FANO 凸多面体

整凸多面体（integral convex polytope）とは、頂点の座標が整数点（すべての座標が整数）であるものを言う。

- Fano 凸多面体というのは、$\mathbf{R}^d$ の d 次元整凸多面体であり、その内部に含まれる整数点が原点のみのものである。
- terminal Fano 凸多面体とは、境界（boundary）に含まれる整数点がすべて頂点である Fano 凸多面体のことである。
- canonical Fano 凸多面体とは、境界に頂点以外の整数点を持つ Fano 凸多面体のことである。
- Fano 凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^d$ が Gorenstein Fano 凸多面体であるとは、その双対凸多面体（dual polytope）

$$\mathcal{P}^* = \{\, x \in \mathbf{R}^d \,:\, \langle x, y \rangle \leq 1,\, y \in \mathcal{P} \,\}$$

  が整凸多面体となる Fano 凸多面体のことである。但し、$\langle x, y \rangle$ は $\mathbf{R}^d$ の通常の内積である。
- Q-factorial Fano 凸多面体とは単体的な（すなわち、すべての面が単体である）Fano 凸多面体のことである。
- smooth（非特異）Fano 凸多面体とは、それぞれの facet の頂点が $\mathbf{Z}^d$ の $\mathbf{Z}$ 基底となっている Fano 凸多面体のことである。（すると、smooth ならば、Q-factorial & Gorenstein である。）

問題　頂点集合 $[d] = \{1, 2, \ldots, d\}$ 上の有限グラフ G がある。但し、G はループも重複辺も含まないものとする。有限グラフ G の orientation とは、G のそれぞれの辺に矢印を付けることである。矢印が付いた辺を directed edge と呼ぶ。有限グラフ G とその orientation ω の組 $(G;\omega)$ を directed graph と呼び、その directed edge の全体を $E(G;\omega)$ と表す。いま、directed graph $(G;\omega)$ の directed edge $i \to j$ に $\mathbf{R}^d$ の点 $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ を対応させ、$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ を $\{\, \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \,:\, i \to j \in E(G;\omega) \,\}$ の凸閉包とする。但し、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbf{R}^d$ の標準的な単位座標ベクトルである。整凸多面体 $\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ は方程式 $x_1 + \cdots + x_n = 1$ で定義される $\mathbf{R}^d$ の超平面 $\mathcal{H}$ に含まれるから、$\mathcal{H}$ と $\mathbf{R}^{d-1}$ を同一視することによって、$\mathcal{P}_{(G;\omega)} \subset \mathbf{R}^{d-1}$ と思う。

たとえば、G を 頂点集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上の有限グラフで、辺 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$ を持つとし、orientation ω を $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$ とすると、$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ の頂点は $(1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)$ となる。すると、$\mathcal{P}_{(G;\omega)} \subset \mathbf{R}^2$ と思うと、その頂点は $(1, -1), (0, 1), (-1, 0)$ となるから、$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ は 2 次元の Fano 凸多面体である。

(a)　$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ が $d-1$ 次元となるための必要十分条件を求めよ
(b)　$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ が Fano 凸多面体となるための必要十分条件を求めよ。
(c)　$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ が Fano 凸多面体ならば、$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ は Gorenstein であることを示せ。
(d)　$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ が Q-Fano 凸多面体となるための必要十分条件を求めよ。
(e)　$\mathcal{P}_{(G;\omega)}$ が smooth Fano 凸多面体となるための必要十分条件を求めよ。

解答　(a) と (b) は既知。(c) は totally unimodular matrix の理論。(d) と (e) は未解決問題。一般の G では難しいから、(d) と (e) は完全グラフのときにやっても十分に面白い。

参考文献　arXiv:0704.0049　　arXiv:0805.4533　　arXiv:0806.2604