重み順序

$S = K[x_1, \cdots, x_n]$

$w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$

$(0 \neq) f = \sum_{a} \underbrace{c_a}_{\text{係数}} x^a \in S$ に対して、

$in_w(f) :=$ 内積 $w \cdot a$ が最大となるような $c_a x^a$ の和

$I \subset S$: イデアル

$in_w(I) := (in_w(f) \mid 0 \neq f \in I)$

$\boxed{\text{命題}}$

$w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $<$: S の単項式順序 に対して、

$$x^a <_w x^b \underset{\text{def}}{\iff} \begin{array}{c} w \cdot a < w \cdot b \\ \text{or} \\ w \cdot a = w \cdot b \text{ かつ } x^a < x^b \end{array}$$

で定義される順序 $<_w$ は S の単項式順序

$\boxed{\text{命題}}$

任意の単項式順序 $<$ と S の任意のイデアル I に対して、

$w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ が存在して、

$$in_<(I) = in_w(I)$$

を満たす。

$\boxed{\text{定理}}$

任意のイデアル I に対して

$$\{ in_<(I) \mid \text{単項式順序} \}$$

は有限集合。つまり、I のイニシャルイデアルは有限種類しかない。

◎ 各 $in_<(I)$ に対応するグレブナー基底 $g_<$ とすると、有限集合 $\bigcup_< g_<$ が得られる。

この集合は任意の単項式順序に対して I の GB

⇝ I の universal GB という。

(例) $I = (\underbrace{x_1^6 + x_1^5 x_2 + 3 x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1 + x_2^2}_{= f})$

$\{ in_<(I) \mid < : \text{単項式順序} \}$

$\parallel$

$\{ (in_<(f)) \mid < : \quad 〃 \quad \}$

例えば、任意の $<$ に関して

$x_1 x_2^3 > x_1$

$x_1 x_2^3 > x_2^2$

⇐ $in_<(f)$ にはならない

$w = (1,0) \Rightarrow in_w(f) = x_1^6$

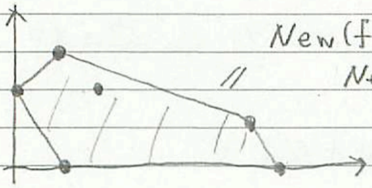
$w' = (0,1) \Rightarrow in_{w'}(f) = x_1 x_2^3$

$w'' = (2,3) \Rightarrow in_{w''}(f) = x_1^5 x_2$

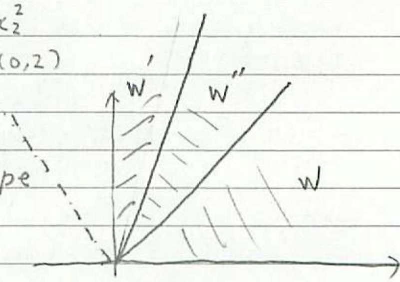
$f = x_1^6 + x_1^5 x_2 + 3x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1 + x_2^2$

(6,0) (5,1) (2,2) (1,3) (1,0) (0,2)

New(f)



// Newton polytope



グレブナーfan

・Iのイニシャルイデアルは

(x_1^6), $(x_1 x_2^3)$, $(x_1^3 x_2)$

の3通り.

一般には、$w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, I:イデアル

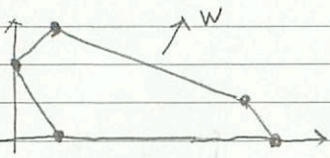
$$C_I[w] := \{ w' \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid in_{w'}(I) = in_w(I) \}$$

をwで決まるIのグレブナーconeと呼ぶ

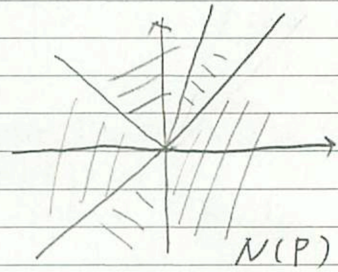
$$GF(I) := \{ \overline{C_I[w]} \mid w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \}$$

をIのグレブナーFanという

例(続き)

P = 

normal fan



N(P)

P: 凸多面体

$$face_w(P) := \{ u \in P \mid w \cdot u \geq w \cdot v \text{ for } \forall v \in P \}$$

Pの面Fに対して、

$$N_P(F) := \{ w \in \mathbb{R}^n \mid face_w(P) = F \}$$

Fのnormal cone

$N(P)$:= Pのnormal coneの全体

命題

斉次な多項式で生成される

$I \subset S$ が斉次イデアルならば、任意の$w \in \mathbb{R}^n$に対して あるw'$\in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$が存在して

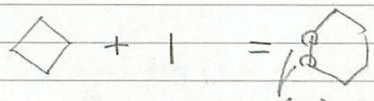
$$in_w(I) = in_{w'}(I)$$

が成り立つ.

定理 (state polytope)
任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対して、多面体 $State(I) \subset \mathbb{R}^n$ が存在して
$$N(State(I)) = GF(I)$$
を満たすものが構成できる。

命題
U: 斉次イデアル I の universal GB
このとき、
$$\sum_{f\in U} New(f) = State(I) + \cdots$$
$$\| $$
$$New\left(\prod_{f\in U} f\right)$$

ミンコフスキー和: $P + Q = \{p+q \mid p \in P, q \in Q\}$



イニシャルイデアルは一緒

トーリックイデアル

$A = (a_1, \cdots, a_n)$ $d \times n$ 行列
(ただし、$\mathrm{rank}\, A = d$ i.e. full rank
$\exists \alpha \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\alpha \cdot a_i = 1 \quad \forall i$
を仮定)

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \boxed{\qquad} & \end{pmatrix}$

$S = k[x_1, \cdots, x_n]$
$I_A = (x^u - x^v \in S \mid u, v \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, Au = Av)$
A のトーリックイデアル

例
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$I_A = (\underset{\overset{\|}{g_1}}{x_1x_2 - x_3x_5},\ \underset{\overset{\|}{g_2}}{x_1x_4 - x_2x_3},\ \underset{\overset{\|}{g_3}}{x_2^2 - x_4x_5})$$

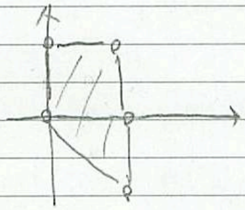
$<_1$: 逆辞書式 $(x_1 > \cdots > x_5)$
$[g_1, g_2, g_3, x_1^2x_4 - x_3^2x_5]$ は I_A の $<_1$ に関する GB
$in_{<_1}(I) = (x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4)$
$\sqrt{in_{<_1}(I)} = (x_1x_4, x_2)$

$<_2$：逆辞書式 $(x_5 > \cdots > x_1)$

$\{g_1, g_2, g_3\}$ は I_A の $<_2$ に関する GB

$$in_{<_2}(I_A) = (x_3x_5,\ x_2x_3,\ x_4x_5)$$
$$\| $$
$$\sqrt{in_{<_2}(I_A)}$$

$\mathrm{Conv}(A) =$



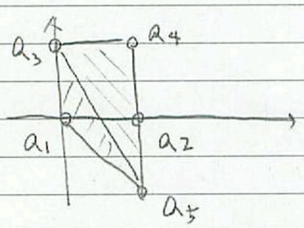
。$<$：単項式順序

$$\Delta(in_<(I_A)) = \{\mathrm{conv}(B) \mid B \subset A,\ \prod_{a_i \in B} x_i \notin \sqrt{in_<(I_A)}\}$$

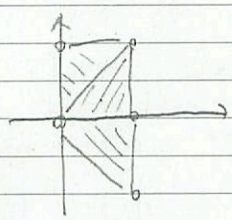
イニシャル複体

例 (続き)

$\sqrt{in_{<_1}(I_A)} = (x_1, x_4, x_2)$ に属さないスクエアフリー単項式は $\longrightarrow$ $1, x_1, x_3, x_4, x_5,$ $x_1x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5$ $x_1x_3x_5, x_3x_4x_5$



$\Delta(in_{<_1}(I_A))$
not unimodulor



$\Delta(in_{<_2}(I_A))$
unimodular

$\boxed{\text{定理}}$

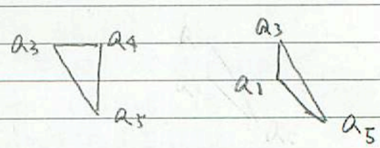
$\Delta(in_<(I_A))$ は $\mathrm{Conv}(A)$ の 三角形分割 である。
(単体分割)

$\boxed{\text{命題}}$

minimal な B のみ考えればよい

$$\sqrt{in_<(I_A)} = \left(\prod_{a_i \in B} x_i \;\middle|\; B \subset A,\ \mathrm{Conv}(B) \notin \Delta(in_<(I_A))\right)$$
$$= \bigcap_{\substack{B \subset A \\ \mathrm{Conv}(B) \in \Delta(in_<(I_A))}} (x_i \mid a_i \notin B)$$

maximal なものだけ考えればよい



例 (続き)

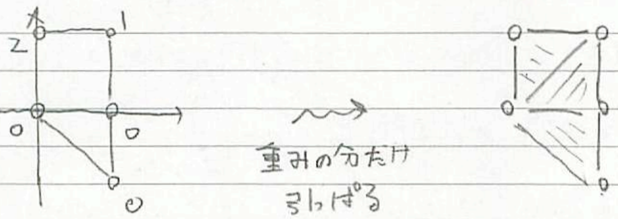
$$\sqrt{in_{<_1}(I_A)} = (x_1, x_4, x_2) = (x_1, x_2) \cap (x_4, x_2)$$

$\boxed{\text{定理}}$

$\Delta(\mathrm{in}_<(I_A))$ が unimodular $\Longleftrightarrow \sqrt{\mathrm{in}_<(I_A)} = \mathrm{in}_<(I_A)$

例 (続き)

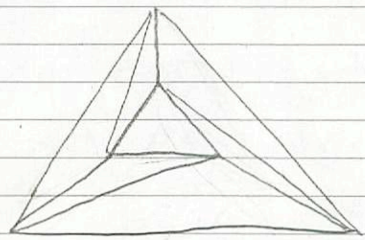
$w = (0, 0, 2, 1, 0)$ に対応する正則三角形分割 Δ_w



$\mathrm{in}_w(I_A) = \mathrm{in}_{<_2}(I_A)$

$\Rightarrow \Delta_w = \Delta(\mathrm{in}_{<_2}(I_A))$

例 非正則三角形分割



- I_A の universal GB

A に対して,

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} A & O \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \quad (d+n)\times 2n \text{ 行列}$$

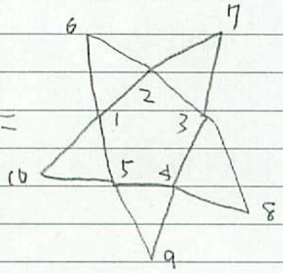
A の Lawrence lifting

$I_{\Lambda(A)}$ の生成系 $\xrightarrow[y_i=1]{}$ I_A の universal GB

(Graver basis)

大杉多面体

$G =$



有限グラフ：

頂点 10個

辺 15個

$\rho(\text{辺 } ij) = e_i + e_j \in \mathbb{R}^{10}$ を考える

例 $2 - 3 \sim (0,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$

$P_G = \{\rho(e) \mid e$ は辺$\}$ の凸閉包 ：を大杉多面体と呼ぶ。

P_G は 性質

① unimodular triangulation は存在し、それらは全て nonregular

（単体の個数が最大）

② 単体の個数が最小のものも、すべて nonregular

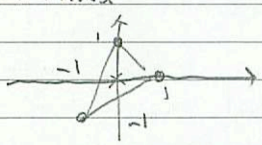
PANTOS というソフトを使って分かった

FANO 多面体

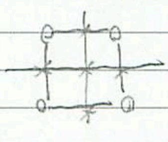
$P \subset \mathbb{R}^d$ ：整凸多面体（頂点が全て整数点）

① Fano

② terminal



③ canonical (terminalでない場合)



④ Gorenstein

P^* が整凸多面体

dual polytope

$P^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \le 1 \ \forall y \in P\}$

⑤ $\mathbb{Q}$-factorial

Fano polytope P が単体的

⑥ Smooth

maximal face
(facet)

facet の頂点が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$-basis

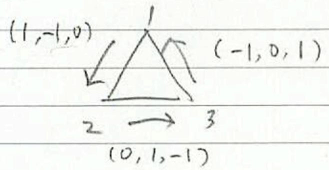
$\boxed{\text{問題の訂正}}$

$$P_{(G;w)} \subset \mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^{d-1}$$

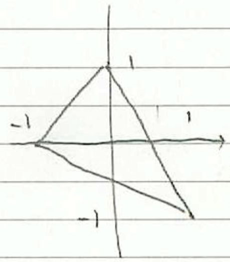
$x_1 + \cdots + x_d = 0$

(a) d次元 × → $d-1$次元 ○

例 $d=3$



$(1,-1,0)$
$(0,1,-1)$ $\subset \mathbb{R}^3$
$(-1,0,0)$



Smooth
Fano

NO

DATE