での第 1 基本形式の成分  $\hat{g}_{ij}$ ,  $\hat{b}_{ij}$  に関して,  $\hat{g}_{12} = \hat{b}_{12} = 0$ ,  $\hat{g}_{11} = (u_{\hat{u}})^2 g_{11}$ ,  $\hat{g}_{22} = (v_{\hat{v}})^2 g_{22}$  が成り立つ.  $u_{\hat{u}} = f_1(u(\hat{u}))$  と  $v_{\hat{v}} = f_2(v(\hat{v}))$  が成り立つように  $\hat{u}$  と  $\hat{v}$  を選ぶことができるので, このとき  $\hat{g}_{11} = \hat{g}_{22}$  となり,  $\hat{u}, \hat{v}$  は双等温座標である. ■

**系 2.12** 臍点でないところでは, 双等温座標がとれる曲面  $x = x(u, v)$  の 1 つのクリストッフエル変換  $x^*$  を,  $dx^* = x_u^{-1} du - x_v^{-1} dv$  の解としてとることができる. □

$x$  の他のクリストッフエル変換を  $y^*$  とする.  $dy^* = \rho(dn_0 + H_0 dx)$  であるから,

$$0 = d^2 y^* = d\rho \wedge (dn_0 + H_0 dx) + \rho \cdot dH_0 \wedge dx$$

である. このことから,  $\rho_u, \rho_v$  は双等温座標  $(u, v)$  に関し,

$$(2.11) \quad \rho_u = -\frac{g_{11} \partial_u H_0}{g_{11} H_0 - b_{22}} \cdot \rho, \quad \rho_v = -\frac{g_{11} \partial_v H_0}{g_{11} H_0 - b_{11}} \cdot \rho$$

と与えられることがわかる. この方程式の組 (2.11) から,  $\rho$  は, ある 1 点において値が決まれば一意に定まることがわかる. したがってその解  $\rho$  は定数因子によるスカラー倍の違いを除いて一意的である. よって, クリストッフエル変換  $x^*$  と  $y^*$  は,  $\mathbb{R}^3$  の相似変換と平行移動によって移り合う. このことから一般性を失うことなく, 次のように  $x^*$  の再定義ができる.

**定義 2.13** 双等温座標  $(u, v)$  をもつ曲面  $x$  のクリストッフエル変換とは,  $dx^* = x_u^{-1}du - x_v^{-1}dv$  となる  $x^*$  のことである ( $\mathbb{R}^3$  において, 平行移動による違いを除いて一意的に定義される).  $\square$

**注意** 以下で見てとれるように, 定義 2.10 における関数  $\rho$  は一般的に,  $x^*$  の平均曲率の逆数の定スカラー倍である: 定義 2.13 に関して, クリストッフエル変換のクリストッフエル変換  $(x^*)^*$  は

$$\begin{aligned} d((x^*)^*) &= (x_u^*)^{-1}du - (x_v^*)^{-1}dv = (x_u^{-1})^{-1}du - (-x_v^{-1})^{-1}dv \\ &= x_u du + x_v dv = dx \end{aligned}$$

をみだす. よって  $(x^*)^*$  は, 定義 2.10 に関して, 平行移動と相似変換で元の曲面  $x$  になるべきである. したがって, 適当な長さ調節と平行移動によって,  $(x^*)^* = x$  としてよい. また,  $x$  の単位法線ベクトルを  $n$  とするならば, このとき  $x^*$  の単位法線ベクトルは  $-n$  である.

$$dx = d((x^*)^*) = \rho^*(dn_0^* + H_0^* dx^*) = \rho^*(-dn_0 + H_0^* \rho(dn_0 + H_0 dx))$$

だから

$$(1 - \rho\rho^* H_0 H_0^*) dx = (H_0^* \rho\rho^* - \rho^*) dn.$$

$dx$  と  $dn$  は隣点でないところで線型 (一次) 独立なので

$$\rho H_0^* = \rho^* H_0 = 1$$

がいえる.

**注意** 曲面  $x$  が,  $H_0$  が一定で双等温座標をもつとき, (2.11) の方程式は  $\rho$  が定数であることを示している. したがって, もし  $x^{\parallel} = x + H_0^{-1}n_0$  が平行 CMC 曲面ならば,  $x^*$  と  $x^{\parallel}$  は  $\mathbb{R}^3$  の相似変換と平行移動によって移り合う. よって, 最初に述べたように,  $x$  のクリストッフエル変換は,  $x$  に対する平行 CMC 曲面と本質的に同じである.



### 2.5.5 進んだ話題への注意

以下, 若干の注意を述べて, 本節を終わりとする. Burstall と Calderbank が示したように, 線型保存量という概念を用いることで, CMC 曲面を特徴付けることもできる. 彼らの結果は, 本質的には, ある空間形内の曲面  $x$  が CMC であることと  $x$  が線型保存量をもつことが同値であるということである. さらに, この線型保存量は, CMC 曲面  $x$  が球面の一部であるとき, またそのときに限り, 定数の保存量となる. また, こういった保存量の考え方を用いて, 「special surfaces」と呼ばれる, より一般的な曲面のクラスの研究が展開される. これは古典的な微分幾何学の結果と密接に関連している.

### 参考文献

- [1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. 374 (1987), 169–192.
- [2] W. Blaschke, *Vorlesungen uber Differentialgeometrie*, Volumes I-III, Verlag von Julius Springer, Berlin (1923, 1924).
- [3] A. I. Bobenko, *Constant mean curvature surfaces and integrable equations*, Russian Math. Surveys 46:4, 1–45 (1991).
- [4] A. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **16**, Oxford Univ. Press (1999), 3–58.
- [5] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. 6(4) (1998), 633–668.
- [6] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces, Second Edition*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer (1992).
- [7] R. Finn, *Eight remarkable properties of capillary surfaces*, Math. Intelligencer 24 (2002), no. 3, 21–33.
- [8] W. Fischer and E. Koch, *On 3-periodic minimal surfaces with noncubic symmetry*, Zeitschrift für Kristallographie 183 (1988), 129–152.
- [9] S. Fujimori, S.-P. Kobayashi and W. Rossman, *Loop group methods for*

- constant mean curvature surfaces*, Rokko Lecture Series 17 (2005).
- [10] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Möbius differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series 300, 2003.
- [11] D. Hoffman and W. H. Meeks III, *Minimal surfaces based on the catenoid*, Amer. Math. Monthly 97(8) (1990), 702-730.
- [12] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lect. Notes in Math. 1000, Springer, Berlin (1983).
- [13] N. Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*, J. Diff. Geom., 33, 1991, 683-715.
- [14] N. Kapouleas, *Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori*, Invent. Math. 119 (1995), 443-518.
- [15] 剣持勝衛, 『曲面論講義』, 培風館, 2000.
- [16] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$* , Tokyo J. Math. 6, no. 2 (1983), 297-309.
- [17] 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』, 裳華房, 1995.
- [18] I. M. Kričever, *An analogue of the d'Alembert formula for the equations of a principal chiral field and the sine-Gordon equation*, Soviet Math. Dokl. 22, 79-84 (1980).
- [19] U. Pinkall and I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Annals of Math. 130, 407-451 (1989).
- [20] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hoffer and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Inst. Press, 2007.
- [21] N. Schmitt, *CMCLab*, <http://www.gang.umass.edu/software> or <http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/>.
- [22] J. Spruck, *The elliptic sinh-Gordon equation and the construction of toroidal soap bubbles*, Lect. Notes in Math. 1340, Springer, Berlin (1988), 275-301.
- [23] 梅原雅顕・山田光太郎, 『曲線と曲面, 微分幾何的アプローチ』, 裳華房, 2002.
- [24] R. Walter, *Explicit examples to the H-problem of Heinz Hopf*, Geom. Dedicata 23 (1987), 187-213.
- [25] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H.Hopf*, Pac. J. Math.,

121 (1986), 193-243.

翻訳者: 木ノ下祐輔 (神戸大学、理学研究科)