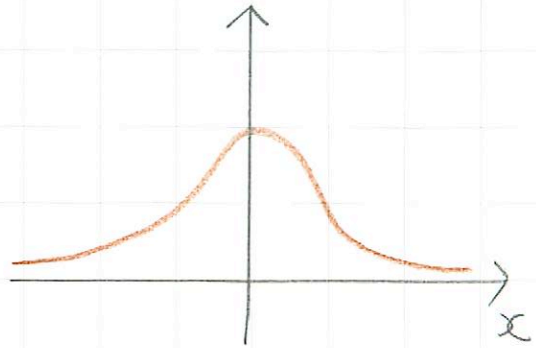
~Q5

やりたいことの例による説明

$$N(x, \tfrac{1}{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\beta}\ e^{-\frac{\beta}{2}x^2}, \quad \beta > 0.$$



問. $m(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 N(x, \frac{1}{\beta})\, dx$ は β の関数としてどんな関数か? (running example)

Step 1. (微分作用素環 D のアルゴリズムで.) $m(\beta)$ のみたす微分方程式を求める。

Step 2. その方程式を D のアルゴリズムや数値解析で解析し $m(\beta)$ の性質をしらべる。

部分積分と $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ で. $m(\beta) = \frac{1}{\beta}$

$K(x, \beta) = x^2 e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$ とおく。

$$\tilde{m}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \beta)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \beta^{-\frac{3}{2}}$$

Step 1.

1. $K(x,\beta)$ のみたす線型微分方程式系を求める。
2. 上から、$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\beta)dx$ が β についてみたす線型微分方程式を求める。

$$\frac{\partial K}{\partial \beta} = -\frac{x^2}{2}K \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{x^2}{2}\right)\cdot K = 0 \quad \text{——— ①}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 2xe^{-\frac{\beta}{2}x^2} + x^2(-\beta x)e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$

$$= \frac{2}{x}K - \beta x K \longrightarrow \left(x\frac{\partial}{\partial x} - 2 + \beta x^2\right)\cdot K = 0 \quad \text{——— ②}$$

Prop. [Oaku, p.166] [SST, p227] 積分消去

$$\left[\ell\left(\beta, \frac{\partial}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\ell_1\left(\beta, x, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\cdot K = 0 \quad \text{——— ③}$$

$$\Rightarrow \quad \ell\cdot\int_a^b K(x,\beta)dx + \left[\ell_1\cdot K\right]_a^b = 0$$

∵ $\int_a^b \left[\ell + \frac{\partial}{\partial x}\ell_1\right]\cdot K dx = 0 \quad \therefore \quad \ell\int_a^b K dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\ell_1\cdot K)dx}_{= \left[\ell_1\cdot K\right]_a^b} = 0$ //

①②より③の形の微分作用素をつくればよい。

$$\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{x^2}{2} \text{ ——— ①}$$

$$x\frac{\partial}{\partial x} - 2 + \beta x^2 = \frac{\partial}{\partial x}x - 3 + \beta x^2 \text{ ——— ②}$$

βx^2の項をけすには、 $\beta\times① - \frac{1}{2}\times②$

$$\underline{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}} + \underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}x\right)} + \underline{\frac{3}{2}}$$

— ℓ

— $\frac{\partial}{\partial x}\ell_1$

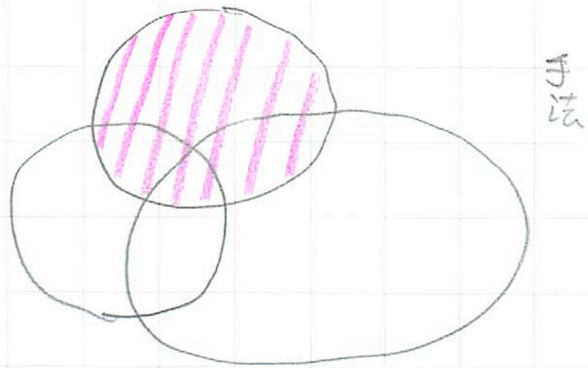
Prop より、 $\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{3}{2}\right)\cdot\tilde{m}(\beta) = 0$

Step 2.

$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{3}{2}\right)\cdot\tilde{m}(\beta) = 0$ を解くと、 $\tilde{m}(\beta) = C\cdot\beta^{-\frac{3}{2}}$

Cは任意定数

より複雑なパラメータ付関数の積分をしらべるのにも使える。



Step 1 を D のイデアルの概念で整理

$D = \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle$ 微分作用素環 [Oaku, 3章]

$\partial_x x = x\partial_x + 1$ $\partial_x y = y\partial_x$

$\partial_y y = y\partial_y + 1$ $\partial_y x = x\partial_y$

D の元は x, y の関数に作用する。

$\partial_x \cdot f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_y \cdot f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$

$x \cdot f(x,y) = xf$, $y \cdot f(x,y) = yf$

$I = \mathrm{Ann}_D f \underset{def}{=} \{ l \in D \mid l \cdot f = 0 \}$

I は D の左イデアル $\xrightarrow{def.}$ (もちろん有限生成)

積分消去で $l(y, \partial_y)$ をみつけることは、

$\boxed{(I + \partial_x D) \cap \mathbb{Q}\langle y, \partial_y \rangle}$ の生成元をみつけることに他ならない。

左イデアル 右イデアル

これを系統的に説明…

展望

$\mathrm{Ann}_D^{(n)} f \underset{def}{=} \{ l \in D, l \text{は} n\text{階以下} \mid l \cdot f = 0 \}$

比較

$J \subset \mathbb{Q}[x, y, p, q]$

$J \cap \mathbb{Q}[y, q]$ 消去法

[CLO, 2章, 3章]

Def. $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ $u_i+v_i \geq 0$ [SST, §1.1]

$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ weight ベクトル

$$\mathrm{in}_{(u,v)}\Big(\overbrace{\sum c_{\alpha\beta st}\, x^\alpha y^\beta \partial_x^s \partial_y^t}^{\ell}\Big)$$

$= \alpha u_1 + \beta u_2 + s v_1 + t v_2$ が最大となる ℓ の項の和

（べきと (u,v) の内積）

initial term とよぶ

ただし
$u_1+v_1>0$ なら ∂_x を ξ に
$u_1+v_1=0$ なら ∂_x のまま
$u_2+v_2>0$ なら ∂_y を η に
$u_2+v_2=0$ なら ∂_y のまま

$\mathbb{Q}[x,y,\xi,\eta]$ は多項式環

例1.
$$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}\left(y\partial_y + \tfrac{1}{2} y x^2\right) = y\eta$$
$$\mathrm{in}_{(0,-1,0,1)}\left(\quad〃\quad\right) = y\partial_y$$

◎ 順序 $<_{(u,v)}$ について、多項式環のグレブナ基底とほぼ同様の議論が可能（左イデアル）
[Oaku,] def.

Th. [SST, Th 1.1.6] G を D の左イデアル I の $<_{(u,v)}$ についての Gröbner basis とすると、
$\{\mathrm{in}_{(u,v)}(g) \mid g \in G\}$ が $\mathrm{in}_{(u,v)}(I)$ の生成元.

Def. Dの左イデアル I が holonomic イデアル　[SST, p.29] [Oaku,]

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I) \subset \mathbb{Q}[x,y,\xi,\eta]$ の(Krull)次元が 2
$\searrow n$

Th (Bernstein 不等式)　[Björk, 一章] [堀田. 代数入門 5章]

$D \supsetneq I \Rightarrow \dim \mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I) \geq 2$.

Coutinho

$$F_k = \left\{ \sum_{s+t \leq k} c_{\alpha\beta st}\, x^\alpha y^\beta \partial_x^s \partial_y^t \right\}$$ ← k階以下の作用素

$\dim_{\mathbb{Q}} F_k / F_k \cap I$ は k の多項式 $H(k)$.　(k 十分大)

このとき.

Th [SST, Th 1.4.1]

I が holonomic イデアル $\Leftrightarrow$ $H(k)$ の次数が 2
$I \neq 0$,

例. $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}\left(y\partial_y + \frac{1}{2}yx^2\right) = y\eta$

$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}\left(x\partial_x - 2 + yx^2\right) = x\xi$.

$\dim \langle x\xi, y\eta \rangle = 2$

Th. [Björk, 一章]

I が holonomic イデアル $\Rightarrow$ $(I+\partial_x D)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ は $\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ の holonomic イデアル or trivial イデアル (全体)

x の方がわかりやすい

Fourier 変換 (Laplace 変換) [Oaku, p.88]

$F: x \longmapsto -\partial_x,\ \partial_x \longmapsto x$　　D の環準同型

x が左なので、みやすい。

$(I+\partial_x D)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle = (F(I)+xD)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$　制限消去

Th-Alg [Oaku, p.145 – p.159]　[SST, p.119 – p.211]

制限消去は以下の手続きで計算可能。

① I の $(-1,0,1,0)$-Gröbner 基底を計算　∂_x をけす
生成元を $g_1,\cdots,g_p$ とする。

② $0\le i\le m_j$ に対して、

$$\partial_x^i g_j = \sum_s l^i_{js}(y,\partial_y)\partial_x^s + x(\cdots)$$ と書く。

$\sum_s l^i_{js}(y,\partial_y)\partial_x^s$ 達から $\partial_x^s,\ s\ge 1$ を消去

ただし、この元は $\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ 自由加群の元とみなして ∂_x^s 達を消去
($\partial_x^{(i)}$ をかけてはいけない。)

m_j のえらび方

$\theta_x = x\partial_x$

generic_bfct

$I\cap \mathbb{Q}[\theta_x]$ の生成元を $b(\theta_x)$ とする。

$b(s)=0$ が非負整数根をもたない $\Rightarrow$ 終了

r_0 が $b(s)=0$ の最大整数根

$m_j + \mathrm{ord}_{(-1,0,1,0)}(g_j) = r_0$

となるように m_j をえらぶ。

[CL02, 5章]

例1 $L_1 = \partial_y + \underline{\frac{1}{2}\partial_x^2}$

$L_2 = -\partial_x x - 2 + y\partial_x^2 = -x\partial_x - 3 + \underline{y\partial_x^2}$

$$
\begin{aligned}
sp(L_1, L_2) &= yL_1 - \frac{1}{2}L_2 \\
&= y\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2} \\
&= \underline{y\partial_y + \frac{3}{2}} + x\left(\frac{1}{2}\partial_x\right)
\end{aligned}
$$

$L_1,\ x\partial_x + 3 + 2y\partial_y,\ y\partial_x\partial_y - x\partial_y + 2\partial_x,\ 2y^2\partial_y^2 + x^2\partial_y + 9y\partial_y + 6$

$\theta_x(\theta_x - 1) + 2x^2\partial_y$

$\underline{\partial_x^2} + 2\partial_y,\ \underline{\partial_x^3} + 2\partial_y\partial_x,\ \cdots$

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^k\theta_x(\theta_x - 1) + \partial_x^k 2x^2\partial_y \\
&= x^{-k}\theta_x(\theta_x - 1)x^k\partial_x^k + \partial_x^k 2x^2\partial_y \\
&= (\theta_x + k)(\theta_x + k - 1)\partial_x^k + \partial_x^k 2x^2\partial_y \\
&= \underset{k\text{次}}{k(k-1)\partial_x^k} + x(\cdots) + \underset{k-2\text{次}}{\partial_x^k 2x^2\partial_y}
\end{aligned}
$$

このへんで、おしまい…

① Annより $\mathrm{Ann}^{(i)}$

② tropical implitization をDでもできないか!?

Step 2 について．（まだまだ...）

$(F(I)+xD)\cap\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$　O.D.E.（常微分方程式）いろいろ研究あり．

$D=\mathbb{Q}\langle x,y,t,\partial_x,\partial_y,\partial_t\rangle$　　holonomic.

$(I+tD)\cap\mathbb{Q}\langle x,y,\partial_x,\partial_y\rangle=J$　Jの解空間をどのようにしらべるか？ → Gröbner基底の方法

例．$\langle\theta_x+3\theta_y+1,\ \partial_x^3-\partial_y\rangle$　$A=(1,3)$　$I_A=\langle\partial_x^3-\partial_y\rangle$，$\int_C e^{xt+yt^3}dt$

Prop　Jがholonomicイデアル $\Rightarrow J\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_x]\neq\{0\}$

◎計算法は単純消去．[Oaku, p.97] [CLO, 3章§1]

∵　$F_k=\left\{\sum_{s+t\leq k}C_{\alpha\beta st}x^\alpha y^\beta\partial_x^s\partial_y^t\right\}$

$\dim_{\mathbb{Q}}F_k/F_k\cap J=O(k^2)$　$k>>0$

$\mathbb{Q}$-線型写像　$g:\ \underbrace{F_k\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_y]}_{\text{次元}\binom{k+3}{3}=O(k^3)}\longrightarrow F_k/F_k\cap J$ を考える。

$\dim_{\mathbb{Q}}\ker g+\underbrace{\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Im}\,g}_{\leq O(k^2)}=O(k^3)$　$\therefore\ \ker g\neq\{0\}$　//

$R = \underbrace{\mathbb{Q}(x, y)}_{有理式} \langle \partial_x, \partial_y \rangle$ 　　　　　　Rでグレブナ基底の理論 O.K.

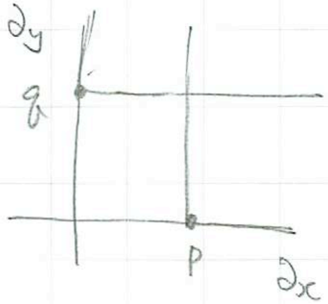
有理式　$\frac{多}{多}$　係数とみる。 $\partial_x a(x,y) = a(x,y)\partial_x + \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}}_{おつり}$

おつり　ほとんど可換.

<u>Prop.</u> J が holonomic $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J < +\infty$

(:) $J \cap \mathbb{Q}[x, y, \partial_x] \ni a(x,y)\partial_x^p + \cdots$

$J \cap \mathbb{Q}[x, y, \partial_y] \ni b(x,y)\partial_y^q + \cdots$



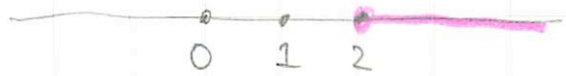
$\dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J \le p \cdot q$

//

<u>Th-Alg</u> $R\cdot J$ の standard monomial の個数が解空間の次元.

std monomial $\Rightarrow$ Pfaffian を得る　　　　（例で説明）

例1.　$\langle \partial_x^2 + a\partial_x + b \rangle \subset \mathbb{Q}(x)\langle \partial_x \rangle$



$1, \partial_x$ が std monomial

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

例2.　RJ の std monomial が $1, \partial_x, \partial_y$ とする。

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix}$$

$\leftarrow \partial_x^2$ の normal form

$\leftarrow \partial_x\partial_y$ の normal form

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix}$$