(Knoppix/Math での) マニュアルの位置

MathDoc-Search およびインターネットでのマニュアル検索に使えるキーワード.

1. `(Macaulay2) Dmodules deRham` 検索　：Macaulay2 パッケージ Dmodules のマニュアル.
   `/usr/share/doc/Macaulay2/Dmodules/html/index.html`
2. `asir yang` 検索　：yang パッケージの説明書 (日本語).
   `/usr/local/icms2006/projects/openxm/doc/asir-contrib/ja`
3. `OpenXM` 検索　：asir, kan/sm1 等の文書. (日本語, 文書 を選択)
   `/usr/local/OpenXM/doc/index/asir-ja.html`
4. `nk_restriction` 検索　：asir の制限イデアルの計算関数.
   `/usr/local/OpenXM/doc/index/asir-ja.html` から 実験的関数を選ぶ.

◎ ワイル代数（微分作用素環），かけ算

Macaulay 2 （emacsインタフェース，ホモロジー代数，グリーン ~~D-加群については~~ しかし大きい計算には使えない）

kan/sm1　豊富な機能，歴史，おそい。

asir　高速，機能すくない。

⇩

演習で

```
loadPackage "Dmodules"
QQ[x,y,dx,dy,WeylAlgebra=>{x=>dx,y=>dy}]
dx*x
x*dx
L1=x*dx-2+y*x^2
L2=dy+x^2/2
L1/2-y*L2
```

[load("D-modules.m2")]

βをyに

x^2の項が消去される。

$$N(x,\tfrac{1}{\beta})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\beta}\,e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$

$$m(\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2N(x,\tfrac{1}{\beta})\,dx\quad\left(=\frac{1}{\beta}\right)$$

$$k(x,\beta)=x^2e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$

βをyとおきかえ。　$L1\cdot k=0$，$L2\cdot k=0$.

$$\left[\ell(\beta,\tfrac{\partial}{\partial\beta})+\tfrac{\partial}{\partial x}\ell_1(\beta,x,\tfrac{\partial}{\partial\beta},\tfrac{\partial}{\partial x})\right]\cdot k=0$$

$$\ell\cdot\int_{-\infty}^{\infty}k(x,\beta)\,dx=0.$$

ワイル代数

```
Macaulay 2, version 1.1.99
with packages: Classic, Core, Elimination, IntegralClosure,
               PrimaryDecomposition, SchurRings, SimpleDoc,

i1 : loadPackage "Dmodules"

o1 = Dmodules

o1 : Package

i2 : QQ[x,y,dx,dy,WeylAlgebra=>{x=>dx,y=>dy}]

o2 = QQ[x, y, dx, dy]

o2 : PolynomialRing
```

ワイル代数

```
i3 : dx*x

o3 = x*dx + 1

o3 : QQ[x, y, dx, dy]

i4 : x*dx

o4 = x*dx

o4 : QQ[x, y, dx, dy]
```

ワイル代数

```
i5 : L1=x*dx-2+y*x^2

       2
o5 = x y + x*dx - 2

o5 : QQ[x, y, dx, dy]

i6 : L2=dy+x^2/2

      1 2
o6 = -x   + dy
      2

o6 : QQ[x, y, dx, dy]
```

ワイル代数

```
i7 : L1/2-y*L2

     1
o7 = -x*dx - y*dy - 1
     2
```

◎ 特性多様体とその次元
(characteristic variety)　(krull dimension)

I = ideal(L1, L2) ⓔ

J = inw(I, {0,0,1,1}) ⓔ　$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I)$ を計算

dim(J) ⓔ　J の krull 次元を計算

Th. holonomic ⇒
$(I+\partial_x D)\cap\mathbb{C}\langle y,\partial_y\rangle \neq 0$ で、かつ
holonomic

Characteristic variety, 次元

```
i8 : I=ideal(L1,L2)

               2                  1 2
o8 = ideal (x y + x*dx - 2, -x  + dy)
                              2

o8 : Ideal of QQ[x, y, dx, dy]

i9 : J=inw(I,{0,0,1,1})

o9 = ideal (2dy, x*dx)

o9 : Ideal of QQ[x, y, dx, dy]

i10 : dim J

o10 = 2
```

◎ (1,0,−1,0)−グレブナ基底の計算

J=gbw(I, {1,0,−1,0}) ⏎

積分消去
制限消去　のアルゴリズム

....

補. JJ=gens(J) ⏎

JJ_(0,1) ⏎

Jの要素をとり出すには?
matrix型へ

T=matrix {{x, x+y},{dx, dy}}

matrixの成分をとり出すには.
T_(0,1) などと入力.

Dintegration(I, {1,0}) ⏎

$D/\partial_x D \otimes_D D/I$ (積分) の計算

補. toString(I) ⏎

入力形式で出力させるには便利.

(1, 0, −1, 0)-グレブナ基底の計算

```
i11 : J=gbw(I,{1,0,-1,0});

i12 : JJ=gens(J)

o12 = | x2+2dy xdx-2ydy-2 xydy+dxdy+2x 2y2dy^2+dx^2dy+9ydy+6 |

                                    1                     4
o12 : Matrix (QQ[x, y, dx, dy])  <--- (QQ[x, y, dx, dy])

i13 : JJ_(0,1)

o13 = x*dx - 2y*dy - 2

o13 : QQ[x, y, dx, dy]

i14 : Dintegration(I,{1,0})

o14 = HashTable{0 => cokernel | -2ydy-3 0      |}
                              | 0       -ydy-2 |
               1 => 0
```

◎ 消去、常微分方程式の計算

$\dim_{\mathbb{C}(x,y)} R/R\cdot I < +\infty$

```
I = ideal(x*dx + 3*y*dy+1, dx^3-dy) ↵
J=gbw(I, {0,0,0,1}) ↵
JJ= gens(J) ↵
toString(JJ_(0,2)) ↵
```

$I \cap \mathbb{C}\langle x, y, \partial_x \rangle$ の元になってる

Step 2.
(解の性質)

Maple (級数解の計算などすぐれている。)

```
?DEtools[formal_sol]; ↵
with(DEtools); ↵
L:= 3*y*dx^3+x*dx+1 ; ↵
LL:= subs(y=1, L) ↵
formal_sol(LL, [dx,x], T, x=infinity); ↵
```

ヘルプの見方

$x=\infty$ での
級数解を計算

消去, 常微分方程式の計算

```
i16 : I=ideal(x*dx+3*y*dy+1,dx^3-dy)

                                      3
o16 = ideal (x*dx + 3y*dy + 1, dx   - dy);

i17 : J=gbw(I,{0,0,0,1});

i18 : JJ=gens J

o18 = | xdx+3ydy+1 -dx^3+dy 3ydx^3+xdx+1 |

                                    1                        3
o18 : Matrix (QQ[x, y, dx, dy])  <--- (QQ[x, y, dx, dy])

i19 : toString JJ_(0,2)

o19 = 3*y*dx^3+x*dx+1
```

Maple による級数解の計算

```
taka@orange2(1)=> maple
    |\^/|       Maple 7 (IBM INTEL LINUX)
> with(DEtools);
> L:=3*y*dx^3+x*dx+1;
                                                   3
                                    L := 3 y dx  + x dx + 1


> LL:=subs(y=1,L);
                                                   3
                                   LL := 3 dx  + x dx + 1


> formal_sol(LL,[dx,x],T,x=infinity);
                3      6
[[T (1 - 6 T  + O(T )), T = 1/x],

                                                                       2
       1/2         1                  3      6                        T
    [T     exp(2 ----) (1 + 5/144  T  + O(T )), - 1/3 ---- = 1/x]]
                   3                                                   1
                  T
> quit();
```

その他

```
syz matrix{{2-y*x^2, -x^3/2, x}}
```

$$\begin{array}{cc} 0 & x \\ 2 & 0 \\ x^2 & x^2y-2 \end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0\cdot\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}+x \qquad\qquad x\frac{\partial}{\partial x}+0\cdot\frac{\partial}{\partial y}+(x^2y-2)$$

```
R=QQ[xx,p]
D=QQ[x,dx]
g=map(R,D,{x=>xx,dx=>p})
use D
g(x*dx+1)
```

← 同じ変数名 不可

R での計算. Pfaffian の計算. yang パッケージ

例題: $x\partial_x + 3y\partial_y + 1, \partial^3 - \partial_y$. Sx は $\theta_x = x\partial_x$. Sy は $\theta_y = y\partial_y$.

```
import("yang.rr");
yang.define_ring([x,y]);
Sx=yang.operator(x);
Sy=yang.operator(y);
L1=Sx+3*Sy+1;
L2=y*Sx*(Sx-1)*(Sx-2)-x^3*Sy;
G=yang.buchberger([L1,L2]);
yang.stdmon(G);
S1=yang.constant(1);
Base=[S1,Sy,Sy*Sy];
Pf=yang.pfaffian(Base,G);
/* Pf[0], Pf[1] */
```

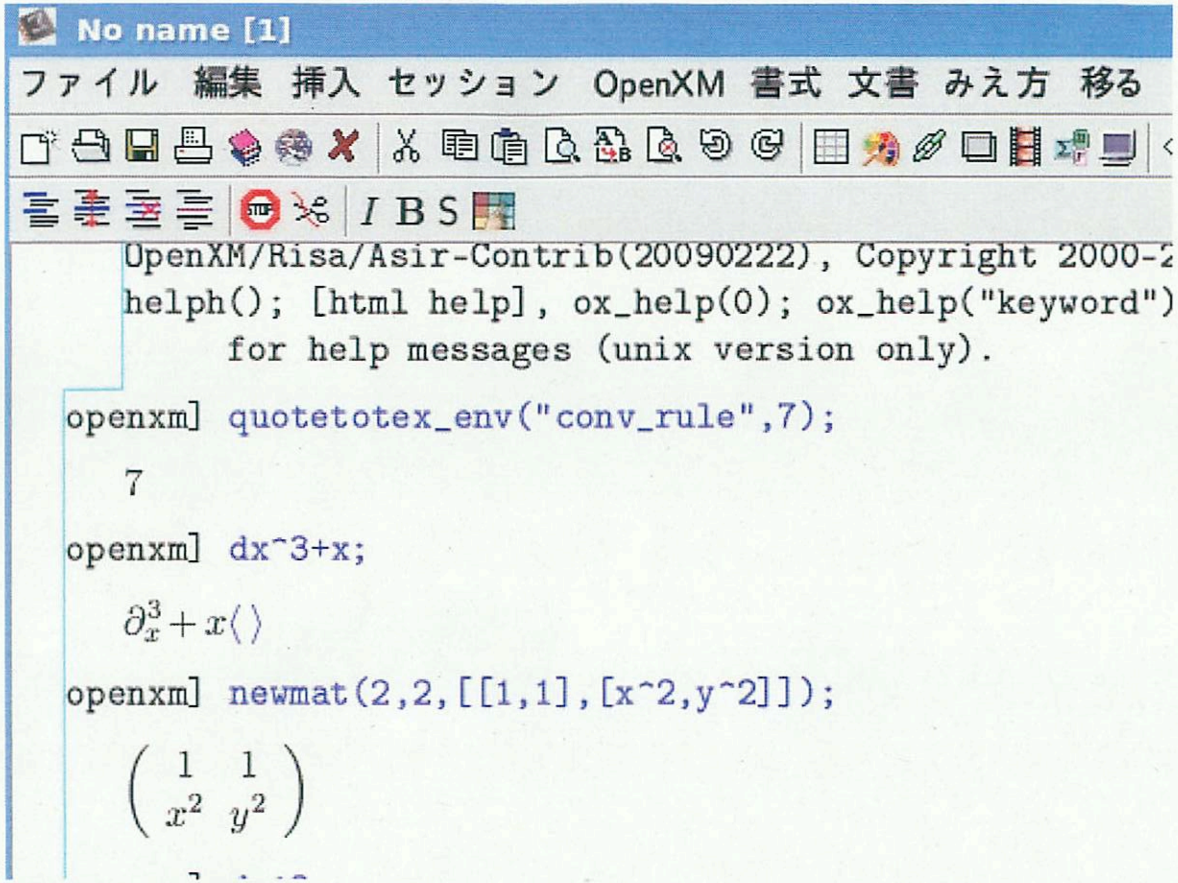
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ \right) = Pf[0]\left(\ \right)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ \right) = Pf[1]\left(\ \right)$

ここは θ_x, θ_y でなく $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

余談: 美しい出力で見たい (インスピレーションが涌くように...)

TeXmacs　の利用.



Asir の場合.

```
print_xdvi_form(式);
print_xdvi_form(Pf[0]);
```