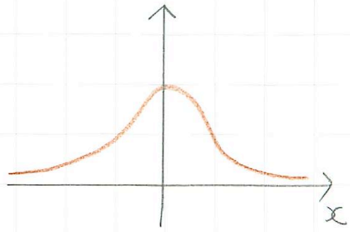
やりたいことの例による説明

$$N(x,\tfrac{1}{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\beta}\; e^{-\frac{\beta}{2}x^2}, \quad \beta > 0.$$



問. $m(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 N(x,\tfrac{1}{\beta})\,dx$ は β の関数としてどんな関数か? (running example)

<u>Step 1.</u> (微分作用素環 D のアルゴリズムで.) $m(\beta)$ のみたす微分方程式を求める。
<u>Step 2.</u> その方程式を D のアルゴリズムや数値解析で解析し $m(\beta)$ の性質をしらべる。

部分積分と $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ で, $m(\beta) = \frac{1}{\beta}$

$$K(x,\beta) = x^2 e^{-\frac{\beta}{2}x^2} \quad \text{とおく。}$$

$$\tilde{m}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,\beta)\,dx = \sqrt{2\pi}\,\beta^{-\frac{3}{2}}$$

Step 1.

1. $K(x,\beta)$ のみたす線型微分方程式系を求める。
2. 上から, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\beta)dx$ が β についてみたす線型微分方程式を求める。

$$\frac{\partial K}{\partial \beta} = -\frac{x^2}{2}K \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{x^2}{2}\right)\cdot K = 0 \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 2x e^{-\frac{\beta}{2}x^2} + x^2(-\beta x)e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$
$$= \frac{2}{x}K - \beta x K \longrightarrow \left(x\frac{\partial}{\partial x} - 2 + \beta x^2\right)\cdot K = 0 \quad \text{—— ②}$$

Prop. [Oaku, p.166] [SST, p227] 積分消去

$$\left[\ell(\beta,\tfrac{\partial}{\partial\beta}) + \frac{\partial}{\partial x}\ell_1(\beta,x,\tfrac{\partial}{\partial\beta},\tfrac{\partial}{\partial x})\right]\cdot K = 0 \quad \text{—— ③}$$

$$\Rightarrow \quad \ell\cdot\int_a^b K(x,\beta)dx + \left[\ell_1\cdot K\right]_a^b = 0$$

(∵) $\int_a^b [\ell + \frac{\partial}{\partial x}\ell_1]\cdot K dx = 0 \quad \therefore \ \ell\int_a^b K dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\ell_1\cdot K)dx}_{=\left[\ell_1\cdot K\right]_a^b} = 0$ //

①②より③の形の微分作用素をつくればよい。

$$\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{x^2}{2} \quad \text{———} ①$$

$$x\frac{\partial}{\partial x} - 2 + \beta x^2 = \frac{\partial}{\partial x}x - 3 + \beta x^2 \quad \text{———} ②$$

βx^2の項をけすには、$\beta\times① - \frac{1}{2}\times②$

$$\underline{\beta\frac{\partial}{\partial\beta}} + \underline{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}x\right)} + \underline{\frac{3}{2}}$$

— ℓ

— $\frac{\partial}{\partial x}\ell_1$

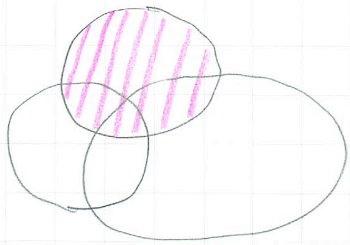
Prop より、$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{3}{2}\right)\cdot\tilde{m}(\beta)=0$.

Step 2.

$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{3}{2}\right)\cdot\tilde{m}(\beta)=0$ を解くと、$\tilde{m}(\beta)=C\cdot\beta^{-\frac{3}{2}}$.

Cは任意定数

より複雑なパラメータ付関数の積分をしらべるのにも使える。



手法

Step 1 を D のイデアルの概念で整理.

$D=\mathbb{Q}\langle x,y,\partial_x,\partial_y\rangle$ 微分作用素環 [Oaku, 3章]

$\partial_x x = x\partial_x+1$ $\quad$ $\partial_x y = y\partial_x$

$\partial_y y = y\partial_y+1$ $\quad$ $\partial_y x = x\partial_y$

Dの元は x,y の関数に作用する。

$\partial_x\cdot f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_y\cdot f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$

$x\cdot f(x,y)=xf$, $y\cdot f(x,y)=yf$

$I=\mathrm{Ann}_D f \underset{def}{=} \{\ell\in D \mid \ell\cdot f=0\}$

展望

$\mathrm{Ann}_D^{(i)} f \underset{def}{=} \{\ell\in D,\ \ell$は$i$階以下 $\mid \ell\cdot f=0\}$

IはDの左イデアル (もちろん有限生成)

積分消去で $\ell(y,\partial_y)$ をみつけることは、

$\boxed{(I+\partial_x D)\cap\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle}$ の生成元をみつけることに他ならない。

左イデアル　右イデアル

これを系統的に説明...

比較

$J\subset\mathbb{Q}[x,y,p,q]$

$J\cap\mathbb{Q}[y,q]$ 消去法

[CLO, 2章, 3章]

Def. $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$ $u_i+v_i\geq 0$ [SST, §1.1]

$(u,v)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ weight ベクトル

$$\mathrm{in}_{(u,v)}\Big(\sum c_{\alpha\beta st}\,\overbrace{x^\alpha y^\beta \partial_x^s \partial_y^t}^{\ell}\Big)$$

$= \alpha u_1+\beta u_2+s v_1+t v_2$ が最大となる ℓ の項の和

(ベキと(u,v)の内積)

initial term とよぶ

ただし

$u_1+v_1>0$ なら ∂_x を ξ に

$u_1+v_1=0$ なら ∂_x のまま

$u_2+v_2>0$ なら ∂_y を η に

$u_2+v_2=0$ なら ∂_y のまま

$\mathbb{Q}[x,y,\xi,\eta]$ は多項式環

例1. $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(y\partial_y+\frac{1}{2}yx^2)=y\eta$

$\mathrm{in}_{(0,-1,0,1)}($ 〃 $)=y\partial_y$

◎ 順序 $<_{(u,v)}$ について、多項式環のグレブナ基底とほぼ同様の議論が可能 (左イデアル)

[Oaku,] ↳def.

Th. [SST, Th 1.1.6] G を D の左イデアル I の $<_{(u,v)}$ についての Gröbner basis とすると、
$\{\mathrm{in}_{(u,v)}(g) \mid g\in G\}$ が $\mathrm{in}_{(u,v)}(I)$ の生成元.

Def. D の左イデアル I が holonomic イデアル [SST, p.29] [Oaku,]

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I)\subset\mathbb{Q}[x,y,\xi,\eta]$ の (Krull) 次元が 2 ↳ n

Th (Bernstein 不等式) [Björk, 一章] [堀田, 代数入門 5章]

$D\supsetneq I \Longrightarrow \dim\ \mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I)\geq 2$.

Coutinho

$$F_k=\Big\{\sum_{s+t\leq k} c_{\alpha\beta st}\,x^\alpha y^\beta \partial_x^s \partial_y^t\Big\} \leftarrow k\text{階以下の作用素}$$

$\dim_{\mathbb{Q}} F_k/F_k\cap I$ は k の多項式 $H(k)$ (k 十分大)

このとき.

Th. [SST, Th 1.4.1]

I が holonomic イデアル $\Longleftrightarrow$ $H(k)$ の次数が 2

$I\neq 0$.

例. $\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(y\partial_y+\frac{1}{2}yx^2)=y\eta$

$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(x\partial_x-2+yx^2)=x\xi$

$\dim\langle x\xi, y\eta\rangle = 2$

Th. [Björk, 一章]

I が holonomic イデアル $\Rightarrow$ $(I+\partial_x D)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ は $\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ の holonomic イデアル or trivial イデアル (全体)

x の方がわかりやすい

Fourier 変換 (Laplace 変換) [Oaku, p.88]

$F: x \longmapsto -\partial_x,\ \partial_x \longmapsto x$ 　　D の環準同型

x が左なので、みやすい。

$(I+\partial_x D)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle = (F(I)+xD)\cap \mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ 　制限消去

Th-Alg [Oaku, p.145−p.159] 　[SST, p.119−p.211]

制限消去は以下の手続きで計算可能。

① I の $(-1,0,1,0)$-Gröbner 基底を計算 　∂_x をけす

生成元を $g_1,\cdots,g_p$ とする。

② $0\le i\le m_j$ に対して、

$\partial_x^i g_j = \sum_s l^i_{js}(y,\partial_y)\partial_x^s + x(\cdots)$ と書く。

$\sum_s l^i_{js}(y,\partial_y)\partial_x^s$ 達から $\partial_x^s,\ s\ge 1$ を消去

ただし、この元は $\mathbb{Q}\langle y,\partial_y\rangle$ 自由加群の元とみなして ∂_x^s 達を消去

(∂_x をかけてはいけない。)

m_j のえらび方 　generic b-fct

$\theta_x = x\partial_x$

$I\cap\mathbb{Q}[\theta_x]$ の生成元を $b(\theta_x)$ とする。

$b(s)=0$ が非負整数根をもたない $\Rightarrow$ 終了

r_0 が $b(s)=0$ の最大整数根

$m_j + \mathrm{ord}_{(-1,0,1,0)}(g_j) = r_0$

となるように m_j をえらぶ。

[CLO2, 5章]

例 $L_1 = \partial_y + \frac{1}{2}\partial_x^2$

$L_2 = -\partial_x x - 2 + y\partial_x^2 = -x\partial_x - 3 + y\partial_x^2$

$sp(L_1,L_2) = yL_1 - \frac{1}{2}L_2$

$= y\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}$

$= y\partial_y + \frac{3}{2} + x\left(\frac{1}{2}\partial_x\right)$

$L_1,\ x\partial_x + 3 + 2y\partial_y,\ y\partial_x\partial_y - x\partial_y + 2\partial_x,\ 2y^2\partial_y^2 + x^2\partial_y + 9y\partial_y + 6$

$\theta_x(\theta_x-1) + 2x^2\partial_y$ 　　$\partial_x^2 + 2\partial_y,\ \partial_x^3 + 2\partial_y\partial_x,\ \cdots$

$\partial_x^k\theta_x(\theta_x-1) + \partial_x^k 2x^2\partial_y$

$= x^{-k}\theta_x(\theta_x-1)x^k\partial_x^k + \partial_x^k 2x^2\partial_y$

$= (\theta_x+k)(\theta_x+k-1)\partial_x^k + \partial_x^k 2x^2\partial_y$

$= k(k-1)\partial_x^k + x(\cdots) + \partial_x^k 2x^2\partial_y$

k 次 　　$k-2$ 次

このへんでおしまい…

① Ann より $\mathrm{Ann}^{(i)}$

② tropical implicitization を D でもできないか?

Step 2 について（まだまだ…）

$(F(I)+xD)\cap \mathbb{Q}\langle y, \partial_y\rangle$　　O.D.E.（常微分方程式）いろいろ研究あり

$D=\mathbb{Q}\langle x,y,t,\partial_x,\partial_y,\partial_t\rangle$　　holonomic

$(I+tD)\cap \mathbb{Q}\langle x,y,\partial_x,\partial_y\rangle = J$　　Jの解空間をどのようにしらべるか？ → Gröbner基底の方法

例. $\langle \theta_x+3\theta_y+1,\ \partial_x^3-\partial_y\rangle$　　$A=(1,3)$　　$I_A=\langle \partial_x^3-\partial_y\rangle$,　$\int_C e^{xt+yt^3}dt$

Prop　J が holonomic イデアル ⇒ $J\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_x]\neq\{0\}$

◎ 計算法は単純消去. [Oaku, p.97] [CLO, 3章§1]

(:)　$F_k=\left\{\sum_{s+t\le k} c_{\alpha\beta st}x^\alpha y^\beta \partial_x^s\partial_y^t\right\}$

$\dim_{\mathbb{Q}} F_k/F_k\cap J = O(k^2)$　　$k>>0$

$\mathbb{Q}$-線型写像　$g:\ \underbrace{F_k\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_y]}_{\text{次元 } \binom{k+3}{3}=O(k^3)} \longrightarrow F_k/F_k\cap J$ を考える。

$\dim_{\mathbb{Q}}\ker g+\underbrace{\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Im}\,g}_{\le O(k^2)}=O(k^3)$　　$\therefore \ker g\neq\{0\}$　//

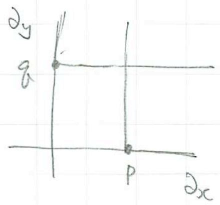
$R=\underbrace{\mathbb{Q}(x,y)}_{\text{有理式 } \frac{99}{99}}\langle\partial_x,\partial_y\rangle$　　Rでグレブナ基底の理論 O.K.

係数とみる。 $\partial_x a(x,y)=a(x,y)\partial_x+\underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}}_{\text{おつり}}$　ほとんど可換.

Prop.　J が holonomic ⇒ $\dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J < +\infty$

(:)　$J\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_x]\ni a(x,y)\partial_x^p+\cdots$

$J\cap\mathbb{Q}[x,y,\partial_y]\ni b(x,y)\partial_y^q+\cdots$

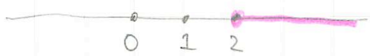


$\dim_{\mathbb{Q}(x,y)} R/R\cdot J\le p\cdot q$　//

Th-Alg　$R\cdot J$ の standard monomial の個数が解空間の次元.

std monomial ⇒ Pfaffian を得る　　（例で説明）

例1. $\langle \partial_x^2 + a\partial_x + b \rangle \subset \mathbb{Q}(x)\langle \partial_x \rangle$



$1, \partial_x$ が std monomial

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

例2. RJ の std monomial が $1, \partial_x, \partial_y$ とする。

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix}$$

← ∂_x^2 の normal form

← $\partial_x\partial_y$ の normal form

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} f \\ \partial_x \cdot f \\ \partial_y \cdot f \end{pmatrix}$$