多重ゼータ値の予想次元について

神戸大学大学院自然科学研究科 数学専攻
鶴巻 健一

多重ゼータ値の定義

多重ゼータ値とは, 以下のように定義される無限級数である.

定義 (多重ゼータ値の定義). $k_1 \geq 2, k_2, \ldots, k_n \geq 1$

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \ldots m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

$k := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ ： 重さ (weight)

n ： 深さ (depth)

$(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ： インデックス ($k_1 \geq 2$ なら収束インデックス)

多重ゼータ値で生成される線形空間の定義

定義.

$$Z_0 := Q$$

$$Z_1 := 0$$

$$Z_k := \sum_{\substack{k-1 \geq n \geq 1 \\ k_1, \ldots, k_{n-1} \geq 1, k_1 \geq 2 \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} Q \cdot \zeta(k_1, \ldots, k_n) \quad (k \geq 2)$$

$$Z := \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$$

Z_k は重さ k の多重ゼータ値全体で Q 上張られる線形空間である.

Z_k の Q 上の線形次元には次のような予想がある.

予想 (Zagier他). 数列 $d_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ を漸化的に

$$d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3)$$

で定めるとき,

$$\dim_Q Z_k = d_k.$$

この d_k を多重ゼータ値の予想次元という.

重さ k における多重ゼータ値の総数 2^{k-2} と予想次元 d_k

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
2^{k-2}	-	-	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

k	13	14	15	16	17	18	19	20
d_k	16	21	28	37	49	65	86	114
2^{k-2}	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144

予想次元の上限は証明されている．

定理 (Goncharov,Terasoma). $\dim_{Q} Z_k \le d_k$.

この上限を達成するような関係式の集合を具体的に与えることについて，すなわち $2^{k-2} - d_k$ 個以上の Q 上線形独立な関係式の集合を具体的に与えることについて，予想がいくつかある．伊原，金子，Zagier によると，次の関係式の集合について検証されている．

1. 有限複シャッフル関係式と一般複シャッフル関係式

2. $\zeta(n)$ $(n \ge 1)$ と多重ゼータ値の積により導かれる複シャッフル関係式

3. 有限複シャッフル関係式と Hoffman の関係式

２と３は１の特別な場合である．

1については，重さが13までについて上限が達成できることが確認されている．2 については，重さが12までは達成できたが，13で失敗したことが確かめられている．3については，フランスLilleのPetitot，Minhらにより検証されている．彼らは計算機により，重さが16までについて上限が達成できることを確認しており，それ以上の重さのときについても上限が達成できると予想している．

予想. 有限複シャッフル関係式とHoffmanの関係式により上限を達成できる．

この論文では，重さが17以上の次元についてこの予想の正当性を検証した．

尚，この研究は九大の金子昌信先生の教示を受けて始めた検証である．

有限複シャッフル関係式とは?

多重ゼータ値$\zeta(k), \zeta(k')$を級数と積分の二通りに表示することにより，$Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$に二通りの積の構造を入れることができる．この積による二つの多重ゼータ値の積$\zeta(k)\zeta(k')$を和に直して比較することにより得られるのが有限複シャッフル関係式である．

例.

$$\zeta(2)^2 = \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^2}\right)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$$

$$\zeta(2)^2 = \left(\int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2}\right)^2 = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(3,1)$$

よって，

$$4\zeta(3,1) = \zeta(4)$$

また，多重ゼータ値の級数表示による積をharmonic積，積分表示による積をshuffle積という．

Hoffmanによる代数的定式化

発散級数まで含めて(例えば$\zeta(1)=\sum_{m>0}^{\infty}\frac{1}{m}$)，複シャッフル関係式を扱うために，多重ゼータ値を代数的に取り扱うことを考える.

$H := Q\langle x,y\rangle, H^1 := Q + Hy, H^0 := Q + xHy$とする.
このとき，Q上の線形写像

$$Z : H^0 \longrightarrow R$$

を

$$Z(z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_n}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

ただし$k_1 \geq 2, k_2, \ldots k_n \geq 1$で，$z_{k_i} := x^{k_i - 1} y (1 \leq i \leq n)$かつ$Z(1) = 1$と定義する．例えば,

$$Z(xy) = \zeta(2), Z(x^2y^2) = \zeta(3,1), Z(x^3yxy^2xy) = \zeta(4,2,1,2).$$

harmonic積とshuffle積もこれらの非可換な多項式環において代数的に表現できる.

尚，今回の検証では，関係式の生成をRisa/Asirで行った.

代数的定式化により拡張された有限複シャッフル関係式を一般複シャッフル関係式という．その特別な場合がHoffmanの関係式である．

定理（Hoffmanの関係式）. 収束インデックス $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_n)$$

$$=\sum_{\substack{1\le l\le n\\ k_l\ge 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\ldots,k_n).$$

計算機による検証

$k \geq 3$を多重ゼータ値の重さとする.

予想次元の上限を達成するために, 有限複シャッフル関係式とHoffmanの関係式の中に$2^{k-2}-d_k$個以上, すなわち重さkの多重ゼータ値の総数から予想次元を引いた数以上のQ上線形独立な関係式があるかを調べたい.

そこで, これら二つの関係式から生成された行列のランクが$2^{k-2}-d_k$であるかを調べる.

行列の格納するために必要なメモリ

次元(k)	17	18	19	20
MZVの総数(2^{k-2})	32768	65536	131072	262144
関係式の総数	73728	155584	327680	556928
必要な容量(int型)	9.7GB	41GB	172GB	722GB
必要な容量(short型)	4.8GB	20GB	86GB	361GB

行列を小さくするための工夫

(1) short型配列で実装した行列について，有限体でのランクを計算する.

(2) Hoffmanの関係式で生成された行ベクトルたちにより，有限複シャッフル関係式により生成された部分をreductionする. 更に，有限複シャッフル関係式の数を制限する.

(3) 複数のprocessでランクを計算するをするために，並列プログラミング(MPI) を行う.

(1) 有限体上で計算することの正当性

p： 有限体 K の標数

A_k： 重さ k の MZV の関係式たちから生成される行列

$$\mathrm{rank}(A_k \bmod p) \leq \mathrm{rank}(A_k)$$

より，もし

$$\mathrm{rank}(A_k \bmod p) \geq 2^{k-2} - d_k$$

なら

$$\mathrm{rank}(A_k) \geq 2^{k-2} - d_k$$

がいえる．よって,

$$\dim_Q Z_k \leq d_k.$$

有限体 K 上での A_k のランクが $2^{k-2} - d_k$ 以上であることが分かれば, $\dim_Q Z_k \leq d_k$. であることがわかる.

(2) 有限複シャッフル関係式の制限

- 有限複シャッフル関係式

  $Z(\omega_1 * \omega_2 - \omega_1 ш \omega_2) = 0 \quad (\omega_1, \omega_2 \in H^0)$

- finite-2

  $Z(xy * \omega - xy ш \omega) = 0 \quad (\omega \in H^0)$

- finite-3

  $Z(xxy * \omega - xxy ш \omega) = 0 \quad (\omega \in H^0)$

  $Z(xyy * \omega - xyy ш \omega) = 0 \quad (\omega \in H^0)$

finte-2，finite-3から生成される関係式の個数は2^{k-3}個,Hoffmanの関係式から生成される関係式 の個数は2^{k-3}個

$\longrightarrow$合わせて2^{k-2}個の関係式に制限できる.

これらの関係式たちにより生成される行列は$2^{k-2} \times 2^{k-2}$の正方行列である.予想次元d_kは2^{k-2}と比べて非常に小さいので，このサイズは事実上最良と考えられる.

Hoffman の関係式と finite-2，finite-3 より生成された正方行列のランクについて，計算機により，重さが 20 までについては $2^{k-2} - d_k$ であること，すなわち予想次元の上限が達成できることが確認できた. したがって，一般の次元 k についても, これらの関係式により上限が達成できると予想する.

予想. Hoffman の関係式と finite-2，finite-3 により予想次元の上限は達成できる.

まとめ

- 重さが20までについて，有限複シャッフル関係式，Hoffmanの関係式により上限が達成できることが確かめられた.

- 有限複シャッフル関係式で生成される関係式の集合について，２次と３次で書ける関係式(finite-2, finite-3)に制限しても，重さが20までについて予想次元の上限を達成できることが確かめられた.

課題

- 何故Hoffmanの関係式と有限複シャッフル関係式，あるいはfinite-2, finite-3により予想次元の上限が達成できるのかを数学的に示すこと.