(Knoppix/Math での) マニュアルの位置

MathDoc-Search およびインターネットでのマニュアル検索に使えるキーワード.

1. `(Macaulay2) Dmodules deRham` 検索 : Macaulay2 パッケージ Dmodules のマニュアル.
   /usr/share/doc/Macaulay2/Dmodules/html/index.html
2. `asir yang` 検索 : yang パッケージの説明書 (日本語).
   /usr/local/icms2006/projects/openxm/doc/asir-contrib/ja
3. `OpenXM` 検索 : asir, kan/sm1 等の文書. (日本語, 文書 を選択)
   /usr/local/OpenXM/doc/index/asir-ja.html
4. `nk_restriction` 検索 : asir の制限イデアルの計算関数.
   /usr/local/OpenXM/doc/index/asir-ja.html から 実験的関数を選ぶ.

◎ ワイル代数 (微分作用素環), かけ算

Macaulay 2 (emacs インタフェース, ホモロジー代数, クリーン ~~D-加群については~~ しかし 大きい計算には使えない)

kan/sm1 豊富な機能, 歴史 おそい

asir 高速, 機能すくない

⇩

演習で

```
loadPackage "Dmodules"
QQ[x,y,dx,dy,WeylAlgebra=>{x=>dx,y=>dy}]
dx*x
x*dx
L1 = x*dx-2 + y*x^2
L2 = dy + x^2/2
L1/2 - y*L2
```

[load("D-modules.m2")]

β を y に

x^2 の項が消去される.

$$N(x,\tfrac{1}{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\beta}\, e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$

$$m(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 N(x,\tfrac{1}{\beta})\,dx \quad \left(=\frac{1}{\beta}\right)$$

$$k(x,\beta) = x^2 e^{-\frac{\beta}{2}x^2}$$

β を y とおきかえ. $L1\cdot k = 0$, $L2\cdot k = 0$.

$$\left[\ell(\beta,\tfrac{\partial}{\partial\beta}) + \frac{\partial}{\partial x}\ell_1(\beta,x,\tfrac{\partial}{\partial\beta},\tfrac{\partial}{\partial x})\right]\cdot k = 0$$

$$\ell\cdot\int_{-\infty}^{\infty} k(x,\beta)\,dx = 0.$$

ワイル代数

```
Macaulay 2, version 1.1.99
with packages: Classic, Core, Elimination, IntegralClosure,
               PrimaryDecomposition, SchurRings, SimpleDoc,

i1 : loadPackage "Dmodules"

o1 = Dmodules

o1 : Package

i2 : QQ[x,y,dx,dy,WeylAlgebra=>{x=>dx,y=>dy}]

o2 = QQ[x, y, dx, dy]

o2 : PolynomialRing
```


ワイル代数

```
i3 : dx*x

o3 = x*dx + 1

o3 : QQ[x, y, dx, dy]

i4 : x*dx

o4 = x*dx

o4 : QQ[x, y, dx, dy]
```

ワイル代数

```
i5 : L1=x*dx-2+y*x^2

      2
o5 = x y + x*dx - 2

o5 : QQ[x, y, dx, dy]

i6 : L2=dy+x^2/2

     1 2
o6 = -x  + dy
     2

o6 : QQ[x, y, dx, dy]
```


ワイル代数

```
i7 : L1/2-y*L2

     1
o7 = -x*dx - y*dy - 1
     2
```

◎ 特性多様体とその次元
(characteristic variety)　(Krull dimension)

I = ideal(L1, L2)

J = inw(I, {0,0,1,1})　　$\mathrm{in}_{(0,0,1,1)}(I)$ を計算

dim(J)　　J の Krull 次元を計算

Th　holonomic ⇒
$(I + \partial_x D) \cap \mathbb{C}\langle y, \partial_y \rangle \neq 0$ で、かつ
holonomic

Characteristic variety, 次元

```
i8 : I=ideal(L1,L2)

                2                    1 2
o8 = ideal (x y + x*dx - 2, -x   + dy)
                                     2

o8 : Ideal of QQ[x, y, dx, dy]

i9 : J=inw(I,{0,0,1,1})

o9 = ideal (2dy, x*dx)

o9 : Ideal of QQ[x, y, dx, dy]

i10 : dim J

o10 = 2
```

◎ (1,0,-1,0)-グレブナ基底の計算

J=gbw(I,{1,0,-1,0}) ↵

積分消去
制限消去 のアルゴリズム
....

補. JJ=gens(J) ↵

Jの要素をとり出すには?
matrix型へ

JJ_(0,1) ↵

T=matrix{{x,x+y},{dx,dy}}
matrixの成分をとり出すには.
T_(0,1) などと入力.

Dintegration(I,{1,0}) ↵

$D/\partial_x D \otimes_D D/I$ (積分)の計算

補. toString(I) ↵ 入力形式で出力させるには便利.

(1, 0, −1, 0)-グレブナ基底の計算

```
i11 : J=gbw(I,{1,0,-1,0});

i12 : JJ=gens(J)

o12 = | x2+2dy xdx-2ydy-2 xydy+dxdy+2x 2y2dy^2+dx^2dy+9ydy+6 |

                              1                       4
o12 : Matrix (QQ[x, y, dx, dy])  <--- (QQ[x, y, dx, dy])

i13 : JJ_(0,1)

o13 = x*dx - 2y*dy - 2

o13 : QQ[x, y, dx, dy]

i14 : Dintegration(I,{1,0})

o14 = HashTable{0 => cokernel | -2ydy-3 0      |}
                              | 0       -ydy-2 |
               1 => 0
```

◎ 消去、常微分方程式の計算

```
I = ideal(x*dx + 3*y*dy+1, dx^3 - dy) ↵
J=gbw(I, {0,0,0,1}) ↵
JJ= gens(J) ↵
toString(JJ_(0,2)) ↵
```

$\dim_{\mathbb{C}(x,y)} R/R\cdot I < +\infty$.

$I \cap \mathbb{Q}\langle x, y, \partial_x \rangle$ の元になってる

Maple (級数解の計算などすぐれている。)

Step 2.
(解の性質)

```
?DEtools[formal_sol]; ↵
with(DEtools); ↵
L:= 3*y*dx^3+x*dx+1 ; ↵
LL:= subs(y=1, L) ↵
formal_sol(LL, [dx,x], T, x=infinity); ↵
```

ヘルプの見方

$x=\infty$ での
級数解を計算

消去, 常微分方程式の計算

```
i16 : I=ideal(x*dx+3*y*dy+1,dx^3-dy)

                                     3
o16 = ideal (x*dx + 3y*dy + 1, dx  - dy);

i17 : J=gbw(I,{0,0,0,1});

i18 : JJ=gens J

o18 = | xdx+3ydy+1 -dx^3+dy 3ydx^3+xdx+1 |

                                1                         3
o18 : Matrix (QQ[x, y, dx, dy])  <--- (QQ[x, y, dx, dy])

i19 : toString JJ_(0,2)

o19 = 3*y*dx^3+x*dx+1
```

Maple による級数解の計算

```
taka@orange2(1)=> maple
    |\^/|      Maple 7 (IBM INTEL LINUX)
> with(DEtools);
> L:=3*y*dx^3+x*dx+1;
                                          3
                           L := 3 y dx  + x dx + 1

> LL:=subs(y=1,L);
                                          3
                          LL := 3 dx  + x dx + 1

> formal_sol(LL,[dx,x],T,x=infinity);
              3       6
[[T (1 - 6 T  + O(T )), T = 1/x],
                                                          2
     1/2          1                  3       6           T
    [T    exp(2 ----) (1 + 5/144  T  + O(T )), - 1/3 ---- = 1/x]]
                  3                                      1
                 T
> quit();
```


◎その他

$\boxed{\text{Syz matrix } \{\{2-y*x\text{^}2, -x\text{^}3/2, x\}\}}$ e

0	x
2	0
x^2	x^2y-2

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$

$0\cdot\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}+x \qquad x\frac{\partial}{\partial x}+0\cdot\frac{\partial}{\partial y}+(x^2y-2)$

```
R=QQ[xx,p]
D=QQ[x,dx]
g=map(R,D,{x=>xx, dx=>p})     ← 同じ変数名 不可
use D
g(x*dx+1)
```

R での計算. Pfaffian の計算. yang パッケージ

例題: $x\partial_x + 3y\partial_y + 1, \partial^3 - \partial_y$. Sx は $\theta_x = x\partial_x$. Sy は $\theta_y = y\partial_y$.

```
import("yang.rr");
yang.define_ring([x,y]);
Sx=yang.operator(x);
Sy=yang.operator(y);
L1=Sx+3*Sy+1;
L2=y*Sx*(Sx-1)*(Sx-2)-x^3*Sy;
G=yang.buchberger([L1,L2]);
yang.stdmon(G);
S1=yang.constant(1);
Base=[S1,Sy,Sy*Sy];
Pf=yang.pfaffian(Base,G);
/* Pf[0], Pf[1] */
```

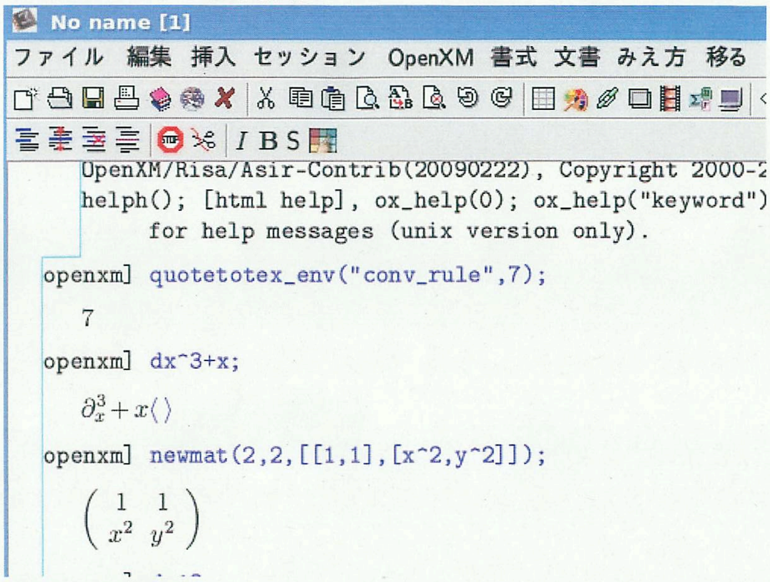
$\frac{\partial}{\partial x}(\ ) = Pf[0](\ )$

$\frac{\partial}{\partial y}(\ ) = Pf[1](\ )$

ここは θ_x, θ_y でなく $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

余談: 美しい出力で見たい (インスピレーションが涌くように...)

TeXmacs の利用.



Asir の場合.

```
print_xdvi_form(式);
print_xdvi_form(Pf[0]);
```