

tk_hf.rr のアルゴリズム

Nobuki Takayama

2024.11.18, Revised 2025.11.01

misc-2025/10/hol-sum-prod/

1 tk_hf.rr の関数

```
T=tk_hf.pf_to_ode(P,X)
Assume dF/dX=P*F.
T[0] is an ODE satisfied by F[0].
example: tk_hf.pf_to_ode([[0,1],[x,0]],x);
```

```
T=tk_hf.pf_sum(P,Q)
Assume dF/dX=P*F and dG/dX=Q*G
It returns a system dH/dX=T*H satisfied by H=[F[0]+G[0],F,G]^T where computation is done in the rational Weyl algebra
example: T=tk_hf.pf_sum([[0,-1],[1,0]],[[0,1],[t,0]]);
ref: https://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Current/doc/other-docs/tk\_hol\_sum\_prod-ja.pdf
```

```
T=tk_hf.pf_prod(P,Q)
Assume dF/dX=P*F and dG/dX=Q*G
It returns a system dH/dX=T*H satisfied by H=[F[0]*G[0],...]^T where computation is done in the rational Weyl algebra
example: T=tk_hf.pf_prod([[0,-1],[1,0]],[[0,1],[t,0]]);
          where F=[cos(t),sin(t)] and G=[airyAi(t),diff(airyAi(t))]
ref: https://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Current/doc/other-docs/tk\_hol\_sum\_prod-ja.pdf
```

これらの関数は holonomic function (hf) の微分方程式に対してのみ有効であり, holonomic distribution の微分方程式に対しては使えない. なぜならすべての計算を rational Weyl algebra (有理式係数の微分作用素環) でおこなっているからである. holonomic distribution の微分方程式系についてはたとえば積の方程式を求めるには, たとえば D -加群の制限アルゴリズムを用いる必要がある.

2 例

$\cos(t)a(t)$ の満たすシステムを計算する. ここで $a(t)$ は Airy の微分方程式

$$a''(t) - ta(t) = 0$$

の解. $F = (\cos(t), \sin(t))^T$ が満たす方程式系 (Pfaffian equation) は

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F.$$

$G = (a, a')^T$ の満たす微分方程式系は

$$\frac{dG}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} G.$$

$H = (\cos(t)a(t), \cos(t)a'(t), \sin(t)a(t), \sin(t)a'(t))^T$ の満たす方程式系 $\frac{dH}{dt} = RH$ の R は

```
[2122] import("tk_hf_sum_prod.rr");
[2137] R=tk_hf.pf_sum([[0,-1],[1,0]], [[0,1],[t,0]]);
[ 0 0 -1 1 ]
[ 0 0 -1 0 ]
[ 0 1 0 0 ]
[ t -t 0 0 ]
```

により求まる. $\cos(t)a(t)$ の満たす 4 階単独高階系を求めるには以下のように入力すればよい.

```
[2140] T=tk_hf.pf_to_ode(R,t);
[((-c_0*t^2-2*c_0*t-c_0)*dt^4+(2*c_0*t+2*c_0)*dt^3+略,
 [[c_1,(-2*c_0*t-2*c_0)/(-t^3-2*t^2-t+2)], 略]]
[2141] nm(base_replace(T[0],[[c_0,1]]));
(-t^2-2*t-1)*dt^4+(2*t+2)*dt^3+(t^3+t^2-t-3)*dt^2+(2*t+2)*dt+t^3+2*t^2+t-2
```

以下はアルゴリズムの説明.

3 単独高階系への変換

F を縦ベクトル関数とする. P は x の有理式成分の正方行列. $\frac{dF}{dx} = PF$ を満たすとする. F の k 階微分を $F^{(k)}$ と書く. $P(0)$ を単位行列, $P(1) = P$ と置く.

$$F^{(0)} = P(0)F \quad (1)$$

$$F^{(1)} = P(1)F \quad (2)$$

$$(3)$$

である.

$$F^{(k)} = P(k)F \quad (4)$$

と書けるとしよう. この時

$$\begin{aligned} F^{(k+1)} &= \frac{dP(k)}{dx}F + P(k)F^{(1)} \\ &= \left(\frac{dP(k)}{dx} + P(k)P \right) F \end{aligned} \quad (5)$$

となるので, $P(k)$ を帰納的に定めていける. F の成分を $(f_1, f_2, \dots, f_r)^T$ とし, f_1 を f とも書く. 求める ODE を

$$\sum_{k=0}^r c_k f^{(k)} = 0$$

と置こう.

$$f^{(k)} = \sum_{j=1}^r P(k)_{1j} f_j$$

である. これを ODE に代入して f_j の係数をまとめると

$$\sum_{j=1}^r f_j \sum_{k=0}^r c_k P(k)_{1j}$$

c_k についての連立一次方程式系

$$\sum_{k=0}^r c_k P(k)_{1j}, \quad j = 1, \dots, r \quad (6)$$

を解いて ODE を求めるのが関数 `pf_to_ode`.

4 積の場合

f_i, g_j を t の解析関数とする. $F = (f_1, \dots, f_r)^T$, $G = (g_1, \dots, g_s)^T$ として, このベクトル値関数が常微分方程式

$$\frac{dF}{dt} = P(t)F, \quad \frac{dG}{dt} = Q(t)G$$

を満たすとする. ここで $P(t) = (p_{ij})$ は rational function 成分の $r \times r$ 行列, $Q(t) = (q_{ij})$ は rational function 成分の $s \times s$ 行列.

問: $f_1 g_1$ の満たす微分方程式を求めよ.

ベクトル値関数 $H = (f_1 g_1, \dots, f_k g_\ell, \dots, f_r g_s)^T$ を考える.

$$\frac{d(f_k g_\ell)}{dt} = f'_k g_\ell + f_k g'_\ell = \left(\sum_{i=1}^r p_{ki} f_i \right) g_\ell + f_k \left(\sum_{j=1}^s q_{\ell j} g_j \right) \quad (7)$$

なので $\frac{d(f_k g_\ell)}{dt}$ は $f_i g_j$ 達の rational function 係数の 1 次結合で書ける. つまり

$$\frac{d(f_k g_\ell)}{dt} = \sum_{i=1}^r p_{ki} f_i g_\ell + \sum_{j=1}^s q_{\ell j} f_k g_j \quad (8)$$

なので $\frac{dH}{dt} = R(t)H$ とすると R の $(k\ell, ij)$ 成分は¹

$$R_{k\ell, ij}(t) = \begin{cases} p_{ki} + q_{\ell j} & \text{if } k = i, \ell = j \\ q_{\ell j} & \text{if } k = i, \ell \neq j \\ p_{ki} & \text{if } k \neq i, \ell = j \\ 0 & \text{if } k \neq i, \ell \neq j \end{cases}. \quad (9)$$

以上の議論は Pfaffian 方程式でも同様.

例 1 $f_1 = \cos(t)$, $g_1 = \text{Ai}(t)$ (エアリ関数) の場合.

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F, \quad \frac{dG}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} G$$

の場合は $H = (f_1 g_1, f_1 g_2, f_2 g_1, f_2 g_2)^T$ とおくと

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

プログラムで書くと以下 (最新版の asir では “.” で始まる任意の文字数字列は変数).

```
def pf_prod(P,Q) {
  P=matrix_list_to_matrix(P);
  Q=matrix_list_to_matrix(Q);
  .r = size(P)[0];
  .s = size(Q)[0];
  R=newmat(.r*.s,.r*.s);
  for (K=0; K<.r; K++) for (L=0; L<.s; L++) {
    for (I=0; I<.r; I++) for (J=0; J<.s; J++) {
      if ((K==I) && (L==J)) {
        R[K*.s+L][I*.s+J]=P[K][I]+Q[L][J];
      }else if ((K==I) && (L!=J)) {
        R[K*.s+L][I*.s+J]=Q[L][J];
      }else if ((K!=I) && (L==J)) {
        R[K*.s+L][I*.s+J]=P[K][I];
      }else{
        R[K*.s+L][I*.s+J]=0;
      }
    }
  }
  return R;
}
T=pf_prod([[0,-1],[1,0]],[[0,1],[t,0]]);
end;;
```

¹4 つの index で成分が表せるので 4 階テンソルだがこれを行列に変換したものが R . プログラム参照.

出力 T で関数 f を定義して python で数値解析. $\cos(t)Ai(t)$ の値と比較 (図 1).

```
# cos(0)=1, cos'(0)=0
# Ai(0)=1/(3^(2/3)*gamma(2/3)), Ai'(0)=-1/(3^(1/3)*gamma(1/3))
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special
from scipy.integrate import solve_ivp

def f(t,H):
    rr=np.array([[0,1,-1,0],[t,0,0,-1],[1,0,0,1],[0,1,t,0]]);
    return (rr@H)

airy=special.airy(0)
iv=np.array([1*airy[0],1*airy[1],0*airy[0],0*airy[1]])
tmax=4.0 #3.0 では3桁 OK だが 4.0 は1桁のみ OK.
# Airy の方程式は増大解あり->不安定化
t_span=[0.0,tmax]
sol=solve_ivp(f,t_span,iv,method='RK45',rtol=1e-10)
#print(sol)
print('sol.y[0,-1]=',sol.y[0,-1],', cos()*airy()=' , np.cos(tmax)*special.airy(tmax)[0])
plt.plot(sol.t,sol.y[0])
plt.show()
```

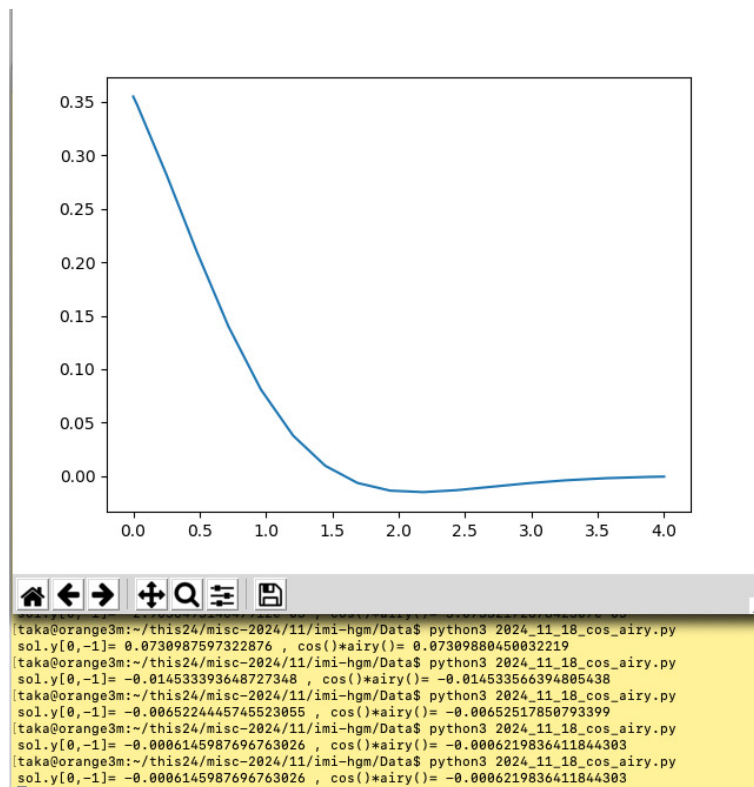


図 1: $\cos(t)Ai(t)$ のグラフ

5 和の場合

和 $f_1 + g_1$ の微分方程式を求める場合も積の場合と似た議論で方程式が導ける. ベクトル値関数 $H = (f_1 + g_1, f_1, \dots, f_r, g_2, \dots, g_s)^T$ を考える.

$$\frac{d(f_1 + g_1)}{dt} = f'_1 + g'_1 = \sum_{i=1}^r p_{1i} f_i + \sum_{j=1}^s q_{1j} g_j \quad (10)$$

なので $\frac{dH}{dt}$ は f_i, g_j 達の rational function 係数の 1 次結合で書ける. $\frac{dH}{dt} = R(t)H$ とすると R は

$$R = \begin{pmatrix} 0 & p_{11} & \cdots & p_{1r} & q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ 0 & p_{11} & \cdots & p_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{21} & \cdots & p_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{r1} & \cdots & p_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{21} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{s1} & \cdots & q_{ss} \end{pmatrix} \quad (11)$$

H の第一成分が $f_1 + g_1$ (和) の値である.

ちなみにこの行列 R は block 対角化されてるので, $(r+s) \times (r+s)$ 行列の方程式を解けばよい形にもできる. たとえば H から g_1 を抜いたものを考える. つまり新しい H を $(f_1 + g_1, f_1, \dots, f_r, g_2, \dots, g_s)$ とする. $g_1 = (f_1 + g_1) - f_1$ に注意して関係式

$$g'_k = q_{k1} g_1 + \sum_{j=2}^s q_{kj} g_j = q_{k1} (f_1 + g_1) - q_{k1} f_1 + \sum_{j=2}^s q_{kj} g_j$$

を使えば新しい R は

$$R = \begin{pmatrix} q_{11} & p_{11} - q_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & -q_{21} & 0 & \cdots & 0 & q_{22} & \cdots & q_{1s} \\ q_{31} & -q_{31} & 0 & \cdots & 0 & q_{32} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{s1} & -q_{s1} & 0 & \cdots & 0 & q_{s2} & \cdots & q_{ss} \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる.

6 f_i, g_j が distribution の時

方程式は $p(t)\frac{dF}{dt} = P(t)F$, $p(t)$ は t の多項式, $P(t)$ は多項式成分の式. 自由加群についての制限アルゴリズムを使わないと多分だめ. system の場合まだ考えてない. 単独の場合は Oaku-Takayama² を見よ.

²<https://arxiv.org/abs/math/9805006>