

Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズムについて

神戸大学 自然科学研究科 中山洋将

話の流れ

1. 零化イデアル $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の計算アルゴリズム

- (a) Oaku-Takayama method
- (b) Bernstein-Maisonobe method
- (c) local での計算方法

2. Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズム

- (a) Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズム
- (b) local Bernstein-Sato ideal について

記号

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial = (\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n})$$

多項式係数微分作用素環 (Weyl 代数)

$$A_n = \{ \sum_{\beta} a_{\beta}(x) \partial^{\beta} \mid \beta \in \mathbb{N}^n, a_{\beta}(x) \in \mathbb{K}[x] \}$$

零化イデアル

多項式 $f \in K[x]$ をとる。 s を不定元とする。

多項式べき f^s の零化イデアル

$$\text{Ann}_{A_n[s]} f^s = \{P(s) \in A_n[s] \mid P(s)f^s = 0\}$$

例 x^s の零化イデアル

$$\partial_x x^s = s x^{s-1}$$

$$x \partial_x x^s = s x^s$$

$(x \partial_x - s)x^s = 0$ だから、 $x \partial_x - s \in \text{Ann}_{A_1[s]} x^s$

実際この場合

$$\text{Ann}_{A_1[s]} x^s = A_1[s] \cdot \{x \partial_x - s\}$$

零化イデアルの計算アルゴリズム 1 (Oaku-Takayama method)

- Oaku: On the algorithm of computing b -function, (1997)
- Oaku, Takayama: An algorithm for de Rham cohomology group of the complement of an affine variety via D -module computation, (1999)

Risa/Asir においてパッケージ `bfct` に含まれている零化イデアルを計算する関数 `ann` は、このアルゴリズムを用いて実装されている。 $A_{n+1}[u, v]$ におけるグレブナ基底計算による消去法を用いている。

アルゴリズム $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の計算アルゴリズム (OT-method)

$\text{ann}(f)$

Input : $f \in K[x]$

Output : $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の生成系

1. $I_f = A_{n+1}[u, v] \cdot \{t - uf, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u \partial_t \ (i = 1, \dots, n), 1 - uv\}$ とおく。

(ここで、 $t = x_{n+1}, \partial_t = \partial_{x_{n+1}}$ とおいている。)

2. $I_f \cap A_{n+1}$ の計算。(グレブナ基底計算により、 u, v を消去)

3. 上で得られた生成元について、 $t \partial_t$ を $-s - 1$ に変換

零化イデアルの計算アルゴリズム 2 (Briançon-Maisonobe method)

- Briançon, Maisonobe: Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes, (2002)
- Ucha, Castro: On the computation of Bernstein-Sato ideals, (2004)

今回、Risa/Asir で実装を行った。微分差分作用素環 $R_{n,1}$ におけるグレブナ基底計算による消去法で計算を行う。データによっては、OT-method よりも高速である。

微分差分作用素環 $R_{n,1}$

微分差分作用素環

$$R_{n,1} = A_n \langle s, t \rangle$$

s と t は

$$st = t(s + 1)$$

を満たし、 A_n の元とは可換。

$$st^\nu = t(s + 1)t^{\nu-1} = t^2(s + 2)t^{\nu-2} = \dots = t^\nu(s + \nu)$$

$$s^\mu t^\nu = s^{\mu-1} t^\nu(s + \nu) = \dots = t^\nu(s + \nu)^\mu$$

$$s^\mu t^\nu = \sum_j \binom{\mu}{j} \nu^j t^\nu s^{\mu-j}$$

この公式と A_n における積の計算を合わせれば、 $R_{n,1}$ における積の計算を行うことができる。また、 A_n の場合と同様にグレブナ基底計算を行うことができる。これを Risa/Asir のプログラムとして実装した。

t の f^s への作用を

$$t \cdot f^s = -s f^{s-1}$$

と定義すると

$$\text{Ann}_{R_{n,1}} f^s = R_{n,1} \cdot \{s + tf, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} t \ (i = 1, \dots, n)\}$$

となる。

$$\text{Ann}_{R_{n,1}} f^s \cap A_n[s] = \text{Ann}_{A_n[s]} f^s$$

アルゴリズム $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の計算アルゴリズム (BM-method)

$\text{ann}(f)$

Input : $f \in K[x]$

Output : $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の生成系

1. $J_f = R_{n,1} \cdot \{s + tf, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} t \ (i = 1, \dots, n)\}$ とおく。
2. $J_f \cap A_n[s]$ の計算。 ($R_{n,1}$ におけるグレブナ基底計算により t を消去)

例 $\text{Ann}_{A_1[s]} x^s$ の生成系の計算

$$J = R_{1,1} \cdot \{s + \underline{t}x, \partial_x + \underline{t}\}$$

$t > s > (\text{その他の変数})$ なる単項式順序の下でグレブナ基底計算

$$S(\underline{t}x + s, \underline{t} + \partial_x) = \underline{t}x + s - x(\underline{t} + \partial_x) = \underline{s} - x\partial_x$$

実際計算すると、

$$G = \{s + \underline{t}x, \partial_x + \underline{t}, s - x\partial_x\}$$

となり、

$$\text{Ann}_{A_1[s]} x^s = A_1[s] \cdot \{s - x\partial_x\}$$

Timing Data(OT-method vs BM-method)

次の計算例は (Castro,Ucha 2004) からとった。

data	OT-method	BM-method
$x^6 + y^4 + z^3$	0.0090	0.018
$(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$	1.06 + 0.67	0.34 + 0.15
$xyz(x + y)(x + z)$	0.485 + 0.053	9.75 + 3.18
$x^7 + y^7 + x^4y^4$	5.74 + 2.93	0.421 + 0.121
$x^7 + y^7 + z^7 + x^2y^2z^2$	————	————
$x^{1000} + y^3$	1.54 + 0.73	0.0050
$x^{2000} + y^3$	7.84 + 0.16	0.0050
$x^{5000} + y^3$	71.4 + 0.96	0.0050

零化イデアル $\text{Ann}_{\mathcal{D}_0[s]} f^s$ の生成系計算 (OT-method local version)

有理関数係数の微分作用素環

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \sum_{\beta} a_{\beta}(x) \partial^{\beta} \mid \beta \in \mathbb{N}^n, a_{\beta}(x) \in \mathbb{K}[x]_0 \right\}$$

ここで

$$\mathbb{K}[x]_0 = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], g(0) \neq 0 \right\}$$

$\mathcal{D}_0$ において割り算アルゴリズム、グレブナ基底計算を行うことができる。(Granger, Oaku, Takayama, 2005)

過去に、これを Risa/Asir で実装した。

このアルゴリズム (local アルゴリズム) を使い、 $\text{Ann}_{\mathcal{D}_0[s]} f^s$ の生成系計算を行うことができる。

アルゴリズム $\text{Ann}_{\mathcal{D}_0[s]} f^s$ の計算アルゴリズム (OT-method local)

$\text{ann}(f)$

Input : $f \in K[x]$

Output : $\text{Ann}_{\mathcal{D}_0[s]} f^s$ の生成系

1. $\mathcal{I}_f = \mathcal{D}_0\langle t, \partial_t \rangle[u, v] \cdot \{t - uf, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u \partial_t \ (i = 1, \dots, n), 1 - uv\}$ とおく。
2. $\mathcal{I}_f \cap \mathcal{D}_0\langle t, \partial_t \rangle$ の計算。(グレブナ基底計算により、 u, v を消去)
3. 上で得られた生成元について、 $t\partial_t$ を $-s - 1$ に変換

data	OT-method	OT-method local
$x^4 + y^5 + xy^4$	0.568	1.76 ± 0.083
$x^5 + y^6 + xy^5$	1.98 ± 0.164	8.19 ± 0.596
$x^6 + y^7 + xy^6$	8.01 ± 0.677	—————
$(1 + x^{10}y^{10})(x^3 + y^2)$	7.69 ± 0.61	1.01 ± 0.090
$(1 + x^{100}y^{100})(x^3 + y^2)$	—————	1.02 ± 0.090

Bernstein-Sato ideal

$s_1, \dots, s_p$ 不定元とする。 $A_n[s_1, \dots, s_p]$ 上で計算を考える。

$f_1, \dots, f_p \in \mathbb{K}[x]$ をとってくる。多項式 $f_1, \dots, f_p$ の Bernstein-Sato ideal とは

$$\mathcal{B}(f_1, \dots, f_p) = \{b(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{K}[s_1, \dots, s_p] \mid \\ b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in A_n[s_1, \dots, s_p] \cdot f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}\}$$

特に $p = 1$ の場合を Bernstein-Sato polynomial(b 関数)と呼ばれるものである。この計算について、Risa/Asir では bfct で実装されている。local の Bernstein-Sato polynomial については、過去に実装を行った。

$$\mathcal{B}(f) = \{b(s) \in \mathbb{K}[s] \mid b(s)f^s \in A_n[s]f^{s+1}\}$$

例 Bernstein-Sato ideal の例 (Bernstein-Sato polynomial の例)

$f = x$ の Bernstein-Sato polynomial $s + 1$

$$\partial_x x^{s+1} = (s+1)x^s$$

$f = x^2 + y^2$ の Bernstein-Sato polynomial $(s+1)^2$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)f^{s+1} = 4(s+1)^2 f^s$$

$f = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ の Bernstein-Sato polynomial $(s+1)(s+n/2)$

$$(\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2)f^{s+1} = 4(s+1)(s+n/2)f^s$$

Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズム

$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(f_1, \dots, f_p)$ について、Bernstein-Sato ideal の定義の式から、

$$b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in A_n[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$$

すなわち、 $\exists P(s_1, \dots, s_p) \in A_n[s_1, \dots, s_p]$ で、次の式を満たす。

$$P(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1} = b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$$

$$(P(s_1, \dots, s_p) f_1 \cdots f_p - b(s_1, \dots, s_p)) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} = 0$$

$$P(s_1, \dots, s_p) f_1 \cdots f_p - b(s_1, \dots, s_p) \in \text{Ann}_{A_n[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$$

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \text{Ann}_{A_n[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + A_n[s_1, \dots, s_p] f_1 \cdots f_p$$

すなわち、

$$\mathcal{B}(f_1, \dots, f_p) = (\text{Ann}_{A_n[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + A_n[s_1, \dots, s_p] f_1 \cdots f_p) \cap \mathbb{K}[s_1, \dots, s_p]$$

アルゴリズム Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズム

$\text{bs}(f_1, \dots, f_p)$

Input : $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{K}[x]$

Output : $\mathcal{B}(f_1, \dots, f_p)$

1. $\text{Ann}_{A_n[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$ の生成系の計算。(OT-method or BM-method)
2. $(\text{Ann}_{A_n[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + A_n[s_1, \dots, s_p] f_1 \cdots f_p) \cap \mathbb{K}[s_1, \dots, s_p]$ の計算。 $(A_n[s_1, \dots, s_p]$ におけるグレブナ基底計算による消去法)

$n = 3, p = 2$ の場合について、Risa/Asir で実装をおこなった。今まで、計算が困難と言われていたような例 $\mathcal{B}(x_1^3 + x_2^2, x_1^2 + x_2^3)$ のようなものが計算できた。

local Bernstein-Sato ideal の計算 (未完)

過去に、 $\mathcal{D}_0$ のグレブナ基底計算などを用いて、local Bernstein-Sato polynomial の計算するアルゴリズムを得た。これと類似の方法を local Bernstein-Sato ideal の計算に応用できないかと考えた。

local Bernstein-Sato ideal

$$\mathcal{B}'(f_1, \dots, f_p) = \{b(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{K}[s_1, \dots, s_p] \mid \\ b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_0[s_1, \dots, s_p] \cdot f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}\}$$

$$\mathcal{I}_f = (\text{Ann}_{\mathcal{D}_0[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} + \mathcal{D}_0[s_1, \dots, s_p] f_1 \cdots f_p)$$

次のものさえ計算できればよい。

$$\mathcal{I}_f \cap \mathbb{K}[s_1, \dots, s_p]$$

(global) Bernstein-Sato ideal $\mathcal{B}(f_1, \dots, f_p)$ を計算し、それが $b(s_1, \dots, s_p)$ で生成されると仮定する。また local Bernstein-Sato ideal $\mathcal{B}'(f_1, \dots, f_p)$ も単項生成であるとする。

このとき、local Bernstein-Sato ideal は、 $b(s_1, \dots, s_p)$ の約元で生成される。よって、 $\mathcal{I}_f$ のグレブナ基底 $\mathcal{G}$ を求めて、 $b(s_1, \dots, s_p)$ の約元中で $\mathcal{G}$ で割り切れるものを求めれば、それから local Bernstein-Sato ideal の生成元がわかる。

まとめ

- $\text{Ann}_{A_n[s]} f^s$ の計算アルゴリズム BM-method を実装。
- $\text{Ann}_{D_0[s]} f^s$ の計算アルゴリズム local OT-method を作り、実装。
- Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズムを実装。

今後

- local Bernstein-Sato ideal の計算アルゴリズム。
- 種々の D -加群の計算アルゴリズムを local 化。